Численное вычисление многопетлевых интегралов с применением преобразования Меллина-Барнса

Пикельнер Андрей

Московский Государственный Университет
Физический Факультет

20 декабря 2011 г.

1. Введение

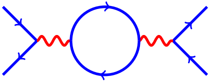
2. Пакет RoMB

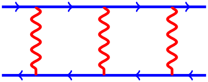
3. Заключение

Примеры петлевых вычислений

Поправки

- NLO
- NNLO





Ренормгрупповой анализ

- SUSY
- ГНР

Нет древесного процесса

- $\gamma\gamma \to \gamma\gamma$
- $gg \to H$

Примеры петлевых вычислений

Поправки

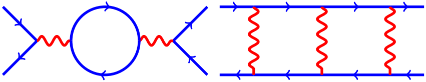
- NLO
- NNLO

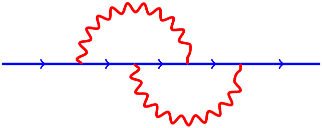
Ренормгрупповой анализ

- SUSY
- ГНР

Нет древесного процесса

- $\gamma\gamma \to \gamma\gamma$
- $gg \to H$

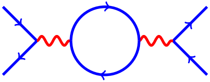


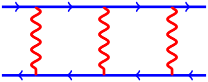


Примеры петлевых вычислений

Поправки

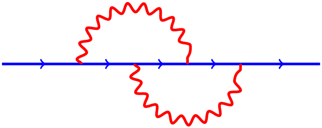
- NLO
- NNLO





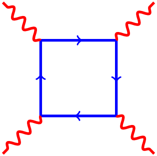
Ренормгрупповой анализ

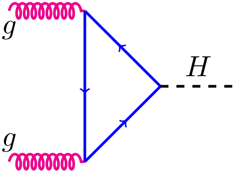
- SUSY
- ГНР



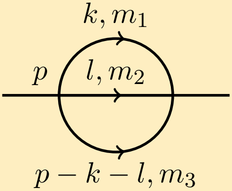
Нет древесного процесса

- $\gamma\gamma \to \gamma\gamma$
- $gg \to H$





Петлевые интегралы



$$= \int \frac{d^D k\, d^D l}{(k^2 - m_1^2)(l^2 - m_2^2)((p-k-l)^2 - m_3^2)}$$

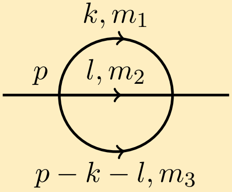
- Интегралы расходятся

$$\lim_{\substack{k\to\infty, l\to\infty \\ D\to 4}} I \sim \int \frac{d^4 k\, d^4 l}{k^4 l^2}$$

- Рост числа диаграмм, необходима автоматизация
- Размерная регуляризация,расходимости - полюса по ϵ

$$D = 4 - 2\,\epsilon$$

Петлевые интегралы



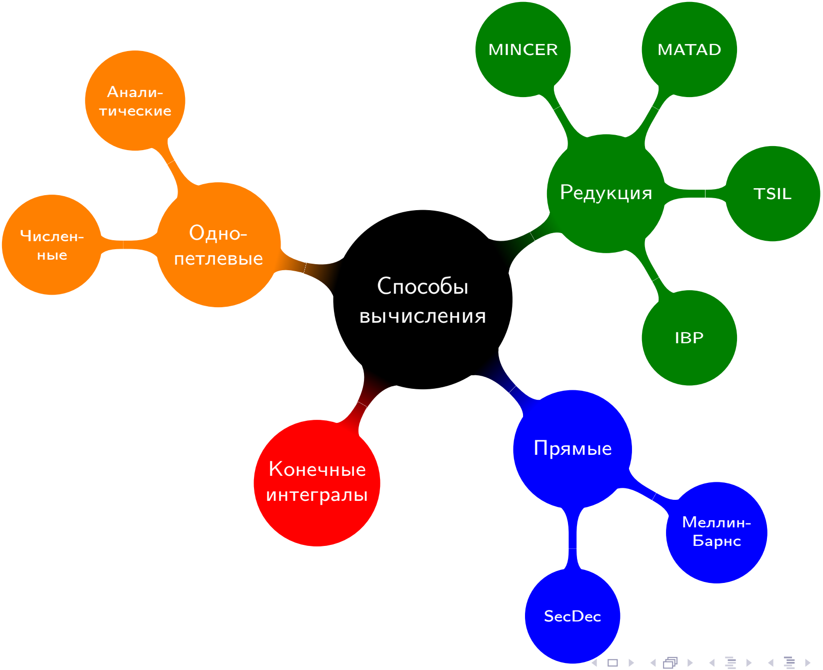
$$= \int \frac{d^D k \, d^D l}{(k^2 - m_1^2)(l^2 - m_2^2)((p-k-l)^2 - m_3^2)}$$

- Интегралы расходятся

$$\lim_{\substack{k\to\infty, l\to\infty \\ D\to 4}} I \sim \int \frac{d^4 k \, d^4 l}{k^4 l^2}$$

- Рост числа диаграмм, необходима автоматизация
- Размерная регуляризация,расходимости - полюса по ϵ

$$D = 4 - 2\,\epsilon$$


Способы вычисления
Одно-петлевые
Анали-тические
Числен-ные
Редукция
MINCER
MATAD
TSIL
IBP
Прямые
Меллин-Барнс
SecDec
Конечные интегралы

Постановка задачи

Создание пакета:

1. Численного вычисления интегралов
2. Не требующего участия пользователя
3. Не зависящего от коммерческого ПО
4. Легко встраиваемого в другие программы

Способного вычислять интегралы:

1. С различным числом петель
2. Несколькими масштабами масс
3. Произвольным числом внешних линий

Вычисляемый скалярный интеграл в размерной регуляризации:

$$I = \int \prod_{r=1}^{L} d^D {\color{red}k_r} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{{\color{blue}P_j^{\nu_j}}}$$

Фейнмановская параметризация:

$$I = \frac{\Gamma(\nu - LD/2)}{\prod_{j=1}^{n} \Gamma(\nu_j)} \int d^n x \cdot \delta\left(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) \frac{\mathcal{U}^{\nu-(L+1)D/2}}{\mathcal{F}^{\nu-LD/2}}$$

Расходимости - нули $\mathcal{F}$-полинома.

Преобразование Меллина-Барнса

$$
\frac{1}{(A_1 + A_2 + \ldots A_m)^\alpha} =
$$
$$
\frac{1}{(2\pi i)^{m-1}} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} d\omega_1 \ldots d\omega_{m-1} A_1^{\omega_1} \ldots A_{m-1}^{\omega_{m-1}} A_m^{-\alpha-\omega_1-\ldots-\omega_{m-1}}
$$
$$
\times \frac{\Gamma(-\omega_1)\ldots\Gamma(-\omega_{m-1})\Gamma(\alpha+\omega_1+\ldots\omega_{m-1})}{\Gamma(\alpha)}
$$

- Переводит сумму из знаменателя в произведение
- Изменение порядка интегрирования и преобразование возможны при
$$
\Gamma(F_i) : \Re(F_i) > 0
$$
- Интегрирование по фейнмановским параметрам

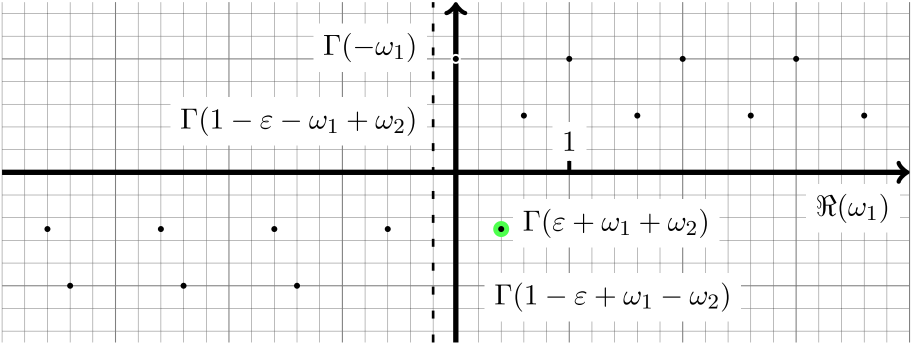
Выбор контуров

1. Контура интегрирования параллельны мнимой оси
2. Ищутся из условия $\Gamma(F_i) : \Re(F_i) > 0$
3. Аналогично условию разделения серий полюсов

Пример системы для поиска контуров

$$
\begin{aligned}
\omega_1 &< 0 & \omega_1 &= -0.45 \\
\omega_2 &< 0 & & \\
\epsilon + \omega_1 + \omega_2 &> 0 & \omega_2 &= -0.08 \\
1 - \epsilon + \omega_1 - \omega_2 &> 0 & & \\
1 - \epsilon - \omega_1 + \omega_2 &> 0 & \epsilon &= 0.68
\end{aligned}
\tag{1}
$$

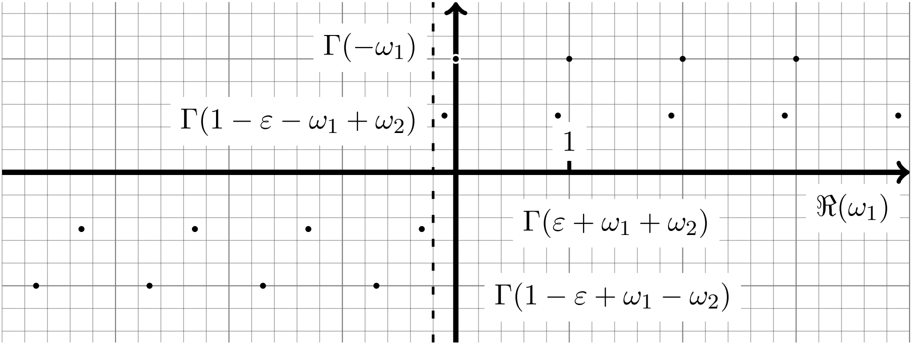
Серии полюсов



$$\omega_2 = -0.4, \varepsilon = 0$$

Серии полюсов не разделены

Серии полюсов



$$\omega_2 = -0.4, \varepsilon = 0.7$$

Необходимо аналитическое продолжение

Вычисление контурных интегралов

1. $\varepsilon \neq 0$, аналитическое продолжение к $\varepsilon = 0$
2. Движение контуров, взятие вычетов
3. Объединение интегралов с одинаковыми контурами
4. Сдвиг контуров не пересекая полюсов, для минимизации подынтегрального выражения.
5. Разложение вблизи $\varepsilon = 0$
6. Численное интегрирование

Теорема Коши

$$I(\epsilon_1, w) = 2\pi i \sum_{all\, poles\, in\, contour} Res\,[I(\epsilon_1, w)] = I(\epsilon_2, w) - 2\pi i \cdot Res'$$

Заключение

- Создан программный пакет для численного вычисления многопетлевых скалярных интегралов
- Написан на C++ с использованием библиотеки для аналитических вычислений GiNaC
- Вычислено множество диаграмм с различным числом петель, внешних линий и масштабов масс
- Впервые вычислены некоторые пятипетлевые массивные вакуумные интегралы, которые могут найти применение в вычислениях ренормгрупповых величин в N=4 SYM
- Пакет доступен по адресу `https://github.com/apik/RoMB`

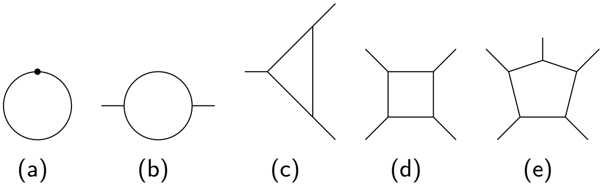


Рис.: Однопетлевые диаграммы реализованные в пакете PJfry

$$I[1(\mathrm{b})] \quad (1,1,-1) = \\ \textbf{RoMB:} \quad -0.15205(4) + \varepsilon^{-1} \\ \textbf{PJFry:} \quad -0.152045 + \varepsilon^{-1} \tag{2}$$

$$I[1(\mathrm{b})] \quad (2,3,-6) = \\ \textbf{RoMB:} \quad -1.23941(3) + \varepsilon^{-1} \\ \textbf{PJFry:} \quad -1.2394 + \varepsilon^{-1} \tag{3}$$

$$I[\mathsf{1(d)}] \quad (m_i^2 = 0, p_i^2 = 0, s = -5, t = -1) =$$

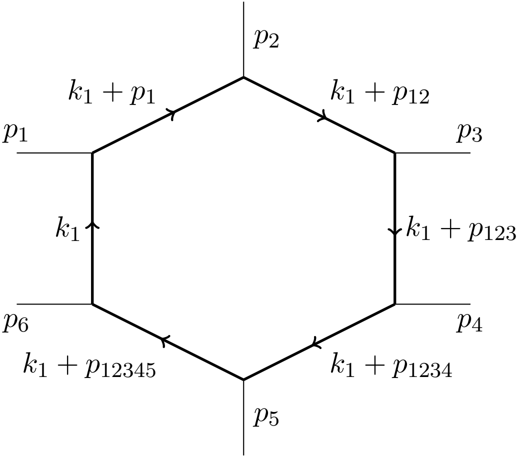
$$\textbf{RoMB:} \quad \frac{4}{5}\varepsilon^{-2} - \frac{2}{5}\log(5)\varepsilon^{-1} - \frac{\pi^2}{3}\varepsilon^0$$

$$\textbf{PJFry:} \quad 0.8\varepsilon^{-2} - 0.643775\varepsilon^{-1} - 3.28987\varepsilon^0$$

$$\begin{aligned} I[\mathsf{1(d)}] \quad & (m_i^2 = 1, p_i^2 = 0, s = -3, t = -1) = \\ & \textbf{RoMB:} \quad 0.11892(1) \\ & \textbf{PJFry:} \quad 0.118926 \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} I[\mathsf{1(e)}] \quad & (m_i^2 = 0, p_i^2 = 0, -2, -3, -4, -5, -6) = \\ \textbf{RoMB:} \quad & -0.23411263(2) - 0.08564212\,\varepsilon^{-1} + \frac{1}{9}\,\varepsilon^{-2} \\ \textbf{PJFry:} \quad & -0.234113 - 0.0856421\,\varepsilon^{-1} + 0.111111\,\varepsilon^{-2} \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} I[\mathsf{1(e)}] \quad & (m_i^2 = 1, p_i^2 = 0, -2, -3, -4, -5, -6) = \\ & \textbf{RoMB:} \quad 0.0198(2) \\ & \textbf{PJFry:} \quad 0.0199751 \end{aligned} \tag{6}$$



$$
\begin{aligned}
I[15] \quad & (-1,-2,-3,-4,-5,-6,-7,-8,-9) = \\
\textbf{RoMB:} \quad & \frac{43}{1008}\,\varepsilon^{-2} + 0.0321771(2)\,\varepsilon^{-1} + 0.000198(9) \qquad (7)\\
\textbf{AMBRE:} \quad & 0.0426587\,\varepsilon^{-2} + 0.0321771\,\varepsilon^{-1} + 0.000196672
\end{aligned}
$$

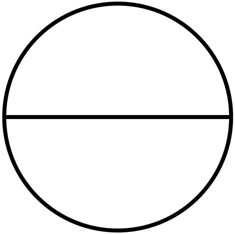
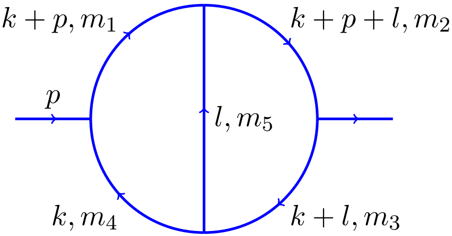


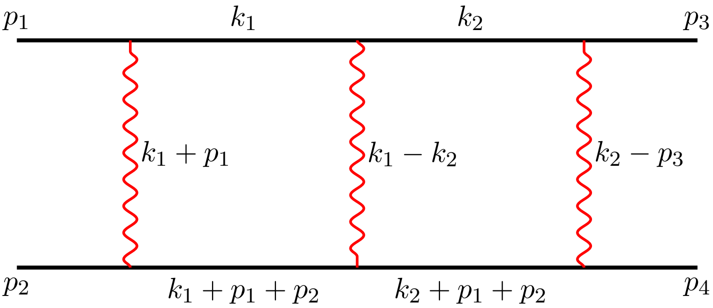
Рис.: Двух-петлевая массивная вакуумная диаграмма

$$
\begin{aligned}
I[2] \quad & (1,1,1) = \\
& \textbf{RoMB:} \quad -\frac{3}{2}\,\varepsilon^{-2} - \frac{9}{2}\,\varepsilon^{-1} - 6.98413(6) \\
& \textbf{[?]eq.197:} \quad -1.5\,\varepsilon^{-2} - 4.5\,\varepsilon^{-1} - 6.984139141966
\end{aligned}
\tag{8}
$$



$$
\begin{aligned}
I[17] \quad & (m_i^2 = 0, -1) = \\
& \textbf{RoMB:} \quad 7.2121(7) + 24.165(2)\,\varepsilon \\
& \textbf{MINCER:} \quad 7.21234 + 24.1656\,\varepsilon \\
& \textbf{TSIL:} \quad 7.212341418957565\mathrm{9}
\end{aligned}
\tag{9}
$$

$$
\begin{aligned}
I[17] \quad & (1,0,1,0,1,-1) = \\
& \textbf{RoMB:} \quad 1.329(7) \\
& \textbf{TSIL:} \quad 1.3317114414375444
\end{aligned}
\tag{10}
$$



$I[18] \quad (m_i^2 = p_i^2 = 1, s = -2, t = -3) =$

RoMB: $0.096354(9)\,\varepsilon^{-2} - 0.10639(6)\,\varepsilon^{-1} - 1.130(2)$ (11)

AMBRE: $0.09635(1)\,\varepsilon^{-2} - 0.10646(3)\,\varepsilon^{-1}$

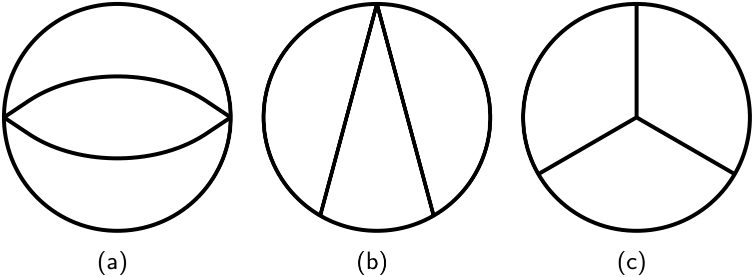


Рис.: Трех-петлевые массивные вакуумные диаграммы

$$I[3(\mathrm{a})] =$$

RoMB: $2\,\varepsilon^{-3} + \frac{23}{3}\,\varepsilon^{-2} + \frac{35}{2}\,\varepsilon^{-1} + 22.9167(2))$ (12)

[?]eq.198: $2\,\varepsilon^{-3} + 7.6666\,\varepsilon^{-2} + 17.5\,\varepsilon^{-1} + 22.916666$

$$
\begin{aligned}
I[\text{3(b)}] \quad = & \\
& \textbf{RoMB:} \quad -\varepsilon^{-3} - 5.66666(7)\,\varepsilon^{-2} - 15.297(4)\,\varepsilon^{-1} - 46.06(1) \qquad (13)\\
& \textbf{[?]eq.199:} \quad -\varepsilon^{-3} - 5.666666\,\varepsilon^{-2} - 15.3016\,\varepsilon^{-1} - 46.075
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I[\text{3(c)}] \quad = & \\
& \textbf{RoMB:} \quad 2.397(9)\,\varepsilon^{-1} - 10.2(8) \qquad (14)\\
& \textbf{[?]eq.200:} \quad 2.40411\,\varepsilon^{-1} - 10.03527
\end{aligned}
$$

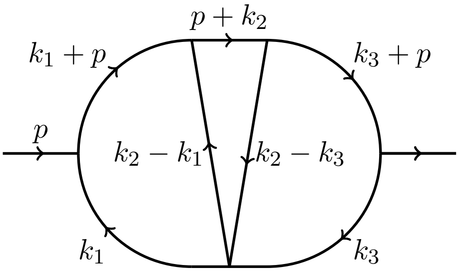
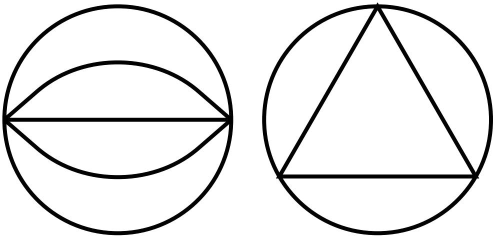


Рис.: Диаграмма FA пакета `MINCER`

$$
\begin{aligned}
I[4] \quad & (m_i^2 = 0, p^2 = -1) = \\
& \textbf{RoMB:} \quad -20.69(9) \\
& \textbf{MINCER:} \quad -20.7386
\end{aligned}
\tag{15}
$$



(a) (b)

Рис.: Четырех-петлевые массивные вакуумные диаграммы

$$
\begin{aligned}
I[5(\mathrm{a})] \quad = \quad & \\
& \textbf{RoMB:} \quad -\frac{5}{2}\,\varepsilon^{-4} - \frac{35}{3}\,\varepsilon^{-3} - \frac{4565}{144}\,\varepsilon^{-2} \\
& \quad -67.52893(3)\,\varepsilon^{-1} - 140.22(1) \qquad (16) \\
& \textbf{[?]eq.1:} \quad -2.5\,\varepsilon^{-4} - 11.6666\,\varepsilon^{-3} - 31.70138\,\varepsilon^{-2} \\
& \quad -67.5289351\,\varepsilon^{-1} - 140.220543
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I[5(\mathrm{b})] \quad = \quad & \\
& \textbf{RoMB:} \quad 1.5\,\varepsilon^{-4} + 9.5\,\varepsilon^{-3} + 33.5\,\varepsilon^{-2} \\
& \quad +59.8938(3)\,\varepsilon^{-1} - 6.7709(8) \\
& \textbf{[?]eq.4:} \quad 1.5\,\varepsilon^{-4} + 9.5\,\varepsilon^{-3} + 33.5\,\varepsilon^{-2} \\
& \quad +59.8938292905\,\varepsilon^{-1} - 6.7709349452
\end{aligned} \tag{17}
$$

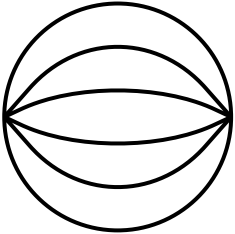


Рис.: Пяти-петлевая массивная вакуумная диаграмма

$$
\begin{aligned}
I[6] \quad = \quad & \\
& \textbf{RoMB:} \quad 3\,\varepsilon^{-5} + \frac{33}{2}\,\varepsilon^{-4} + \frac{1247}{24}\,\varepsilon^{-3} + 125.67152(5)\,\varepsilon^{-2} \\
& \quad + 259.98755(1)\,\varepsilon^{-1} - 347.36(4) \qquad (18) \\
& \textbf{[?]eq.41:} \quad 3\,\varepsilon^{-5} + 16.5\,\varepsilon^{-4} + 51.95833\,\varepsilon^{-3} + 125.6715\,\varepsilon^{-2} \\
& \quad + 259.9876\,\varepsilon^{-1} - 347.3551
\end{aligned}
$$

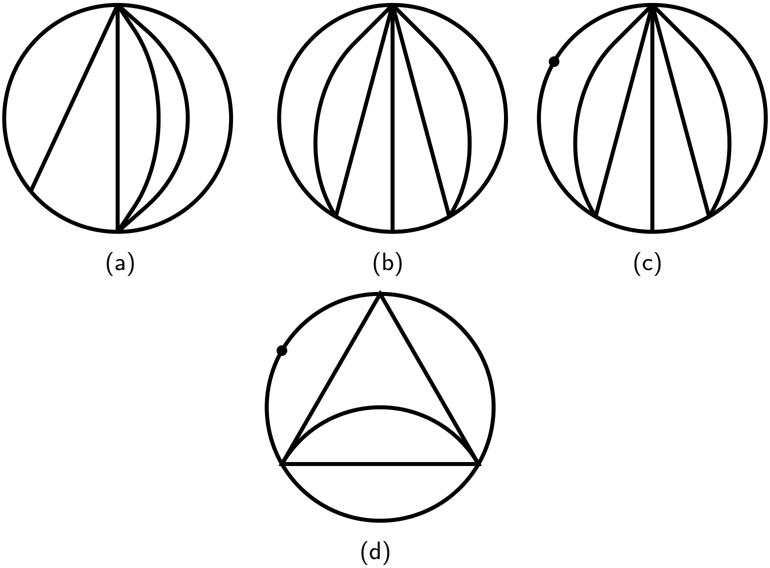


Рис.: Пяти-петлевые массивные вакуумные диаграммы со вставкой вершин

$$
\begin{aligned}
I[7(\mathrm{b})] &= -\frac{12}{5}\,\varepsilon^{-5} - \frac{337}{20}\,\varepsilon^{-4} - \frac{2593}{40}\,\varepsilon^{-3} - 155.9751(4)\,\varepsilon^{-2} \\
&\quad -1374.863(1)\,\varepsilon^{-1} - 4922.0(7) \\
I[7(\mathrm{c})] &= \frac{5}{4}\,\varepsilon^{-5} + \frac{389}{60}\,\varepsilon^{-4} + \frac{743}{40}\,\varepsilon^{-3} + 53.7541(1)\,\varepsilon^{-2} \\
&\quad +91.4489(3)\,\varepsilon^{-1} + 86872.2(1) \\
I[7(\mathrm{d})] &= \frac{9}{10}\,\varepsilon^{-5} + 4.7894444442\,\varepsilon^{-4} + 10.82314816\,\varepsilon^{-3} + 24.4364(3) \\
&\quad -3.51(2)\,\varepsilon^{-1}
\end{aligned}
$$

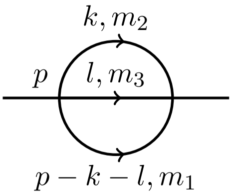
$$P_1 = k^2 - m_1^2,\ P_2 = (p+k)^2 - m_2^2,\ L = 1,\ \nu = 2$$

$$I = \int dk \frac{1}{P_1 P_2} = \Gamma(\epsilon) \int dx_1 dx_2 \cdot \delta(1 - x_1 - x_2) \cdot \frac{\mathcal{U}^{2\epsilon-2}}{\mathcal{F}^{\epsilon}}$$

$$M = -(x_1 + x_2),\ Q = x_2 p,\ J = x_1 m_1^2 + x_2 m_2^2 - x_2 p^2$$

$$\mathcal{U} = -(x_1 + x_2), \quad \mathcal{F} = x_1^2 \cdot m_1^2 + x_2^2 \cdot m_2^2 + x_1 x_2 \cdot (m_1^2 + m_2^2 - p^2)$$

Loop-by-loop approach



$$I = \int \frac{dl}{l^2 - m_3^2} \int \frac{dk}{\left[(p-k-l)^2 - m_1^2\right]\left[k^2 - m_2^2\right]}$$

$$\mathcal{F}_k = x_0 x_1 \left(-p^2 + m_2^2 - l^2 + m_1^2 + 2 \cdot (l \cdot p)\right) + m_2^2 x_0^2 + m_1^2 x_1^2$$

$$I = \int d\omega_1 d\omega_2 \cdot f(\omega_1, \omega_2) \int \frac{dl}{\left[l^2 - m_3^2\right]\left[(p-l)^2 - m_1^2 - m_2^2\right]^{\epsilon + \omega_1 + \omega_2}}$$