

**Министерство образования и науки РФ**  
**Федеральное агентство по образованию**  
**Государственное образовательное учреждение высшего**  
**профессионального образования**  
**Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова**

---

**Объединенный Институт Ядерных Исследований**  
**Лаборатория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова**

Физический факультет  
Кафедра физики элементарных  
частиц  
Зав. кафедрой, академик  
Кадышевский В. Г. \_\_\_\_\_

## **МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ**

### **Некоторые вопросы квантовых аномалий**

Руководитель:

\_\_\_\_\_ д.ф.-м.н. Теряев О. В.  
(ЛТФ, ОИЯИ)

Магистрант второго года обучения

\_\_\_\_\_ Пасечник Р. С.

Работа защищена с оценкой \_\_\_\_\_

“\_\_\_” июня 2006 г.

Рецензент:

\_\_\_\_\_ д.ф.-м.н. Дорохов А. Е. (ЛТФ, ОИЯИ)

Дубна – Москва 2006 г.

# 1 Введение

Если теория поля обладает некоторой симметрией в древесном или классическом приближении, формальные манипуляции приводят к мысли, что эта симметрия с использованием соответствующих правил квантования может быть также перенесена и в квантовую теорию. Несмотря на то, что обычно так и происходит, не существует общего принципа, позволяющего утверждать о возможности “переноса” классических симметрий в квантовую теорию. Существование такой возможности в каждом конкретном случае требует доказательства, поскольку формальные манипуляции игнорируют наличие неустраиваемых расходимостей теории возмущений.

Аномалия имеет место, если в квантовой теории поля нарушается некоторая симметрия, присущая системе на классическом уровне, т.е. в пределе  $\hbar \rightarrow 0$ . Аномалии это нарушение классических симметрий квантово-механическими радиационными поправками, которое проявляется, когда регуляризации, необходимые для вычисления диаграмм Фейнмана с фермионными петлями, конфликтуют с классической симметрией теории. Аномальные вклады появляются из расходящихся фейнмановских диаграмм и не могут быть удалены подбором контрчленов к классическому действию. “Нарушение симметрии” проявляется в невозможности построить унитарное представление преобразований симметрии классической системы, соответствующее некоторой квантовой теории на гильбертовом пространстве векторов состояния. Аномалии проявляются во многих приложениях квантовой теории поля, математической физики и теории суперструн.

## 2 Киральные аномалии. Основные свойства и приложения.

Вначале кратко рассмотрим понятие киральной (абелевой) аномалии. Киральная абелева аномалия была открыта в прошлом веке Адлером, Бэллом и Джакивом после работ Штейнберга и Швингера по  $\pi^0$ -распаду [?].

Существование инвариантных регуляризаций позволяет решить проблему расходимостей в большинстве случаев, однако сочетание калибровочной симметрии и киральных фермионов приводит к тонким эффектам. Возникает специфическое препятствие квантованию киральных калибровочных симметрий, т.н. киральные аномалии, зависящие от группы симметрии и состава полей. В кирально-симметричных калибровочных теориях, включающих взаимодействие калибровочных полей с безмассовыми фермионами, может быть показано, что аксиальный ток не сохраняется. Дивергенция аксиального тока в киральной теории, которая не исчезает в безмассовом пределе, называется собственно аномалией. Киральные аномалии имеют форму локальных полиномов по полям, связанных с локальными преобразованиями группы, но исчезающих для глобальных преобразований, поэтому оказывается, что аномалии имеют топологический характер.

Рассмотрим квантовую электродинамику с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - e_0 \gamma^\mu B_\mu - m_0)\psi, \quad (1)$$

где  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ ,  $e_0$  и  $m_0$  “голые” заряд и масса,  $B_\mu$  потенциал электромагнитного поля. По отношению к киральному преобразованию

$$\psi \rightarrow e^{i\lambda\gamma_5}\psi \quad (2)$$

с  $\lambda = const$  кинетический член в (1) является инвариантным, тогда как массовый член неинвариантен. Таким образом, применяя теорему Нетер можно ожидать, что аксиально-векторный ток

$$j_\mu^5 = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi, \quad (3)$$

полученной из лагранжиана с использованием кирального преобразования с  $\lambda = \lambda(x)$ , должен иметь дивергенцию, равную изменению массового члена при киральном преобразовании. Это справедливо в древесном приближении, но при вычислении AVV фейнмановской диаграммы с одной аксиально-векторной и двумя векторными вершинами, требуя сохранения векторного тока  $j_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ , можно показать, что в порядке  $e_0^2$  классическая теорема Нетер модифицируется таким образом, что

$$\partial^\mu j_\mu^5(x) = 2im_0j^5(x) + \frac{e_0^2}{16\pi^2}F^{\xi\rho}(x)F^{\eta\sigma}(x)\varepsilon_{\xi\rho\eta\sigma}, \quad (4)$$

где  $F^{\xi\rho}(x) = \partial^\rho B^\xi(x) - \partial^\xi B^\rho(x)$  тензор напряженностей электромагнитного поля. Второй член, не вытекающий из классической теоремы Нетер, называется абелевой киральной (аксиально-векторной) аномалией, или аномалией Адлера-Бэлла-Джакива. Ключевое свойство аномалии – это ее принципиальная неустранимость: мы не можем прибавить к AVV диаграмме какой-либо локальный полиномиальный контрчлен, который бы устранил аномалию при сохранении векторного тока с учетом требований унитарности и перенормируемости теории.

Существует большое количество различных способов понять происхождение дополнительного члена в (4). Вот некоторые из них.

1) При работе с формальным доказательством теоремы Нетер с помощью диаграммных тождеств Уорда можно заметить, что вклады от замкнутой фермионной петли могут быть устранены некоторым сдвигом переменной интегрирования в петлевом интеграле. Для сходящихся фейнмановских диаграмм нет проблемы, но AVV диаграмма является линейно-расходящейся. Линейная расходимость исчезает при симметричном интегрировании, но сдвиг затем приводит к конечному вкладу, который и дает аномалию.

2) При расчете AVV диаграммы при помощи регуляризации Паули-Вилларса с параметром  $M_0$ , который устремляется к бесконечности в конце расчета, можно получить классическую теорему Нетер регуляризованной теории

$$\partial^\mu j_\mu^5|_{m_0} - \partial^\mu j_\mu^5|_{M_0} = 2im_0j^5|_{m_0} - 2iM_0j^5|_{M_0} \quad (5)$$

Рассмотрим двухфотонный матричный элемент от этого соотношения. Можно показать, что матричный элемент  $\langle 0|j^5|_{M_0}|\gamma\gamma\rangle$ , который однозначно вычисляется при сохранении векторного тока, ведет себя как  $M_0^{-1}$  при  $M_0 \rightarrow \infty$ . Таким образом, произведение  $2iM_0$  с этим матричным элементом имеет конечный предел, который дает аномалию.

3) Определяя калибровочно-инвариантный аксиально-векторный ток методом раздвижки точек

$$j_\mu^5 = \bar{\psi}(x + \varepsilon/2)\gamma_\mu\gamma_5\psi(x - \varepsilon/2)e^{-ie_0\varepsilon^\sigma B_\sigma(x)} \quad (6)$$

и устремляя  $\varepsilon \rightarrow 0$  в конце вычислений, можно увидеть, что дивергенция полученного тока содержит дополнительный член с фактором  $\varepsilon$ , причем коэффициент у этого фактора представляет собой выражение, которое ведет себя как  $\varepsilon^{-1}$ . Таким образом, имеем аномалию в пределе исчезающе малого  $\varepsilon$ .

4) Наконец, определим теорию поля при помощи функционального интеграла от классического действия. Стандартный анализ Нетер показывает, что классическое действие инвариантно относительно кирального преобразования (2), кроме вклада массового члена. Однако, как отмечалось Фуджикавой, необходимо применить киральное преобразование и к мере в функциональном интеграле, и поскольку мера есть бесконечное произведение, она должна быть регуляризованной, для того чтобы быть хорошо определенной. Вычисления показывают, что регуляризованная мера не является кирально-инвариантной и вносит дополнительный вклад в аксиально-векторное тождество Уорда, который и является киральной аномалией.

Особое свойство киральной аномалии состоит в ее неперенормируемости, т.е. она не получает радиационных поправок высшего порядка. В однопетлевом выражении (4) коэффициент аномалии вычислен точно и не модифицируется в высших порядках теории возмущений. В калибровочных теориях, таких как квантовая электродинамика или квантовая хромодинамика, этот факт сформулирован в виде теоремы Адлера-Бардина.

Одной из физически значимых приложений киральной аномалии является теория слабых электромагнитных взаимодействий, в частности, расчет мюонного аномального магнитного момента ( $g - 2$ ).

### 3 Неперенормируемость киральной аномалии

Существует класс электрослабых поправок в мюонный  $g - 2$ , содержащих фермионную треугольную петлю с виртуальным фотоном и  $Z$ -бозоном, как показано на Рис. 5. Такие поправки интенсивно обсуждались в работах [1, 2, 3, 4, 5, 6].

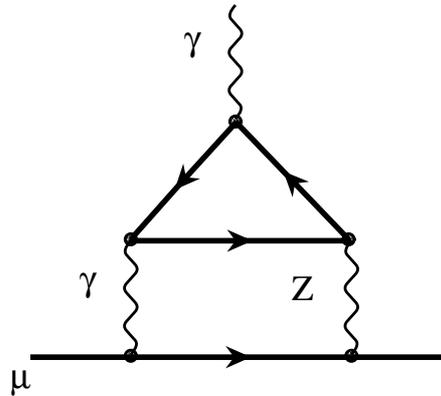


Рис. 1: Эффективная вершина  $Z\gamma\gamma^*$ , дающая вклад в  $a_\mu^{EW}$ .

Для определения мюонного аномального магнитного момента мы заинтересованы в изучении  $Z^* \rightarrow \gamma^*$  перехода в присутствии слабого внешнего магнитного поля с точностью до первого порядка по этому полю. В таком приближении можно рассматривать ток  $j_\mu$  как источник мягких фотонов с вектором поляризации  $e^\mu(k)$  и моментом  $k \rightarrow 0$ . В такой кинематике проекция амплитуды на  $e^\mu(k)$  содержит только две Лоренц-

инвариантные структуры

$$\begin{aligned}
T_{\alpha\nu}(p^2, m^2) &= T_{\alpha\mu\nu}(k, p)e^\mu(k)|_{k \rightarrow 0} = w_T(p^2, m^2)(-p^2 \tilde{f}_{\nu\alpha} + p_\nu p^\rho \tilde{f}_{\rho\alpha} - p_\alpha p^\rho \tilde{f}_{\rho\nu}) + \\
&+ w_L(p^2, m^2)p_\alpha p^\rho \tilde{f}_{\rho\nu}, \\
\tilde{f}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\gamma\delta} f^{\gamma\delta}, \quad f_{\mu\nu} = k_\mu e_\nu - k_\nu e_\mu
\end{aligned} \tag{7}$$

и может рассматриваться как коррелятор аксиального и векторного токов во внешнем электромагнитном поле с тензором напряженностей  $f_{\mu\nu}$ . Такое же выражение получается и при анализе главного вклада рассеяния света на свете в  $g - 2$ .

Обе структуры  $w_T$  и  $w_L$  являются поперечными по отношению к векторному току, но только первая структура поперечна по отношению к аксиальному току, тогда как вторая является продольной. Согласно классическим работам Розенберга (Rosenberg) [7], Адлера (Adler) [8], Белла (Bell) и Джакива (Jackiw) [9] на однопетлевом уровне инвариантные функции  $w_{L,T}$  удовлетворяют соотношению

$$w_L^{(1-loop)}(p^2, m^2) = 2w_T^{(1-loop)}(p^2, m^2). \tag{8}$$

А.И. Вайнштейном [10] было показано, что существует симметрия треугольной амплитуды  $T_{\alpha\mu\nu}$  по отношению к перестановке индексов  $\nu \leftrightarrow \alpha$  в киральном пределе. Эта симметрия сохраняет соотношение между  $w_L$  и  $w_T$  (8) в случае  $m = 0$  в любом порядке теории возмущения.

Более того, согласно теореме Адлера-Бардина [11] аномальная продольная часть треугольника не перенормируется в киральном пределе. Следует отметить, что это утверждение подразумевает операторное соотношение, тогда как матричные элементы получают поправки вследствие аномальной размерности аксиального тока. В то же время справедливость теоремы Адлера-Бардина на операторном уровне позволяет выразить [13] эти трехпетлевые поправки [12] в терминах двухпетлевых и даже однопетлевых вычислений аномальных дивергенций.

Чтобы применить теорему Адлера-Бардина к обсуждаемой проблеме, следует напомнить, что аксиальная аномалия выражается только через продольную часть  $w_L$  [8, 9]

$$p^\alpha T_{\alpha\nu}(p^2, m^2 = 0) = p^2 w_L(p^2, m^2 = 0) p^\sigma \tilde{f}_{\sigma\nu} \sim p^\sigma \tilde{f}_{\sigma\nu} \tag{9}$$

и ее неперенормируемость приводит к тому, что однопетлевой результат  $w_L^{(1-loop)} \sim 1/p^2$  не получает пертурбативных поправок от глюонных обменов в высших порядках [14]. Неперенормируемость  $w_L$  приводит к неперенормируемости  $w_T$ :

$$w_L(p^2, m^2 = 0) = 2w_T(p^2, m^2 = 0), \quad w_{L,T}^{(>1-loop)}(p^2, m^2 = 0) = 0. \tag{10}$$

Эта неперенормируемость, в отличие от продольной части, имеет место только на пертурбативном уровне и, казалось бы, не связана напрямую с явлением аномалии. Более общие теоремы о неперенормируемости в пертурбативной КХД доказаны в [15].

Интересно взглянуть на явление аномалии и пертурбативной неперенормируемости  $w_{L,T}$ , используя дисперсионный подход [16]. В рамках этого подхода аномалия выглядит довольно простой и представляет собой очевидную константу вычитания. Как результат, двухфотонный матричный элемент аксиально-векторного тока приобретает полюс в киральном пределе, так что аномалия проявляется как чистый инфракрасный эффект.

Детальное исследование однопетлевой треугольной AVV диаграммы в рамках такого подхода было выполнено ранее [17].

Язык дисперсионных соотношений позволяет нам извлечь некоторые новые специфические свойства поправок высших порядков к фермионным треугольникам. Соотношение (8) в рамках дисперсионного подхода появляется вследствие универсальности аномалии при ее появлении в дисперсионном соотношении в аксиальном и векторном каналах. Это имеет сходство с упомянутой симметрией по отношению к перестановке  $\nu \leftrightarrow \alpha$ , отмеченной А.И.Вайнштейном. В то же время это соотношение связано с явлением аномалии.

Прямым аналитическим вычислением формфакторов в двухпетлевом приближении с учетом свойств симметрии амплитуды мы получили, что полная двухпетлевая AVV амплитуда равна нулю при произвольных массах фермионов. Доказано неаномальное тождество Уорда для мнимых частей формфакторов, что обеспечивает справедливость использования дисперсионного подхода как минимум в двухпетлевом приближении. Мы также делаем предположение, что дисперсионный подход применим в любом порядке теории возмущений. Следствием такого предположения совместно с теоремой Адлера-Бардина является утверждение о том, что теорема Вайнштейна справедлива также и для ненулевых масс фермионов.

Текущий раздел построен следующим образом. В разделе 3.2 кратко описан дисперсионный подход к аномалии для различных частных конфигураций внешних моментов в стандартной однопетлевой треугольной диаграмме, следуя работе [17]. Борновское приближение теоремы Вайнштейна в рамках дисперсионного подхода интерпретируется как равенство двух выражений для аксиальной аномалии и справедливо в случае конечных масс фермионов. В разделе 3.3 предложено обобщение дисперсионного подхода к аксиальной аномалии для высших порядков теории возмущений. Рассмотрены двухпетлевые радиационные поправки к аномальной треугольной диаграмме с произвольными массами фермионов для тех же кинематических конфигураций в контексте дисперсионного подхода. Мы нашли, что все двухпетлевые формфакторы равны нулю, что подтверждает постулированное обобщение дисперсионного подхода и теоремы Вайнштейна. Раздел 3.4 содержит обсуждение высших порядков теории возмущений и непертурбативных эффектов.

### 3.1 Аксиальная аномалия и теорема о ее неперенормируемости в рамках дисперсионного подхода

Мы используем стандартное тензорное представление для амплитуды AVV треугольной диаграммы (Fig. 4), следуя Розенбергу [7]

$$T_{\alpha\mu\nu}(k, p) = \varepsilon_{\alpha\mu\nu\rho} k^\rho F_1 + \varepsilon_{\alpha\mu\nu\rho} p^\rho F_2 + k_\nu \varepsilon_{\alpha\mu\rho\sigma} k^\rho p^\sigma F_3 + p_\nu \varepsilon_{\alpha\mu\rho\sigma} k^\rho p^\sigma F_4 + k_\mu \varepsilon_{\alpha\nu\rho\sigma} k^\rho p^\sigma F_5 + p_\mu \varepsilon_{\alpha\nu\rho\sigma} k^\rho p^\sigma F_6. \quad (11)$$

Здесь  $F_j = F_j(q^2; k^2, p^2, m^2)$ ,  $j = 1, \dots, 6$  – Лоренц-инвариантные формфакторы. Бозесимметрия амплитуды  $T_{\alpha\mu\nu}(k, p) = T_{\alpha\nu\mu}(p, k)$  приводит к следующим соотношениям между формфакторами

$$\begin{aligned} F_1(k, p) &= -F_2(p, k) \\ F_3(k, p) &= -F_6(p, k) \\ F_4(k, p) &= -F_5(p, k). \end{aligned} \quad (12)$$

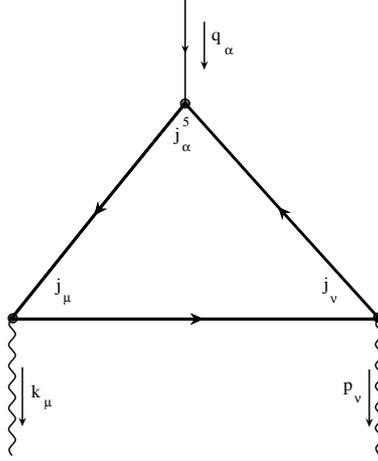


Рис. 2: Аномальная треугольная диаграмма.

Калибровочная инвариантность приводит к векторным тождествам Уорда  $k^\mu T_{\alpha\mu\nu} = 0$ ,  $p^\nu T_{\alpha\mu\nu} = 0$ , которые в терминах формфакторов записываются в виде

$$\begin{aligned} F_1 &= (kp)F_3 + p^2F_4 \\ F_2 &= k^2F_5 + (kp)F_6. \end{aligned} \quad (13)$$

В однопетлевом приближении все формфакторы  $F_j$  могут быть выражены через параметрические интегралы Фейнмана. Для значимых формфакторов имеем

$$F_3(k, p) = -\frac{1}{\pi^2} I_{11}(k, p), \quad F_4(k, p) = \frac{1}{\pi^2} [I_{20}(k, p) - I_{10}(k, p)], \quad (14)$$

где

$$I_{mn}(k, p) = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{x^m y^n}{y(1-y)k^2 + x(1-x)p^2 + 2xy(kp) - m^2} \quad (15)$$

Здесь  $N_c = 1$  для простоты. Эти интегралы обладают следующими свойствами симметрии

$$I_{mn}(k, p) = I_{nm}(p, k) \quad (16)$$

Полезно заметить, что (47) совместно с (48) и (16) дает

$$F_6(k, p) = -F_3(k, p) \quad (17)$$

Из классической работы Адлера [8] хорошо известно, что аккуратное вычисление петлевых интегралов в однопетлевом приближении приводит к аномальному аксиально-векторному тождеству Уорда

$$q^\alpha T_{\alpha\mu\nu}(k, p) = 2mT_{\mu\nu}(k, p) + \frac{1}{2\pi^2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k^\rho p^\sigma. \quad (18)$$

Псевдотензор  $T_{\mu\nu}$  может быть записан в виде

$$T_{\mu\nu}(k, p) = G(k, p) \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k^\rho p^\sigma. \quad (19)$$

В терминах формфакторов соотношение (18) приобретает вид

$$F_2 - F_1 = 2mG + \frac{1}{2\pi^2}. \quad (20)$$

Согласно теореме Адлера-Бардина аксиальная аномалия появляется только на однопетлевом уровне. Поэтому соотношение (20) для полных формфакторов остается тем же самым

$$F_2^{(tot)} - F_1^{(tot)} = 2mG^{(tot)} + \frac{1}{2\pi^2}. \quad (21)$$

В рамках дисперсионного подхода мы имеем дело с мнимыми частями формфакторов. Начнем с кинематической конфигурации внешних моментов  $k^2 = 0$ ,  $p^2 \neq 0$  для частного случая  $q^2 > 4m^2$  и  $p^2 < 4m^2$ . Тогда существует разрез при  $q^2 \in (4m^2, \infty)$ , тогда как нет такого разреза по переменной  $p^2$ . Для формфакторов  $F_j$ ,  $j = 1, \dots, 6$  и  $G$  в любом порядке теории возмущений можно записать дисперсионные соотношения без вычитания по переменной  $q^2$

$$\begin{aligned} F_j(q^2; p^2, m^2) &= \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{A_j^A(t; p^2, m^2)}{t - q^2} dt, \\ G(q^2; p^2, m^2) &= \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{B^A(t; p^2, m^2)}{t - q^2} dt \end{aligned} \quad (22)$$

Ниже мы используем обозначения  $F_j(q^2; p^2, m^2) \equiv F_j(q^2; k^2 = 0, p^2, m^2)$  и  $G(q^2; p^2, m^2) \equiv G(q^2; k^2 = 0, p^2, m^2)$ . Величины  $A_j^A$  и  $B^A$  представляют собой соответствующие мнимые части, предполагающие наличие разреза в отношении переменной  $q^2 = t$ , например

$$A_j^A(q^2; p^2, m^2) = \frac{F_j(q^2 + i\varepsilon; p^2, m^2) - F_j(q^2 - i\varepsilon; p^2, m^2)}{2i}$$

Мнимые части значимых формфакторов удовлетворяют неаномальным тождествам Уорда, поскольку они не содержат линейных расходимостей в импульсных интегралах

$$(p^2 - t)A_3^A(t; p^2, m^2) - p^2 A_4^A(t; p^2, m^2) = 2mB^A(t; p^2, m^2) \quad (23)$$

Используя (22) и (23), мы получаем окончательно

$$F_2(q^2; p^2, m^2) - F_1(q^2; p^2, m^2) - 2mG(q^2; p^2, m^2) = \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} A_3^A(t; p^2, m^2) dt \quad (24)$$

Сравнивая с (20) и учитывая (17), мы находим, что наличие аксиальной аномалии на однопетлевом уровне эквивалентно правилу сумм [17]

$$\int_{4m^2}^{\infty} A_3^A(t; p^2, m^2) dt = \frac{1}{2\pi} \quad (25)$$

Нетрудно вычислить  $A_3^A$ , беря мнимую часть соответствующего интеграла в (14) [17]

$$A_3^A(q^2; p^2, m^2) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(q^2 - p^2)^2} \left( -p^2 R + 2m^2 \ln \frac{1+R}{1-R} \right), \quad R = \left( 1 - \frac{4m^2}{q^2} \right)^{1/2} \quad (26)$$

Интегрированием этого выражения по  $q^2$  можно проверить соотношение (25).

В приведенном обсуждении мы пользовались дисперсионными соотношениями по переменной  $q^2$ , как наиболее удобными в рассмотренной кинематической области. Обсудим теперь другую версию дисперсионного расчета аномалии, используя разрезы по переменной  $p^2$ . Для этой цели мы рассмотрим другую кинематическую область  $p^2 > 4m^2$ ,  $q^2 < 4m^2$ . Записывая теперь вместо (22) дисперсионные соотношения без вычитания по переменной  $p^2 = t$  для  $F_j$  и  $G$ , мы получаем

$$\begin{aligned} F_2(q^2; p^2, m^2) - F_1(q^2; p^2, m^2) - 2mG(q^2; p^2, m^2) = \\ = \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} [A_4^V(q^2; t, m^2) - A_3^V(q^2; t, m^2)] dt, \end{aligned}$$

Величины  $A_j^V$  и  $B^V$  – соответствующие мнимые части, предполагающие наличие разреза по переменной  $p^2 = t$

$$A_j^V(q^2; p^2, m^2) = \frac{F_j(q^2; p^2 + i\varepsilon, m^2) - F_j(q^2; p^2 - i\varepsilon, m^2)}{2i}.$$

Таким образом, чтобы восстановить стандартную однопетлевую аномалию (20), учитывая (17), можно показать, что

$$\int_{4m^2}^{\infty} [A_4^V(q^2; t, m^2) - A_3^V(q^2; t, m^2)] dt = \frac{1}{2\pi} \quad (27)$$

для произвольного  $m$  и для любых рассматриваемых величинах  $q^2$ .

Непосредственный расчет на однопетлевом уровне с использованием (14) приводит к результату [17]

$$A_3^V(q^2; p^2, m^2) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(p^2 - q^2)^2} \left( p^2 S - 2m^2 \ln \frac{1+S}{1-S} \right), \quad (28)$$

$$A_4^V(q^2; p^2, m^2) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{p^2 - q^2} S, \quad S = \left( 1 - \frac{4m^2}{p^2} \right)^{1/2} \quad (29)$$

Замечено [17], что подынтегральное выражение  $A_4^V(q^2; p^2, m^2) - A_3^V(q^2; p^2, m^2)$  в правиле сумм (27) на однопетлевом уровне равно выражению для  $A_3^A(q^2; p^2, m^2)$  из правила сумм (25) с переставленными  $q^2$  и  $p^2$ . Как результат

$$A_4^V(q^2; p^2, m^2) = A_3^A(p^2; q^2, m^2) + A_3^V(q^2; p^2, m^2). \quad (30)$$

Запишем дисперсионные соотношения без вычитания по переменной  $q^2 = t$  для обеих частей равенства (30):

$$\frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{A_4^V(q^2; t, m^2)}{t - p^2} dt = \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{A_3^A(t; q^2, m^2)}{t - p^2} dt + \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{A_3^V(q^2; t, m^2)}{t - p^2} dt.$$

Из этого соотношения можно получить, что

$$F_4(q^2; p^2, m^2) = F_3(p^2; q^2; m^2) + F_3(q^2; p^2; m^2). \quad (31)$$

В случае с одним мягким  $k \rightarrow 0$  и одним виртуальным  $p^2 \neq 0$  фотонами имеем  $q^2 = (k+p)^2 \simeq p^2$ . Для такой кинематики можно получить выражения для продольной и поперечной частей амплитуды  $T_{\alpha\nu}$  (7) в терминах формфакторов

$$\begin{aligned} w_L(p^2, m^2) &= F_4(p^2; p^2, m^2), \\ w_T(p^2, m^2) &= F_4(p^2; p^2, m^2) - F_3(p^2; p^2, m^2). \end{aligned} \quad (32)$$

Соотношение (8) между  $w_T$  и  $w_L$  в терминах формфакторов

$$F_4(p^2; p^2, m^2) = 2F_3(p^2; p^2, m^2) \quad (33)$$

непосредственно следует из (31) при  $q^2 = p^2$ .

В рамках подхода Вайнштейна аксиальная аномалия выражается только через продольную часть треугольника  $w_L$  в киральном пределе (9). В пределах дисперсионного подхода мы имеем два дисперсионных соотношения для аксиальной аномалии (25), (27), включающие мнимые части обеих структур  $w_L$  и  $w_T$  для произвольных масс.

## 3.2 Расчет двухпетлевой аксиальной аномалии и проверка дисперсионного подхода и теоремы Вайнштейна

Мы предлагаем обобщение дисперсионного подхода к аксиальной аномалии в любом порядке теории возмущений. Мы считаем, что мнимые части формфакторов также удовлетворяют неаномальным тождествам Уорда для высших порядков теории возмущений. Это приведет к тому, что аномалия будет также дана соответствующими конечными вычислениями.

Чтобы проверить это предположение, мы вычислим треугольную диаграмму в двухпетлевом приближении. Очевидно результаты для КЭД и КХД поправок отличаются только цветным фактором. Мы рассматриваем полную амплитуду аномальных треугольников  $T_{\alpha\mu\nu}^{(2-loop)}$  со всеми возможными типами радиационных поправок, показанных на Рис. 6.

Сначала мы строим четыре возможных скаляра из амплитуды  $T_{\alpha\mu\nu}$  (46) в частной кинематике  $k^2 = 0$ ,  $p^2 \neq 0$ :

$$\begin{aligned} S_1 &\equiv T_{\alpha\mu\nu} k^\alpha \varepsilon^{\xi\mu\nu\eta} k_\xi p_\eta = -2(kp)^2 F_2, \\ S_2 &\equiv T_{\alpha\mu\nu} p^\alpha \varepsilon^{\xi\mu\nu\eta} k_\xi p_\eta = 2(kp)^2 F_1, \\ S_3 &\equiv T_{\alpha\mu\nu} \varepsilon^{\alpha\mu\nu\eta} k_\eta = 6(kp) F_2 + 2(kp)^2 F_4, \\ S_4 &\equiv T_{\alpha\mu\nu} \varepsilon^{\alpha\mu\nu\eta} p_\eta = 6(kp) F_1 + 2(kp)^2 F_5 - 2(kp)^2 F_3 + 6p^2 F_2. \end{aligned} \quad (34)$$

Совместно с векторными тождествами Уорда для формфакторов в той же кинематике

$$\begin{aligned} F_1 &= (kp) F_3 + p^2 F_4 \\ F_2 &= (kp) F_6. \end{aligned} \quad (35)$$

Мы получаем полную систему уравнений для всех формфакторов  $F_j = F_j(q^2; k^2 = 0, p^2, m^2)$ ,  $j = 1, \dots, 6$ . Ее решение

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{S_2}{2(kp)^2}, \quad F_2 = -\frac{S_1}{2(kp)^2}, \quad F_3 = \frac{(kp)S_2 - p^2(kp)S_3 - 3p^2 S_1}{2(kp)^4}, \\ F_4 &= \frac{(kp)S_3 + 3S_1}{2(kp)^3}, \quad F_5 = \frac{S_4(kp) - 2S_2 - p^2 S_3}{2(kp)^3}, \quad F_6 = -\frac{S_1}{2(kp)^3} \end{aligned} \quad (36)$$

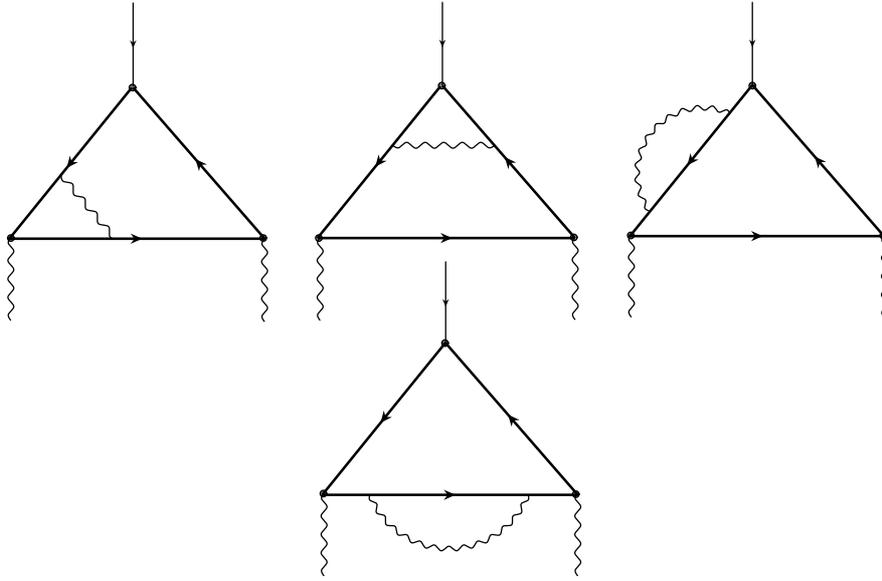


Рис. 3: Двухпетлевые треугольные диаграммы.

В рамках дисперсионного подхода мы заинтересованы в расчете мнимых частей соответствующих формфакторов, т.е.  $A_j^{A(2-loop)}(q^2; k^2 = 0, p^2, m^2)$ , поэтому вычислим мнимые части скаляров  $S_n = S_n(q^2; k^2 = 0, p^2, m^2)$ ,  $n = 1, \dots, 4$ , например, по переменной  $q^2$

$$\Delta_n^A(q^2; k^2 = 0, p^2, m^2) = \frac{1}{2i} [S_n(q^2 + i\varepsilon; k^2 = 0, p^2, m^2) - S_n(q^2 - i\varepsilon; k^2 = 0, p^2, m^2)].$$

Мы используем регуляризацию Паули-Вилларса с параметром  $M$ . После интегрирования по петлевому моменту мы получили выражения для  $\Delta_n^{A(2-loop)}(q^2; k^2 = 0, p^2, m^2)$  в форме параметрических интегралов Фейнмана. Мы опускаем все члены с мнимыми частями по переменной  $q^2$ , которые не выживают в пределе  $M \rightarrow \infty$ . Мнимые части

инвариантных скаляров (51) даны следующими интегралами

$$\begin{aligned}
\Delta_1^{A(2-loop)} \sim Disc_{q^2} & \left[ M^4 \int_0^1 da \int_0^{1-a} db \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy [4(2(kp)X_1 - p^2 X_2)(x + 2y - 1)] + \right. \\
& + M^2 \int_0^1 da \int_0^{1-a} db \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy [(32y(kp)^2 + 16xa(kp)p^2 + 16b(kp)^2 - 32m^2y(kp) + \\
& + 8(kp)p^2 - 8m^2yp^2 - 16(kp)^2 + 16x(kp)^2 + 32ya(kp)p^2 - 8x(kp)p^2 - 32yb(kp)^2 - \\
& - 16xb(kp)^2 - 16m^2x(kp) - 16y(kp)p^2 - 16a(kp)p^2)X_1 + (4yp^4 - 8(kp)p^2 - 16yap^4 - \\
& - 8xap^4 - 8m^2x(kp) + 8ap^4 - 16m^2p^2 + 24m^2yp^2 + 16m^2xp^2 + 8y(kp)p^2)X_2 + (4p^4 - \\
& - 8x(kp)p^2 - 4xp^4 - 8m^2p^2 - 4yp^4 + 8m^2yp^2 + 8m^2xp^2 + 8(kp)p^2 - 8y(kp)p^2)X_3] + \\
& + \int_0^1 da \int_0^{1-a} db \int_0^{1-a-b} dc \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy [-16(kp)^2 m^2 (2m^2y - 2m^2 - p^2y + p^2 + 2(kp))X_4^2 + \\
& + 32m^4y(kp)^2 X_5^2] + \\
& + \int_0^1 da \int_0^{1-a} db \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy [4m^2(-8y(kp)^2 - 4xa(kp)p^2 - 4b(kp)^2 + 4m^2y(kp) - 2(kp)p^2 + \\
& + 2m^2yp^2 + 4(kp)^2 - 4x(kp)^2 - 8ya(kp)p^2 + 2x(kp)p^2 + 8yb(kp)^2 + 4xb(kp)^2 + \\
& + 2m^2x(kp) + 4y(kp)p^2 + 4a(kp)p^2 + 2m^2(kp))X_1 + 4m^2(-yp^4 + 2(kp)p^2 + 4yap^4 + \\
& + 2xap^4 + 2m^2x(kp) - 2ap^4 + 3m^2p^2 - 4m^2yp^2 - 3m^2xp^2 - 2y(kp)p^2)X_2 + 4m^2(-p^4 + \\
& + 2x(kp)p^2 + xp^4 + 2m^2p^2 + yp^4 - 2m^2yp^2 - 2m^2xp^2 - 2(kp)p^2 + 2y(kp)p^2)X_3] \left. \right];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_2^{A(2-loop)} \sim Disc_{q^2} & \left[ M^4 \int_0^1 da \int_0^{1-a} db \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy [-4(2(kp)X_1 - p^2X_2)(x + 2y - 1)] + \right. \\
& + M^2 \int_0^1 da \int_0^{1-a} db \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy [(-32y(kp)^2 + 16(kp)^2 - 16xa(kp)p^2 - 8(kp)p^2 + \\
& + 16m^2y(kp) + 16m^2x(kp) + 8x(kp)p^2 - 16x(kp)^2 + 16xb(kp)^2 - 16b(kp)^2 + 16y(kp)p^2 + \\
& + 32yb(kp)^2 - 32ya(kp)p^2 - 8m^2p^2 - 16m^2(kp) + 16a(kp)p^2)X_1 + (-24y(kp)p^2 + \\
& + 16yap^4 + 8(kp)p^2 - 8m^2xp^2 - 8ap^4 + 4xp^4 - 8m^2yp^2 - 12yp^4 + 8xap^4)X_2 + (-4p^4 + \\
& + 4xp^4 + 8y(kp)p^2 - 8m^2yp^2 + 4yp^4 - 8m^2xp^2 + 8m^2p^2 + 8x(kp)p^2 - 8(kp)p^2)X_3 - \\
& \left. - 8m^2x(kp)X_6] + \right. \\
& + \int_0^1 da \int_0^{1-a} db \int_0^{1-a-b} dc \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy [-16(kp)^2m^2(-2(kp)y - 2m^2 + 2(kp) + 2m^2y + p^2 + \\
& + xp^2)X_4^2 - 16(kp)^2m^2(2m^2 - 4m^2y)X_5^2] + \\
& + \int_0^1 da \int_0^{1-a} db \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy [-4m^2(4(kp)^2 - 4x(kp)^2 - 8y(kp)^2 + 4xb(kp)^2 - 2(kp)p^2 + \\
& + 2x(kp)p^2 + 8yb(kp)^2 - 4xa(kp)p^2 - 8ya(kp)p^2 + 4y(kp)p^2 + 4a(kp)p^2 + 2m^2x(kp) - \\
& - 2m^2p^2 - 2m^2(kp) - 4b(kp)^2)X_1 - 4m^2(-2ap^4 + 4yap^4 + 2(kp)p^2 - 6y(kp)p^2 - \\
& - m^2xp^2 - m^2p^2 + xp^4 - 3yp^4 + 2xap^4)X_2 - 4m^2(-p^4 + 2x(kp)p^2 + xp^4 + 2m^2p^2 + \\
& \left. + yp^4 - 2m^2yp^2 - 2m^2xp^2 - 2(kp)p^2 + 2y(kp)p^2)X_3 + 8m^4x(kp)X_6] \right];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_3^{A(2-loop)} \sim Disc_{q^2} & \left[ M^4 \int_0^1 da \int_0^{1-a} db \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy [-8(X_1 + X_2)(x + 2y - 1)] + \right. \\
& + M^2 \int_0^1 da \int_0^{1-a} db \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy [(-32(kp)y + 32yb(kp) - 16xap^2 - 32yap^2 + 16p^2y - \\
& - 16x(kp) - 8p^2 + 16m^2x + 8xp^2 + 16(kp) + 32m^2y + 16m^2 - 16b(kp) + 16ap^2 + \\
& + 16xb(kp))X_1 + (-32(kp) + 8xp^2 + 40p^2y + 16m^2x + 16m^2y - 16p^2 + 16x(kp) + \\
& + 16ap^2 + 48(kp)y - 32yap^2 - 16xap^2)X_2 + (-8p^2y + 16m^2x + 16m^2y - 16(kp)y + \\
& + 8p^2 - 16m^2 + 16(kp))X_3] + \\
& + \int_0^1 da \int_0^{1-a} db \int_0^{1-a-b} dc \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy [16m^2(kp)(-2(kp)y - 4m^2 + 4m^2y + 4(kp) + 2p^2 - \\
& - 2p^2y + xp^2)X_4^2 - 64m^4y(kp)X_5^2] + \\
& + \int_0^1 da \int_0^{1-a} db \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy [-8m^2(-2x(kp) - 4(kp)y + 4yb(kp) - 4yap^2 + 2p^2y - p^2 + \\
& + m^2x + xp^2 + 2(kp) + 2m^2y + 3m^2 - 2b(kp) + 2ap^2 + 2xb(kp) - 2xap^2)X_1 - \\
& - 8m^2(5p^2y - 2p^2 + m^2x + xp^2 + m^2 - 4yap^2 - 4(kp) + 2ap^2 + 6(kp)y - 2xap^2 + \\
& + 2x(kp))X_2 - 8m^2(2m^2x - 2m^2 + 2m^2y - p^2y + 2(kp) - 2(kp)y + p^2)X_3] \left. \right];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_4^{A(2-loop)} \sim & Disc_{q^2} \left[ M^4 \int_0^1 da \int_0^{1-a} db \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy [8(-1+2y+x)X_1 + 8(-1+y+x)X_6] + \right. \\
& + M^2 \int_0^1 da \int_0^{1-a} db \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy [(24p^2 + 16(kp) - 16x(kp) - 16m^2 + 16b(kp) - 24xp^2 - \\
& - 32m^2y - 32yb(kp) + 32yap^2 - 16ap^2 + 16xap^2 - 32p^2y - 16m^2x - 16xb(kp))X_1 - \\
& - 16yp^2X_2 + (8p^2y - 16m^2x - 16(kp) + 16m^2 + 16(kp)y - 8p^2 - 16m^2y)X_3 + \\
& + (-16b(kp) - 16x(kp) + 16yb(kp) + 16xb(kp) - 16p^2y + 16p^2 + 32(kp) - 32(kp)y - \\
& - 16m^2x)X_6] + \\
& + \int_0^1 da \int_0^{1-a} db \int_0^{1-a-b} dc \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy [8(-6m^2y(kp)p^2 + 8m^2(kp)p^2 + 4y(kp)p^4 - \\
& - 8m^4y(kp) - 2x(kp)p^4 - 8m^2(kp)^2 + 4y(kp)^2p^2 - p^6 + 2m^2xp^4 + 8m^2y(kp)^2 + \\
& + 8m^4(kp) + 8m^4yp^2 - 4(kp)p^4 - 4(kp)^2p^2 + yp^6 - xp^6 + 6m^2p^4 - 4m^2x(kp)p^2 - \\
& - 8m^4p^2 - 6m^2yp^4)X_4^2 + 8(-4m^2y(kp)^2 + 2m^2(kp)p^2 + 2m^2yp^4 - 8m^4(kp) - \\
& - 8m^4yp^2 - 4m^2x(kp)p^2 - 4m^2x(kp)^2 + 16m^4y(kp) + 2m^2y(kp)p^2 + 4m^2(kp)^2)X_5^2] + \\
& + \int_0^1 da \int_0^{1-a} db \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy [8m^2(-2(kp) + 2x(kp) + 3m^2 - 2b(kp) - 3p^2 + 2m^2y + \\
& + 4yb(kp) - 4yap^2 + 2ap^2 - 2xap^2 + 4p^2y + m^2x + 2xb(kp) + 3xp^2)X_1 + 16m^2yp^2X_2 + \\
& + 8m^2(2m^2x - 2m^2 + 2m^2y - p^2y + 2(kp) - 2(kp)y + p^2)X_3 + 8m^2(-2xb(kp) + 2b(kp) + \\
& + 2p^2y + m^2 - m^2y + 2x(kp) + m^2x - 4(kp) - 2yb(kp) - 2p^2 + 4(kp)y)X_6] \left. \right],
\end{aligned}$$

where

$$X_1 = 1/(-m^2ya - m^2yb + m^2y - m^2 + 2ab(kp) + p^2a - p^2a^2);$$

$$X_2 = 1/(m^2xa + m^2xb - m^2x + m^2ya + m^2yb - m^2y - m^2a - m^2b - 2xya(kp) - 2xyb(kp) + 2xy(kp) - p^2xa - p^2xb + p^2x + p^2x^2a + p^2x^2b - p^2x^2 + p^2a - p^2a^2);$$

$$X_3 = 1/(m^2xa + m^2xb - m^2x + m^2ya + m^2yb - m^2y - m^2a - m^2b - 2xya(kp) - 2xyb(kp) + 2xy(kp) + 2ab(kp) - p^2xa - p^2xb + p^2x + p^2x^2a + p^2x^2b - p^2x^2 + p^2a - p^2a^2);$$

$$X_4 = 1/(m^2xa + m^2xb + m^2xc - m^2x + m^2ya + m^2yb + m^2yc - m^2y - m^2a - m^2b - m^2c - 2xya(kp) - 2xyb(kp) - 2xyc(kp) + 2xy(kp) + 2ac(kp) - p^2xa - p^2xb - p^2xc + p^2x + p^2x^2a + p^2x^2b + p^2x^2c - p^2x^2 + p^2a - p^2a^2);$$

$$X_5 = 1/(-m^2ya - m^2yb - m^2yc + m^2y - m^2 + 2ac(kp) + p^2a - p^2a^2);$$

$$X_6 = 1/(2xy(kp) - 2xyb(kp) - 2xya(kp) - m^2b - m^2a - m^2y + m^2yb + m^2ya - m^2x + m^2xb + m^2xa + p^2x - p^2xb - p^2xa - p^2x^2 + p^2x^2b + p^2x^2a).$$

Следующий шаг состоит в вычислении мнимых частей параметрических интегралов и в получении выражений для  $\Delta_n^{A(2-loop)}(q^2; k^2 = 0, p^2, m^2)$  в явной форме до снятия регуляризации. Мы получаем мнимую часть каждого подынтегрального выражения и

затем интегрируем  $\delta$ -функции со сложными аргументами аналитически. После второго или третьего интегрирования все интегралы в  $\Delta_n^{A(2-loop)}(q^2; k^2 = 0, p^2, m^2)$  обращаются, так что

$$\Delta_n^{A(2-loop)}(q^2; k^2 = 0, p^2, m^2) \equiv 0, \quad n = 1, \dots, 4. \quad (37)$$

Согласно (36) мы видим, что мнимые части всех формфакторов по переменной  $q^2$  обращаются в нуль в рассматриваемой кинематике

$$A_j^{A(2-loop)}(q^2; k^2 = 0, p^2, m^2) \equiv 0, \quad j = 1, \dots, 6. \quad (38)$$

Как результат аномальное правило сумм (25) сохраняет однопетлевую форму также и на двухпетлевом уровне.

Исследование теоремы Вайнштейна требует наличие скачков формфакторов по переменной  $p^2$  (или  $k^2$ ). Дисперсионные соотношения без вычитания (22) гарантируют нам равенство нулю всех двухпетлевых формфакторов  $F_j^{(2-loop)}$

$$F_j^{(2-loop)}(q^2; k^2 = 0, p^2, m^2) \equiv 0, \quad j = 1, \dots, 6.$$

Таким образом, полная двухпетлевая AVV амплитуда в рассмотренной кинематике равна нулю. Поэтому все скачки по переменной  $p^2$  (или  $k^2$ ) также равны нулю

$$A_j^{V(2-loop)}(q^2; k^2 = 0, p^2, m^2) \equiv 0, \quad j = 1, \dots, 6,$$

и аномальное правило сумм (27) также сохраняет однопетлевую форму. Это непосредственно приводит к справедливости теоремы Вайнштейна для конечной массы в двух петлях

$$w_L(p^2, m^2) = 2w_T(p^2, m^2), \quad w_{L,T}^{(2-loop)}(p^2, m^2) = 0. \quad (39)$$

Для полноты мы также явно проверили справедливость неаномальных тождеств Уорда для мнимых частей. Чтобы сделать это, мы рассмотрели мнимую часть псевдоскалярного формфактора  $B^{A(2-loop)}(q^2; k^2, p^2, m^2)$  в частной кинематике. Прямыми диаграммными вычислениями двухпетлевой амплитуды  $T_{\mu\nu}^{(2-loop)}$  мы нашли, что

$$B^{A(2-loop)}(q^2; k^2 = 0, p^2, m^2) \equiv 0.$$

Так что с учетом (38), соотношение (23) не получает пертурбативных поправок в двухпетлевом приближении.

### 3.3 Обсуждение результатов

Итак, в нашей работе аксиальная аномалия и теорема о неперенормируемости Вайнштейна рассмотрены в рамках дисперсионного подхода. Мы нашли, что все двухпетлевые вклады в формфакторы  $F_j(q^2; k^2 = 0, p^2, m^2)$  и  $G(q^2; k^2 = 0, p^2, m^2)$  равны нулю для произвольных масс фермионов. Это позволяет нам доказать предложенное обобщение дисперсионного подхода к аксиальной аномалии и расширить теорему о неперенормируемости Вайнштейна для произвольных масс фермионов в треугольной петле.

Хотя мы таким образом доказали справедливость этих свойств только на однопетлевом уровне, они вероятно справедливы в любом порядке теории возмущений. В самом

деле, справедливость неаномальных тождеств Уорда для мнимых частей следует из отсутствия линейных расходимостей и должна иметь место во всех петлях. Совместно с теоремой Адлера-Бардина это приведет к справедливости соответствующих правил сумм. Поскольку поправки к их подынтегральным выражениям равны нулю в киральном пределе вследствие теоремы Вайнштейна, довольно трудно представить функцию, которая не равна нулю в случае конечных масс, тогда как ее интеграл при этом равен нулю. При этом все другие функции должны быть также равны нулю вследствие калибровочной инвариантности.

В то же время дальнейшее изучение дисперсионного подхода в высших порядках и (особенно) вне теории возмущений представляет большой интерес. Следует отметить здесь свежие расчеты в рамках инстантонной модели [18], приводящие к экспоненциальному, более сильным, чем степенные, поправкам к теореме Вайнштейна.

Кажется, что в этом есть нелокальность этой модели, более чем специфика инстантонов, которая обеспечивает такое экспоненциальное поведение. Это аналогично экспоненциальному падению зависящих от поперечного момента партонных распределений, координатное описание которых [19] обладает схожестью с вакуумными нелокальными конденсатами. Следует также напомнить другое наблюдение и предложение в [17], а именно, что локальные вакуумные конденсаты не соответствуют дисперсионному описанию аксиальной аномалии и что нелокальные конденсаты могут улучшить ситуацию.

После окончания нашей работы мы узнали о препринте Ф. Егерлехнера (Jegerlehner) и О.В. Тарасова [20], результаты которых совпадают с нашими результатами в киральном пределе при произвольных внешних моментах.

Однако совсем недавно появилась работа Мельникова ([36]), в которой получен результат, прямо противоположный нашему, и приводится обратное нашему утверждение о нарушении теоремы Вайнштейна массовыми поправками. Для того чтобы поставить окончательную точку в этом вопросе необходимы проверки и дальнейшие исследования, что и будет сделано в ближайшее время.

## 4 Трэйсовая аномалия

Открытие киральных аномалий способствовало поиску других примеров аномального поведения. Впервые пертурбативная трэйсовая аномалия была обнаружена Колеманом (Coleman) и Джакивом (Jackiw) при изучении нарушенной масштабной инвариантности. Крютером (Crewther), Шановицем (Chanowitz) и Эллисом (Ellis) было показано, что трэйсовая аномалия соответствует аномалии в трехточечной функции  $\theta_\sigma^\mu V_\mu V_\nu$ , где  $\theta_\mu^\mu$  тензор энергии-импульса. Пусть  $\Delta_{\mu\nu}(p)$  трехточечная функция, и  $\Pi_{\mu\nu}$  соответствующая  $V_\mu V_\nu$  двухточечная функция, уравнение для трэйсовой аномалии в квантовой электродинамике имеет вид

$$\Delta_{\mu\nu}(p) = \left( 2 - p_\sigma \frac{\partial}{\partial p_\sigma} \right) \Pi_{\mu\nu}(p) - \frac{R}{6\pi^2} (p_\mu p_\nu - \eta_{\mu\nu} p^2), \quad (40)$$

где первое слагаемое в правой части есть обычная дивергенция, второе – трэйсовая аномалия с коэффициентом

$$R = \sum_{i, spin \frac{1}{2}} Q_i^2 + \frac{1}{4} \sum_{i, spin 0} Q_i^2 \quad (41)$$

При использовании регуляризации Паули-Вилларса аналогично с (5) в абелевой электродинамике можно получить

$$\theta_{\mu}^{\mu}|_{m_0} - \theta_{\mu}^{\mu}|_{M_0} = m_0 j|_{m_0} - M_0 j|_{M_0} \quad (42)$$

Если взять матричный элемент этого соотношения и потребовать сохранения векторного тока, можно увидеть, что матричный элемент  $\langle 0|j|_{M_0}|\gamma\gamma\rangle$  пропорционален  $M_0^{-1}\langle 0|F_{\lambda\sigma}F^{\lambda\sigma}|\gamma\gamma\rangle_{M_0}$  при больших  $M_0$ . Таким образом, возникает неисчезающий вклад в правую часть соотношения (42), дающий трэйсовую аномалию в низшем порядке.

## 5 Некоторые приложения трэйсовой аномалии. Образование хиггсовского бозона из двух виртуальных глюонов.

Хиггсовский бозон остается единственной отсутствующей, не открытой компонентой Стандартной модели. В рамках Стандартной модели хиггсовский бозон ответственен за нарушение  $SU_L(2) \times U(1)$  калибровочной симметрии и обеспечивает механизм генерации масс соответствующих калибровочных бозонов:  $W^{\pm}$  и  $Z$ . Тот же самый механизм наделяет массами лептоны и кварки через юкавские константы связи. Таким образом, открытие и последующее изучение свойств бозона Хиггса является задачей самого высокого приоритета.

Точное теоретическое предсказание для интенсивности рождения хиггсовского бозона является критичным для любых попыток поиска этой частицы. Доминирующим механизмом образования хиггсовского бозона на адрон-адронных коллайдерах является рождение при слиянии двух глюонов [21]  $pp \rightarrow gg \rightarrow H$ , при котором глюоны взаимодействуют через виртуальную треугольную  $t$ -кварковую петлю с выходом хиггса. Такой процесс обеспечивает наибольшую интенсивность рождения хиггсовского бозона для всех потенциально возможных значениях масс.

Стандартное описание жестких процессов в адронных столкновениях в рамках партонной модели КХД сводит адрон-адронные взаимодействия к партон-партонным, используя формализм адронных структурных функций. Широко используемым подходом является коллинеарное приближение КХД [22], основанное на хорошо известной коллинеарной теореме факторизации [23]. В этом подходе предполагается, что все частицы лежат на массовой поверхности, несут только продольные моменты, и сечение рассеяния усредняется по двум поперечным поляризациям глюонов. В КХД матричных элементах поперечными моментами партонов пренебрегается. Однако, при малых  $x$ , эффекты конечных поперечных импульсов партонов становятся значимыми, особенно в анализе струй и образования тяжелых кварков, и нет причин пренебрегать поперечными импульсами глюонов по сравнению с массой кварков. Метод  $k_{\perp}$ -факторизации позволяет включать поперечные импульсы партонов [24, 25]. В рамках этого метода фейнмановские диаграммы вычисляются с учетом виртуальностей и всех возможных поляризаций партонов. Широко обсуждаются такие приложения метода  $k_{\perp}$ -факторизации к жестким КХД процессам типа рождение  $J/\psi$  [26], чармония [27], фото- [28, 29] и адророждение [30] тяжелых кварков, образование хиггсовского бозона [31, 32]. Некоторые эксклюзивные процессы в рамках подхода  $k_{\perp}$ -факторизации описаны в деталях в [33].

В низшем порядке взаимодействие глюонов с хиггсовским бозоном в стандартной модели происходит посредством  $t$ -кварковой треугольной петли, как показано на Рис. 4. Этот процесс в случае глюонов на массовой поверхности  $p^2, k^2 = 0$  хорошо известен в

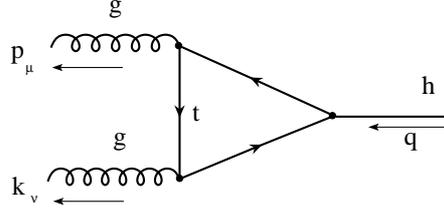


Рис. 4: Взаимодействие глюонов с хиггсовским бозоном через  $t$ -кварковую треугольную петлю.

литературе [34], поэтому представим здесь только результат

$$T_{\mu\nu}(k, p)|_{k^2, p^2=0} = i\delta^{ab} \frac{\alpha_s}{2\pi} \frac{1}{v} ([(\bar{k}p)g_{\mu\nu} - k_\mu p_\nu] I_1 + p_\mu k_\nu I_2), \quad (43)$$

$$I_1 = \tau \left[ 1 - \frac{1}{4}(1 - \tau) \ln \left( \frac{\sqrt{1 - \tau} + 1}{\sqrt{1 - \tau} - 1} \right)^2 \right] \quad \text{for } \tau = \frac{4m_{top}^2}{m_h^2} > 1. \quad (44)$$

Для больших масс кварков  $\tau \gg 1$  формфактор  $I_1$  может быть разложен по степеням  $\tau^{-1}$

$$I_1 = \frac{2}{3} \left[ 1 + \frac{7}{30} \frac{1}{\tau} + \frac{2}{21} \frac{1}{\tau^2} + O\left(\frac{1}{\tau^3}\right) \right], \quad I_1|_{\tau \rightarrow \infty} = \frac{2}{3}. \quad (45)$$

Формфактор  $I_2$  не играет роли в коллинеарном приближении, поскольку он не входит в квадрат матричного элемента предделе случая глюонов на массовой поверхности.

Для того чтобы воспользоваться подходом  $k_\perp$ -факторизации, мы учтем нетривиальные виртуальности внешних глюонов. Основная техническая проблема здесь вычислить векторные и тензорные фейнмановские интегралы с  $p^2, k^2 \neq 0$ . Однако свойства симметрии полной амплитуды вместе с использованием удобных проекторов позволяют избежать эти трудности и представить все значимые формфакторы в терминах скалярных трех- и двухточечных функций плюс дополнительные конечные вычитания, появляющиеся вследствие регуляризации.

Далее мы изучаем в деталях слияние глюонов произвольных виртуальностей в протон-протонных взаимодействиях с образованием скалярного хиггсовского бозона через кварковые треугольные петли с конечной (не бесконечной) массой  $t$ -кварка. Мы аналитически вычисляем точную амплитуду этого процесса в терминах двух формфакторов. Эта амплитуда изучена в разных кинематических областях. Более того, мы обсуждаем различные пределы фермионных масс. Мы находим, что квадрат матричного элемента с учетом ненулевых виртуальностей глюонов слегка (на несколько процентов) возрастает с ростом поперечного импульса глюонов. Мы также обсуждаем последствия ненулевых виртуальностей для рождения скалярного бозона в рамках подхода  $k_\perp$ -факторизации при больших поперечных импульсах.

## 6 Амплитуда для образования хиггсовского бозона в слиянии глюонов произвольной виртуальности

Позвольте начать с общего тензорного представления треугольной амплитуды, показанной на Рис. 4

$$T_{\mu\nu}(k, p) = g_{\mu\nu}F_1 + k_\mu k_\nu F_2 + p_\mu p_\nu F_3 + k_\mu p_\nu F_4 + p_\mu k_\nu F_5. \quad (46)$$

Здесь  $F_j = F_j(q^2, k^2, p^2, m_f^2)$ ,  $j = 1, \dots, 5$  – Лоренц-инвариантные формфакторы,  $m_f$  масса фермиона в петле. Бозе-симметрия амплитуды  $T_{\mu\nu}(k, p) = T_{\nu\mu}(p, k)$  эквивалентна

$$\begin{aligned} F_1(k, p) &= F_1(p, k), & F_2(k, p) &= F_3(p, k), \\ F_4(k, p) &= F_4(p, k), & F_5(k, p) &= F_5(p, k). \end{aligned} \quad (47)$$

Калибровочная инвариантность приводит к векторным тождествам Уорда  $p^\mu T_{\mu\nu} = 0$ ,  $k^\nu T_{\mu\nu} = 0$ , которые в терминах формфакторов дают

$$\begin{aligned} F_1 + p^2 F_3 + (kp)F_4 &= 0, & (kp)F_2 + p^2 F_5 &= 0, \\ F_1 + k^2 F_2 + (kp)F_4 &= 0, & (kp)F_3 + k^2 F_5 &= 0. \end{aligned} \quad (48)$$

Таким образом, окончательно мы имеем только три соотношения

$$\begin{aligned} F_1 + p^2 F_3 + (kp)F_4 &= 0, \\ (kp)F_2 + p^2 F_5 &= 0, \\ p^2 F_3 - k^2 F_2 &= 0. \end{aligned} \quad (49)$$

Это сводит число независимых формфакторов к двум. Поэтому тензорное представление амплитуды может записано в следующей форме

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}(k, p) &= i\delta^{ab} \frac{\alpha_s}{2\pi} \frac{1}{v} \left( [(kp)g_{\mu\nu} - k_\mu p_\nu] G_1 + \right. \\ &\quad \left. + \left[ p_\mu k_\nu - \frac{p^2}{(kp)} k_\mu k_\nu - \frac{k^2}{(kp)} p_\mu p_\nu + \frac{k^2 p^2}{(kp)^2} k_\mu p_\nu \right] G_2 \right). \end{aligned} \quad (50)$$

где  $\alpha_s$  константа сильного взаимодействия,  $v = (G_F \sqrt{2})^{-1/2}$  – электрослабый массовый масштаб,  $a, b$  – цветовые индексы двух глюонов произвольных виртуальностей. Для глюонов на массовой поверхности эта общая форма амплитуды совпадает со стандартным выражением (43) при

$$I_1 = G_1|_{k^2, p^2 \rightarrow 0}, \quad I_2 = G_2|_{k^2, p^2 \rightarrow 0}.$$

Для того чтобы вычислить формфакторы  $G_1, G_2$ , мы вводим два проектора. Самый удобный и простой выбор это один симметричный  $P_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$  и один антисимметричный  $Q_{\mu\nu} = p_\mu k_\nu - p_\nu k_\mu$  тензоры второго ранга. Соответствующие проекции:

$$S_1 = T_{\mu\nu} Q^{\mu\nu} = i\delta^{ab} \frac{\alpha_s}{2\pi} \frac{1}{v} \left( [k^2 p^2 - (kp)^2] G_1 + \left[ 2k^2 p^2 - (kp)^2 - \frac{p^4 k^4}{(kp)^2} \right] G_2 \right), \quad (51)$$

$$S_2 = T_{\mu\nu} P^{\mu\nu} = i\delta^{ab} \frac{\alpha_s}{2\pi} \frac{1}{v} \left( 3(kp) G_1 + \left[ (kp) - \frac{k^2 p^2}{(kp)} \right] G_2 \right).$$

Решая эту систему уравнений относительно  $G_1$ ,  $G_2$  мы получаем

$$\begin{aligned}
G_1 &= [i\delta^{ab}]^{-1} \frac{\pi v}{\alpha_s} \frac{(kp)S_1 + ((kp)^2 - k^2p^2)S_2}{(kp)((kp)^2 - k^2p^2)}, \\
G_2 &= -[i\delta^{ab}]^{-1} \frac{\pi v}{\alpha_s} \frac{(kp)(3(kp)S_1 + ((kp)^2 - k^2p^2)S_2)}{((kp)^2 - k^2p^2)^2}.
\end{aligned} \tag{52}$$

Явное выражение для амплитуды записывается в виде

$$T_{\mu\nu}(k, p) = i\delta^{ab} \frac{4\pi\alpha_s}{v} m_f \int \frac{d^4r}{i(2\pi)^4} \frac{M_{\mu\nu}(k, p)}{[(r-k)^2 - m_f^2][r^2 - m_f^2][(r+p)^2 - m_f^2]},$$

$$M_{\mu\nu}(k, p) = \text{Tr}[(m_f + \not{k} - \not{r})\gamma_\nu(m_f + \not{r})\gamma_\mu(m_f + \not{r} + \not{p})].$$

Применяя теперь размерную регуляризацию и используя редукцию Пассарино-Вельтмана, имеем

$$\begin{aligned}
S_1 &= i\delta^{ab} \frac{\alpha_s}{\pi v} \frac{m_f^2}{\mu^{4-n}} [C_0(kp)(k^2 + p^2 + 2(kp)) - (k^2 + (kp))B_0^{12} + \\
&+ (k^2 + p^2 + 2(kp))B_0^{13} - (p^2 + (kp))B_0^{23}],
\end{aligned} \tag{53}$$

$$\begin{aligned}
S_2 &= i\delta^{ab} \frac{\alpha_s}{\pi v} \frac{m_f^2}{\mu^{4-n}} [C_0(4m^2 - k^2 - p^2 - n(kp)) + B_0^{12} + \\
&+ (2-n)B_0^{13} + B_0^{23}].
\end{aligned} \tag{54}$$

где  $n = 4 - \varepsilon$  – размерность пространства,  $B^{12}$ ,  $B^{13}$ ,  $B^{23}$  – скалярные двухточечные функции:

$$\begin{aligned}
B_0^{12}(k^2, m_f^2) &= 16\pi^2 \mu^{4-n} \int \frac{d^n r}{i(2\pi)^4} \frac{1}{[(r-k)^2 - m_f^2][r^2 - m_f^2]} = \frac{2}{\varepsilon} + \xi - L_1, \\
B_0^{13}(q^2, m_f^2) &= 16\pi^2 \mu^{4-n} \int \frac{d^n r}{i(2\pi)^4} \frac{1}{[(r-k)^2 - m_f^2][(r+p)^2 - m_f^2]} = \frac{2}{\varepsilon} + \xi - L_2, \\
B_0^{23}(p^2, m_f^2) &= 16\pi^2 \mu^{4-n} \int \frac{d^n r}{i(2\pi)^4} \frac{1}{[r^2 - m_f^2][(r+p)^2 - m_f^2]} = \frac{2}{\varepsilon} + \xi - L_3,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
L_j &= \beta_j \ln \frac{\beta_j + 1}{\beta_j - 1}, \quad \beta_1 = \sqrt{1 - \frac{4m_f^2}{k^2}}, \quad \beta_2 = \sqrt{1 - \frac{4m_f^2}{q^2}}, \quad \beta_3 = \sqrt{1 - \frac{4m_f^2}{p^2}} \\
\xi &= -\gamma - \ln \pi + 2 - \ln \frac{m_f^2}{\mu^2}
\end{aligned}$$

и  $C_0$  – скалярная трехточечная функция. Следуя [35]

$$\begin{aligned}
C_0(q^2, k^2, p^2, m_f^2) &= 16\pi^2 \mu^{4-n} \int \frac{d^n r}{i(2\pi)^4} \frac{1}{[(r-k)^2 - m_f^2][r^2 - m_f^2][(r+p)^2 - m_f^2]} = \\
&= \varkappa(k^2, p^2, q^2) + \varkappa(q^2, k^2, p^2) + \varkappa(p^2, q^2, k^2).
\end{aligned}$$

Выше для простоты мы ввели следующие обозначения

$$\varkappa(x, y, z) = \frac{1}{\lambda} \left[ \text{Li}_2 \left( \frac{t-1}{t-\tau} \right) + \text{Li}_2 \left( \frac{t-1}{t+\tau} \right) - \text{Li}_2 \left( \frac{t+1}{t-\tau} \right) - \text{Li}_2 \left( \frac{t+1}{t+\tau} \right) \right].$$

$$\lambda(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx}, \quad t = \frac{1}{\lambda}(x - y - z), \quad \tau = \sqrt{1 - \frac{4m_f^2}{x}}$$

Конечно, проекции  $S_1$  and  $S_2$  являются сходящимися в пределе  $\varepsilon \rightarrow 0$  и тогда

$$\begin{aligned} S_1 &= i\delta^{ab} \frac{\alpha_s}{\pi v} m_f^2 [C_0(kp)(k^2 + p^2 + 2(kp)) + ((kp) + k^2)L_1 - \\ &\quad - (k^2 + p^2 + 2(kp))L_2 + ((kp) + p^2)L_3], \end{aligned} \quad (55)$$

$$S_2 = i\delta^{ab} \frac{\alpha_s}{\pi v} m_f^2 [C_0(4m_f^2 - k^2 - p^2 - 4(kp)) - L_1 + 2L_2 - L_3 + 2]. \quad (56)$$

В  $S_2$  имеется конечный вычитательный член как следствие регуляризации. Подставляя эти выражения в (52) мы окончательно получаем

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{m_f^2}{(kp)((kp)^2 - k^2p^2)} \times \\ &\quad \times [(4m_f^2((kp)^2 - k^2p^2) - 2(kp)((kp)^2 - 2k^2p^2) + k^2p^2(k^2 + p^2))C_0 + \\ &\quad + k^2(p^2 + (kp))L_1 - (2k^2p^2 + (kp)(k^2 + p^2))L_2 + \\ &\quad + p^2(k^2 + (kp))L_3 + 2((kp)^2 - k^2p^2)], \end{aligned} \quad (57)$$

$$\begin{aligned} G_2 &= -\frac{m_f^2(kp)}{((kp)^2 - k^2p^2)^2} \times \\ &\quad \times [(4m_f^2((kp)^2 - k^2p^2) + (k^2 + p^2)(2(kp)^2 + k^2p^2) + 2(kp)((kp)^2 + 2k^2p^2))C_0 + \\ &\quad + (2(kp)^2 + 3(kp)k^2 + k^2p^2)L_1 - (3(kp)(k^2 + p^2) + 2(2(kp)^2 + k^2p^2))L_2 + \\ &\quad + (2(kp)^2 + 3(kp)p^2 + k^2p^2)L_3 + 2((kp)^2 - k^2p^2)]. \end{aligned} \quad (58)$$

Теперь амплитуда вне массовой поверхности может быть вычислена как  $M = T_{\mu\nu} k_{1\perp}^\mu k_{2\perp}^\nu / |\mathbf{k}_{1\perp}| |\mathbf{k}_{2\perp}|$  с  $T_{\mu\nu}$ , полученном из (50),  $G_1$  и  $G_2$  даны соотношениями (57) и (58), соответственно.

## 7 Оценка величины эффекта виртуальностей

В так называемом пределе тяжелого фермиона  $m_f \rightarrow \infty$  мы получаем

$$G_1|_{m_f \rightarrow \infty} = \frac{2}{3}, \quad G_2|_{m_f \rightarrow \infty} = 0 \quad (59)$$

для глюонов с произвольными виртуальностями  $k^2$  и  $p^2$ . Первый предел для  $G_1$  совпадает с классическим результатом (45).

Легко показать также, что формфактор  $G_1$  в пределе  $k^2, p^2 \rightarrow 0$

$$G_1|_{k^2, p^2 \rightarrow 0} = \tau \left[ 1 - \frac{1}{4}(1 - \tau) \ln \left( \frac{\sqrt{1 - \tau} + 1}{\sqrt{1 - \tau} - 1} \right)^2 \right] \quad \text{for} \quad \tau = \frac{4m_f^2}{q^2} > 1, \quad (60)$$

совпадает с  $I_1$  (44) для случая рождения хиггсовского бозона при слиянии глюонов на массовой поверхности с  $q^2 = (k+p)^2 \simeq m_h^2$ ,  $m_f = m_{top}$ . В этом пределе второй формфактор  $G_2$

$$G_2|_{k^2, p^2 \rightarrow 0} = -\tau \left[ 5 - 2\sqrt{1-\tau} \ln \left( \frac{\sqrt{1-\tau}+1}{\sqrt{1-\tau}-1} \right) + \frac{1}{4}(1+\tau) \ln \left( \frac{\sqrt{1-\tau}+1}{\sqrt{1-\tau}-1} \right)^2 \right]. \quad (61)$$

Разложения для  $\tau \gg 1$  и  $p^2, k^2 = 0$  имеют следующую форму

$$G_1 = \frac{2}{3} \left[ 1 + \frac{7}{30} \frac{1}{\tau} + \frac{2}{21} \frac{1}{\tau^2} + O\left(\frac{1}{\tau^3}\right) \right], \quad G_2 = -\frac{1}{45} \frac{1}{\tau} - \frac{4}{315} \frac{1}{\tau^2} + O\left(\frac{1}{\tau^3}\right). \quad (62)$$

Запишем аналогичные разложения с учетом ненулевых глюонных виртуальностей.

Предел бесконечно тяжелого фермиона (59) не вообще содержит размерных величин, таких как  $q^2, p^2, k^2$ , поэтому нет разницы в порядке перехода к пределам: сначала  $q^2 \rightarrow 0$  и затем  $k^2, p^2 \rightarrow 0$  или наоборот. Таким образом, более удобно работать с безразмерными параметрами, определенными как

$$\chi = \frac{q^2}{4m_f^2}, \quad \xi = \frac{p^2}{4m_f^2} < 0, \quad \eta = \frac{k^2}{4m_f^2} < 0. \quad (63)$$

Тогда предел массовой поверхности  $p^2, k^2 \rightarrow 0$  эквивалентен пределу  $\xi, \eta \rightarrow 0$ . Предел тяжелого кварка (59) соответствует  $\chi, \xi, \eta \rightarrow 0$ . Мы можем сейчас учесть члены первого порядка по  $\xi$  и  $\eta$  в (62). В случае рождения хиггсовского бозона  $m_h^2 \gg |\langle k^2 \rangle|, |\langle p^2 \rangle|$  [32], так что мы должны учесть степени  $\chi$  выше, чем степени  $\xi, \eta$ . Разложения  $G_1$  и  $G_2$  вплоть до второго порядка по  $\chi$  и первого порядка по  $\xi$  и  $\eta$  дают

$$\begin{aligned} G_1(\chi, \xi, \eta) &= \frac{2}{3} \left[ 1 + \frac{7}{30} \chi + \frac{2}{21} \chi^2 + \frac{11}{30} (\xi + \eta) + O(\chi^3, \xi^2, \eta^2, \chi\xi, \chi\eta, \xi\eta) \right], \\ G_2(\chi, \xi, \eta) &= -\frac{1}{45} (\chi - \xi - \eta) - \frac{4}{315} \chi^2 + O(\chi^3, \xi^2, \eta^2, \chi\xi, \chi\eta, \xi\eta). \end{aligned} \quad (64)$$

Мы сравнили точные формфакторы (57) и (58) с разложениями (64) для реалистических параметров  $m_{top} = 0.17$  TeV,  $m_h = 0.15$  TeV. В заключение, мы можем использовать разложения формфакторов вплоть до  $|\xi|, |\eta| = 0.3$  с максимальной ошибкой менее чем 1%.

Чтобы сделать наши расчеты полезными для случая рождения хиггсовского бозона, перейдем к физическим параметрам протон-протонного взаимодействия. Вводя  $p = x_1 p_1 + k_{1\perp}$ ,  $k = x_2 p_2 + k_{2\perp}$ , где  $k_{1\perp}, k_{2\perp}$  пространственно-подобные 4-вектора, ассоциированные с поперечными импульсами глюонов  $\mathbf{k}_{1\perp}$  и  $\mathbf{k}_{2\perp}$ ,  $p_1, p_2$  — адронные импульсы, так что  $(p_1 p_2) = s/2$ , и пренебрегая адронной массой  $m_p \ll m_h, m_{top}$ , мы видим, что  $p^2 \simeq -\mathbf{k}_{1\perp}^2 < 0$  and  $k^2 \simeq -\mathbf{k}_{2\perp}^2 < 0$ . Предмет нашего анализа следующая нормированная проекция амплитуды  $M = T_{\mu\nu} k_{1\perp}^\mu k_{2\perp}^\nu / |\mathbf{k}_{1\perp}| |\mathbf{k}_{2\perp}|$ , данная формулой

$$\begin{aligned} M(g^* g^* \rightarrow H) &= -i \delta^{ab} \frac{\alpha_s}{4\pi v} \left[ (m_h^2 + \mathbf{k}_{1\perp}^2 + \mathbf{k}_{2\perp}^2 + 2|\mathbf{k}_{1\perp}| |\mathbf{k}_{2\perp}| \cos \phi) \cos \phi G_1 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2(m_h^2 + \mathbf{k}_{1\perp}^2 + \mathbf{k}_{2\perp}^2 + 2|\mathbf{k}_{1\perp}| |\mathbf{k}_{2\perp}| \cos \phi)^2 |\mathbf{k}_{1\perp}| |\mathbf{k}_{2\perp}|}{(m_h^2 + \mathbf{k}_{1\perp}^2 + \mathbf{k}_{2\perp}^2)^2} G_2 \right], \end{aligned} \quad (65)$$

где  $G_1, G_2$  могут быть взяты из (64) для не слишком больших  $|\mathbf{k}_{1\perp}|$  и  $|\mathbf{k}_{2\perp}|$ ,  $\phi$  азимутальный угол между поперечными импульсами глюонов  $\mathbf{k}_{1\perp}$  и  $\mathbf{k}_{2\perp}$ , поперечный импульс хиггсовского бозона  $\mathbf{p}_\perp = \mathbf{k}_{1\perp} + \mathbf{k}_{2\perp}$  и тензор поляризации виртуальных глюонов может быть взят в форме [25, 31]

$$\sum \epsilon^\mu \epsilon^{*\nu} = \frac{k_\perp^\mu k_\perp^\nu}{\mathbf{k}_\perp^2}.$$

Для краткости мы обозначим первый член амплитуды  $\mathcal{M}_1$  и второй член  $\mathcal{M}_2$ . Пренебрегая вторым слагаемым в (65) и беря величину  $G_1$  на массовой поверхности, получаем

$$\begin{aligned} M_1 &= -i\delta^{ab} \frac{\alpha_s}{4\pi} \frac{1}{v} (m_h^2 + \mathbf{k}_{1\perp}^2 + \mathbf{k}_{2\perp}^2 + 2|\mathbf{k}_{1\perp}||\mathbf{k}_{2\perp}| \cos \phi) \cos \phi I_1, \\ I_1 &= G_1|_{k^2, p^2 \rightarrow 0} \simeq G_1^0. \end{aligned} \quad (66)$$

Это выражение совпадает с амплитудой, полученной в [31] с точностью до численного фактора.

Определим теперь некоторые эффекты виртуальностей, обсуждавшиеся выше.

## 7.1 Эффект на формфакторы

Начнем с простого случая формфакторов. На Рис. 5 мы показываем зависимость двух формфакторов  $G_1$  и  $G_2$  от параметров  $\xi$  и  $\eta$ . Результаты нормированы на величины формфакторов на массовой поверхности

$$\begin{aligned} G_1^0 &= \frac{2}{3} \left[ 1 + \frac{7}{30}\chi + \frac{2}{21}\chi^2 \right], \\ G_2^0 &= -\frac{1}{45}\chi - \frac{4}{315}\chi^2. \end{aligned} \quad (67)$$

В этом расчете  $m_{top}=0.17$  TeV,  $m_h=0.15$  TeV. Мы видим, что первый формфактор  $G_1$  слегка падает, тогда как второй формфактор  $G_2$  растет с ростом  $|\xi|$  и  $|\eta|$ . Первый формфактор с учетом конечной массы кварка отличается от формфактора, полученного в рамках эффективного подхода [31] на 5%.

## 7.2 Эффект на амплитуду

Усредняя квадрат амплитуды  $M^2$  по  $\phi$  мы получаем

$$\begin{aligned} \langle M^2 \rangle_\phi &= \frac{\alpha_s^2}{4\pi^2} \frac{1}{v^2} \left[ ((m_h^2 + \mathbf{k}_{1\perp}^2 + \mathbf{k}_{2\perp}^2)^2 + 2\mathbf{k}_{1\perp}^2 \mathbf{k}_{2\perp}^2) G_1^2 + \right. \\ &+ \frac{8\mathbf{k}_{1\perp}^2 \mathbf{k}_{2\perp}^2 [((m_h^2 + \mathbf{k}_{1\perp}^2 + \mathbf{k}_{2\perp}^2)^2 + 6\mathbf{k}_{1\perp}^2 \mathbf{k}_{2\perp}^2)^2 - 32\mathbf{k}_{1\perp}^4 \mathbf{k}_{2\perp}^4]}{(m_h^2 + \mathbf{k}_{1\perp}^2 + \mathbf{k}_{2\perp}^2)^4} G_2^2 - \\ &\left. - \frac{8\mathbf{k}_{1\perp}^2 \mathbf{k}_{2\perp}^2 (3(m_h^2 + \mathbf{k}_{1\perp}^2 + \mathbf{k}_{2\perp}^2)^2 + 2\mathbf{k}_{1\perp}^2 \mathbf{k}_{2\perp}^2)}{(m_h^2 + \mathbf{k}_{1\perp}^2 + \mathbf{k}_{2\perp}^2)^2} G_1 G_2 \right]. \end{aligned} \quad (68)$$

Можно увидеть, что в коллинеарном пределе  $\mathbf{k}_{1\perp}, \mathbf{k}_{2\perp} \rightarrow 0$  усредненный квадрат матричного элемента  $\langle M^2 \rangle_\phi$  совпадает с квадратом матричного элемента в ковариантной калибровке  $T^{\mu\nu} T^{\mu'\nu'} g_{\mu\mu'} g_{\nu\nu'}$  умноженным на 2.

Определим матричный элемент  $M_0$ , который получен из  $M$  данным (65) подстановкой формфакторов при произвольной виртуальности формфакторами на массовой поверхности  $G_1^0$  и  $G_2^0$  (см. (68)).

$$M_0 = -i\delta^{ab}\frac{\alpha_s}{4\pi}\frac{1}{v}\left[(m_h^2 + \mathbf{k}_{1\perp}^2 + \mathbf{k}_{2\perp}^2 + 2|\mathbf{k}_{1\perp}||\mathbf{k}_{2\perp}|\cos\phi)\cos\phi G_1^0 - \frac{2(m_h^2 + \mathbf{k}_{1\perp}^2 + \mathbf{k}_{2\perp}^2 + 2|\mathbf{k}_{1\perp}||\mathbf{k}_{2\perp}|\cos\phi)^2|\mathbf{k}_{1\perp}||\mathbf{k}_{2\perp}|}{(m_h^2 + \mathbf{k}_{1\perp}^2 + \mathbf{k}_{2\perp}^2)^2} G_2^0\right], \quad (69)$$

На Рис. 6 мы показываем  $\langle M^2 \rangle_\phi / \langle M_0^2 \rangle_\phi$  как функцию параметров  $\xi$  и  $\eta$ . Можно увидеть некоторое падение  $\langle M^2 \rangle_\phi$  относительно  $\langle M_0^2 \rangle_\phi$  вследствие падения формфактора  $G_1$ .

Давай вначале оценим эффект ненулевых виртуальностей. Следуя работе [32] мы возьмем величины поперечных глюонных импульсов в интервале  $|\mathbf{k}_{1,2\perp}| \sim 5 - 50$  GeV. Тогда относительный эффект замены  $G_1$  и  $G_2$  их величинами при нулевых виртуальностях  $G_1^0$  и  $G_2^0$

$$\frac{\langle M_0^2 \rangle_\phi - \langle M^2 \rangle_\phi}{\langle M_0^2 \rangle_\phi} \simeq \frac{(G_1^0)^2 - G_1^2}{(G_1^0)^2} = 0.0003 - 0.03, \quad (70)$$

соответственно для нижнего и верхнего пределов поперечных импульсов глюонов. Довольно малое падение усредненного квадрата матричного элемента обусловлено главным образом падением первого формфактора  $G_1$ . Эффект имеет порядок 1% или меньше при типичных поперечных импульсах глюонов. Таким образом, эффект ненулевых виртуальностей глюонов в формфакторах на средний квадрат матричного элемента достаточно мал.

Кажется интересным изучить поведение матричного элемента в той части фазового объема, где первый член мал. Действительно, при  $\cos\phi = 0$  вклад формфактора  $G_1$  исчезает из (65), и мы имеем следующее простое выражение для амплитуды

$$M|_{\phi=\pi/2} = i\delta^{ab}\frac{\alpha_s}{2\pi}\frac{1}{v}|\mathbf{k}_{1\perp}||\mathbf{k}_{2\perp}| G_2, \quad (71)$$

которое определяется только вторым формфактором  $G_2$ . Как результат имеются значительные последствия ненулевых виртуальностей на угловое распределение около  $\phi = \pi/2$ . При этом  $M^2|_{\phi=\pi/2}$  растет с ростом  $|\xi|$  и  $|\eta|$ . Относительный рост полностью определяется ростом формфактора  $G_2$

$$\frac{M^2|_{\phi=\pi/2} - M_0^2|_{\phi=\pi/2}}{M_0^2|_{\phi=\pi/2}} \simeq \frac{G_2^2 - G_2^{02}}{G_2^{02}} = 0.004 - 0.44, \quad (72)$$

при  $|\mathbf{k}_{1,2\perp}| \sim 5 - 50$  GeV соответственно. Таким образом, учет ненулевых виртуальностей может существенно менять угловое распределение при  $\phi \approx \pi/2$ .

### 7.3 Эффект на инклюзивное сечение

Попытаемся вычислить наблюдаемый эффект. Для этого необходимо свернуть сечение подпроцесса с реалистичными непроинтегрированными глюонными распределениями.

Инклюзивное сечение рождения хиггсовского бозона в адрон-адронных взаимодействиях может быть записано в виде

$$\sigma = \int \frac{dx_1}{x_1} \frac{dx_2}{x_2} \frac{d^2\mathbf{k}_{1\perp}}{\pi} \frac{d^2\mathbf{k}_{2\perp}}{\pi} \sigma_{off-shell}(\mathbf{k}_{1\perp}, \mathbf{k}_{2\perp}) \mathcal{A}(x_1, \mathbf{k}_{1\perp}^2, \mu_F^2) \mathcal{A}(x_2, \mathbf{k}_{2\perp}^2, \mu_F^2), \quad (73)$$

где  $\mathcal{A}(x, \mathbf{k}_\perp^2, \mu^2)$  непроинтегрированные глюонные распределения взаимодействующих адронов  $h_1$  и  $h_2$ .

Теперь распределение по азимутальному углу  $\phi$  между  $\mathbf{k}_{1\perp}$  и  $\mathbf{k}_{2\perp}$  может быть вычислено как:

$$\frac{d\sigma}{d\phi} = 2\pi \int \frac{dx_1}{x_1} \frac{dx_2}{x_2} \frac{1}{\pi^2} k_{1\perp} dk_{1\perp} k_{2\perp} dk_{2\perp} \sigma_{off-shell}(\mathbf{k}_{1\perp}, \mathbf{k}_{2\perp}) \mathcal{A}(x_1, \mathbf{k}_{1\perp}^2, \mu^2) \mathcal{A}(x_2, \mathbf{k}_{2\perp}^2, \mu^2). \quad (74)$$

Подставляя квадрат матричного элемента при произвольных виртуальностях в формулу для сечения подпроцесса получим

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\phi} &= \frac{\alpha_s^2(\mu^2)}{256 \pi^2} \frac{(m_h^2 + \mathbf{p}_\perp^2)}{v^2 x_1 x_2 s m_h^2} \int \left[ \cos \phi G_1 - \frac{2(m_h^2 + \mathbf{p}_\perp^2) |\mathbf{k}_{1\perp}| |\mathbf{k}_{2\perp}|}{(m_h^2 + \mathbf{k}_{1\perp}^2 + \mathbf{k}_{2\perp}^2)^2} G_2 \right]^2 \\ &\times \mathcal{A}(x_1, \mathbf{k}_{1\perp}^2, \mu^2) \mathcal{A}(x_2, \mathbf{k}_{2\perp}^2, \mu^2) d\mathbf{k}_{1\perp}^2 d\mathbf{k}_{2\perp}^2 dy_H, \end{aligned} \quad (75)$$

Доли продольных импульсов должны быть вычислены как

$$x_1 = \sqrt{\frac{m_h^2 + \mathbf{p}_\perp^2}{s}} \exp(y_H), \quad x_2 = \sqrt{\frac{m_h^2 + \mathbf{p}_\perp^2}{s}} \exp(-y_H).$$

Выражение (75) с формфакторами на массовой поверхности совпадает с аналогичной формулой, полученной Липатовым и Зотовым в работе [31].

Второй член амплитуды (65) является новым и не обсуждался в литературе. Для иллюстрации роли второй части амплитуды на Рис. 7 мы показываем распределение по азимутальному углу. В этом вычислении VFKL непроинтегрированные глюонные распределения использовались для примера. Имеет место только малое отличие между результатом, полученным с суммой обеих амплитуд ( $\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$ ) и результатом, полученным только с первым членом ( $\mathcal{M}_1$ ). Отличие становится видимым только вблизи  $\phi = \pi/2$ , т.е. когда первый вклад исчезает. Мы показываем на рисунке также модуль интерференционного члена. Последний много меньше сечение, полученного только с первым членом, кроме  $\phi \approx \pi/2$ . Поскольку этот эффект пренебрежимо мал, кроме области, очень близкой к  $\phi = \pi/2$ , мы видим, что нет простого способа идентифицировать эффект ненулевых виртуальностей.

С теоретической точки зрения точный матричный элемент может нарушать известную  $\cos^2 \phi$ -зависимость сечения. Второй член нашего точного матричного элемента приводит к асимметрии около  $\pi/2$ :

$$\frac{d\sigma}{d\phi} \left( \frac{\pi}{2} - \phi_0 \right) < \frac{d\sigma}{d\phi} \left( \frac{\pi}{2} + \phi_0 \right) \quad (76)$$

для  $\phi_0 > 0$ . На Рис. 8 мы показываем отношение интерференционного члена к сумме двух неинтерференционных. Здесь эффект виртуальностей лишь порядка  $10^{-3}$ . Большой эффект получен при  $\phi \approx \pi/2$ . Изменение знака при  $\phi = \pi/2$  ясно видно.

## 8 Обсуждение полученных результатов

В данном разделе был проанализирован эффект ненулевых виртуальностей внешних глюонов на амплитуду рождения скалярного хиггсовского бозона. Вычислен точный матричный элемент при произвольных виртуальностях. Мы нашли новый вклад в амплитуду в сравнении с недавними расчетами в подходе с эффективным лагранжианом.

Прямое приложение нашего анализа – инклюзивное рождение хиггсовского бозона в протон-протонных взаимодействиях на ЛHC. Мы оценили, что относительное падение усредненного квадрата матричного элемента, вызванного заменой формфакторов при нулевых виртуальностях формфакторами при произвольных виртуальностях составляет менее 1% при значимых физических параметрах будущих экспериментов, так что такой эффект может быть проверен только в высокоточных экспериментах. Однако эффект учета ненулевых виртуальностей на угловое распределение при  $\phi \approx \pi/2$  является более значительным вследствие быстрого роста второго формфактора  $G_2$  как функции поперечных импульсов глюонов. Относительный рост квадрата матричного элемента при  $\phi = \pi/2$  достигает 45 % для  $|\mathbf{k}_{1,2\perp}| \sim 50 \text{ GeV}$ .

Наблюдаемый эффект был оценен в рамках подхода  $k_{\perp}$ -факторизации, сворачивая квадрат матричного элемента с непроинтегрированными глюонными распределениями. Найденный эффект, однако, очень мал и сконцентрирован около  $\phi = \pi/2$ . Его будет довольно трудно идентифицировать в будущих экспериментах с довольно низкой статистикой.

Мы обсуждали отклонения от  $\cos^2 \phi$ -зависимости сечения. Обнаружена малая асимметрия около  $\phi = \pi/2$  на уровне  $10^{-3}$ . Учитывая, что  $\phi$ -зависимость не является непосредственно измеряемой величиной, предсказанный эффект очень трудно идентифицировать экспериментально.

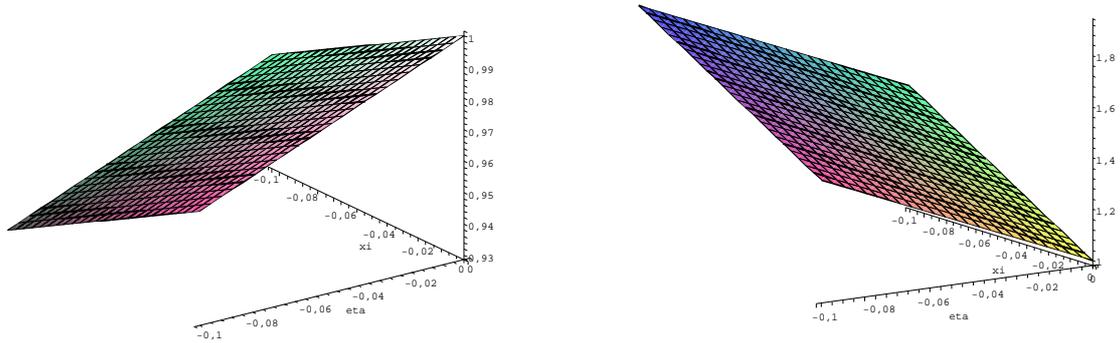


Рис. 5: Формфакторы  $G_1$  (слева) и  $G_2$  (справа), нормированные на их значения при нулевых виртуальностях, как функции  $\xi = -\mathbf{k}_{1\perp}^2/4m_{top}^2$  и  $\eta = -\mathbf{k}_{2\perp}^2/4m_{top}^2$ .

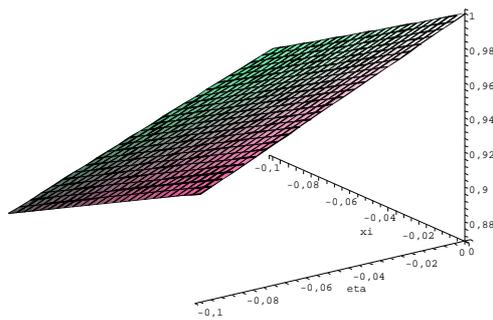


Рис. 6: Усредненный квадрат матричного элемента  $\langle M^2 \rangle_\phi$ , нормированный на его величину при нулевых виртуальностях  $\langle M_0^2 \rangle_\phi$ , как функция  $\xi = -\mathbf{k}_{1\perp}^2/4m_{top}^2$  и  $\eta = -\mathbf{k}_{2\perp}^2/4m_{top}^2$ .

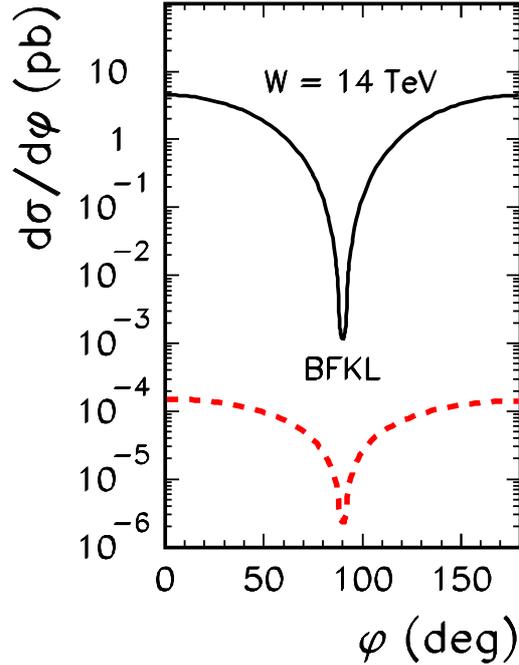


Рис. 7: Азимутальное угловое распределение сечения. В этом расчете использованы BFKL UGDF и  $-2 < y_H < 2$ . Сплошной линией представлен расчет с полной амплитудой, прерывистая линия – модуль интерференционного члена.

## Список литературы

- [1] T. V. Kukhto, E. A. Kuraev, Z. K. Silagadze and A. Schiller, Nucl. Phys. B **371**, 567 (1992).
- [2] S. Peris, M. Perrottet and E. de Rafael, Phys. Lett. B **355**, 523 (1995) [arXiv:hep-ph/9505405].
- [3] M. Knecht, S. Peris, M. Perrottet and E. De Rafael, JHEP **0211**, 003 (2002) [arXiv:hep-ph/0205102].
- [4] A. Czarnecki, B. Krause and W. J. Marciano, Phys. Rev. D **52**, R2619 (1995) [arXiv:hep-ph/9506256].
- [5] A. Czarnecki, W. J. Marciano and A. Vainshtein, Acta Phys. Polon. B **34**, 5669 (2003) [arXiv:hep-ph/0310276].
- [6] A. E. Dorokhov, Phys. Rev. D **70**, 094011 (2004) [arXiv:hep-ph/0405153].
- [7] L. Rosenberg, Phys. Rev. **129**, 2786 (1963).
- [8] S. L. Adler, Phys. Rev. **177**, 2426 (1969).

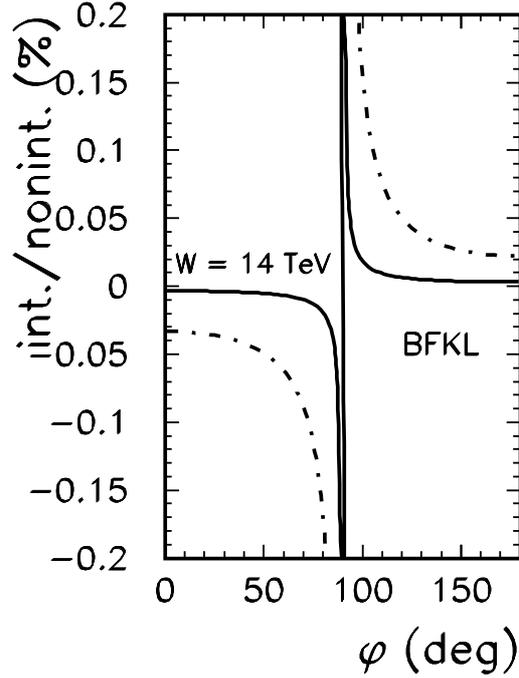


Рис. 8: Асимметричный вклад, нормированный на симметричные члены, как функция  $\phi$ . В расчете использованы BFKL UGDF и  $-2 < y_H < 2$ . Сплошная кривая соответствует инклюзивному случаю, штрихпунктирная линия – для дополнительной области  $|\mathbf{p}_\perp| > 50$  GeV.

- [9] J. S. Bell and R. Jackiw, *Nuovo Cim. A* **60**, 47 (1969).
- [10] A. Vainshtein, *Phys. Lett. B* **569**, 187 (2003) [arXiv:hep-ph/0212231].
- [11] S. L. Adler and W. A. Bardeen, *Phys. Rev.* **182**, 1517 (1969); S. L. Adler, arXiv:hep-th/0405040.
- [12] A. A. Anselm and A. A. Johansen, *JETP Lett.* **49**, 214 (1989).
- [13] A. V. Efremov and O. V. Teryaev, *Sov. J. Nucl. Phys.* **51**, 943 (1990).
- [14] A. Czarnecki, W. J. Marciano and A. Vainshtein, *Phys. Rev. D* **67**, 073006 (2003) [arXiv:hep-ph/0212229].
- [15] M. Knecht, S. Peris, M. Perrottet and E. de Rafael, *JHEP* **0403**, 035 (2004) [arXiv:hep-ph/0311100].
- [16] A. D. Dolgov and V. I. Zakharov, *Nucl. Phys. B* **27**, 525 (1971); V. I. Zakharov, *Phys. Rev. D* **42**, 1208 (1990).
- [17] J. Hořejší and O. Teryaev, *Z. Phys. C* **65**, 691 (1995).
- [18] A. E. Dorokhov, *JETP Lett.* **82**, 1 (2005) [arXiv:hep-ph/0505196]; *Eur. Phys. J. C* **42**, 309 (2005) [arXiv:hep-ph/0505007]; *Acta Phys. Polon.* **B 36** (2005) [arXiv:hep-ph/0510297].

- [19] O. V. Teryaev, Phys. Part. Nucl. **35**, S24 (2004).
- [20] F. Jegerlehner and O. V. Tarasov, arXiv:hep-ph/0510308.
- [21] H. M. Georgi, S. L. Glashow, M. E. Machacek and D. V. Nanopoulos, *ibid.* Phys. Rev. Lett. **40**, 692 (1978);
- [22] P. Nason, S. Dawson and R. K. Ellis, Nucl. Phys. **B 303**, 607 (1988);  
G. Altarelli et al. Nucl. Phys. **B 308**, 724 (1988);  
W. Beenakken, H. Kuijf, W. L. Van Neerven and J. Smith, Phys. Rev. **D 40**, 54 (1989).
- [23] J. C. Collins, D. E. Soper and G. Sterman, Adv. Ser. Direct. High Energy Phys. **5**, 1 (1988) [arXiv:hep-ph/0409313].
- [24] S. Catani, M. Ciafaloni and F. Hautmann, Phys. Lett. **B 242**, 97 (1990); Nucl. Phys. **B 366**, 135 (1991);  
J. C. Collins and R. K. Ellis, Nucl. Phys. **B 360**, 3 (1991).
- [25] L. V. Gribov, E. M. Levin and M. G. Ryskin, Phys. Rept. **100**, 1 (1983);  
E. M. Levin, M. G. Ryskin, Y. M. Shabelski and A. G. Shuvaev, Sov. J. Nucl. Phys. **53**, 657 (1991) [Yad. Fiz. **53**, 1059 (1991)].
- [26] P. Hagler, R. Kirschner, A. Schafer, L. Szymanowski and O. V. Teryaev, Phys. Rev. **D 63**, 077501 (2001) [arXiv:hep-ph/0008316].
- [27] P. Hagler, R. Kirschner, A. Schafer, L. Szymanowski and O. V. Teryaev, Phys. Rev. Lett. **86**, 1446 (2001) [arXiv:hep-ph/0004263].
- [28] C. B. Mariotto, M. B. Gay Ducati and M. V. T. Machado, Phys. Rev. **D 66**, 114013 (2002) [arXiv:hep-ph/0208155].
- [29] M. Luszczak and A. Szczurek, Phys. Lett. **B 594**, 291 (2004).
- [30] M. Luszczak and A. Szczurek, arXiv:hep-ph/0512120, in print in Phys. Rev. **D**.
- [31] A. V. Lipatov and N. P. Zotov, Eur. Phys. J. **C 44**, 559 (2005) [arXiv:hep-ph/0501172];  
A. V. Lipatov and N. P. Zotov, arXiv:hep-ph/0510043.
- [32] M. Luszczak and A. Szczurek, arXiv:hep-ph/0504119, in print in Eur. Phys. Jour. **C**.
- [33] M. Nagashima and H. Li, Phys. Rev. **D 67**, 034001 (2003) [arXiv:hep-ph/0210173].
- [34] F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **39**, 1304 (1974);  
J. R. Ellis, M. K. Gaillard, D. V. Nanopoulos and C. T. Sachrajda, Phys. Lett. **B83**, 339 (1979);  
T. G. Rizzo, Phys. Rev. **D 22**, 178 (1980) [Addendum-*ibid.* **D 22**, 1824 (1980)];  
D. Graudenz, M. Spira and P. M. Zerwas, Phys. Rev. Lett. **70**, 1372 (1993);  
M. Spira, A. Djouadi, D. Graudenz and P. M. Zerwas, Nucl. Phys. **B 453**, 17 (1995) [arXiv:hep-ph/9504378].

- [35] O. L. Veretin and O. V. Teryaev, Phys. Atom. Nucl. **58**, 2150 (1995) [Yad. Fiz. **58**, 2266 (1995)].
- [36] K. Melnikov, arXiv:hep-ph/0604205.