

# Проблема вычисления времени жизни нестабильных состояний в квантовой теории

Гоноченко Богдан Евгеньевич

Научный руководитель:  
Теряев Олег Валерианович

Консультант:  
Бедняков Александр Вадимович

# 1. Введение

В квантовом мире существует такое явление как туннелирование. Так называют перемещение квантовой частицы, которое было бы невозможно в рамках классической механики. Нестабильные состояния могут распадаться за счет туннелирования. Вакуум в квантовой теории поля это наинизшее состояние, соответствующее глобальному минимуму потенциала. Такой вакуум называют истинным. Также существуют ложные вакуумы - состояния, соответствующие локальным минимумам. Ложные вакуумы, в отличие от истинного вакуума, неустойчивы. Спустя некоторое время ложный вакуум распадается, превращаясь в истинный, а его избыточная энергия высвобождается в виде элементарных частиц.

## 2. Актуальность проблемы

Изучение распада нестабильных состояний является важным, так как нестабильное состояние, которое туннелирует через некоторый потенциальный барьер, является моделью для многих физических явлений. В частности, для распада ложного вакуума. Вычисление времени жизни состояния ложного вакуума в локальном минимуме некоторого потенциала полезно для изучения ранней Вселенной.

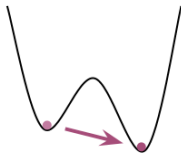
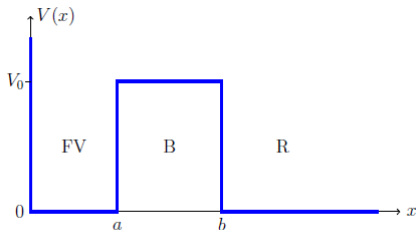


Рис.: Туннелирование

### 3. Постановка задачи

Рассмотрим модельную кванто-механическую задачу распада нестабильного состояния  $|\psi\rangle$  за счет туннелирования



Вероятность того, что мы найдём наше состояние в области FV с течением времени:

$$P_{FV}(t) = \int_{FV} dx |\psi(x, t)|^2 = \int_0^a dx |\psi(x, t)|^2$$

$$\Gamma = - \frac{d \ln(P_{FV}(T))}{dT}$$



## 4. Решение

В начальный момент  $t = 0$  мы имели начальное состояние  $|\psi\rangle$ , локализованное в области FV. В последующее время имеем  $|\psi(t)\rangle = e^{-iHt} |\psi\rangle$

Записав наше состояние в координатном представлении  $\psi(x, t) = \langle x|\psi(t)\rangle$  и разложив по собственным функциям энергии  $E \equiv \frac{p^2}{2m}$ , получим:

$$\psi(x, t) = \int_0^\infty \frac{dp}{2\pi} \int_0^\infty dy \psi(y) \phi_p^*(y) \phi_p(x) \exp\left(-\frac{ip^2 t}{2m}\right)$$

Собственные функции энергии есть:

$$\phi_p(x) = \begin{cases} \phi_p^{FV}(x) = \frac{2}{N_p} \sin(px), 0 < x < a, \\ \phi_p^B(x) = \frac{1}{N_p} \left( A_p e^{\kappa(x-a)} + B_p e^{-\kappa(x-a)} \right), a < x < b, \\ \phi_p^R(x) = \frac{1}{N_p} \left( C_p e^{ip(x-b)} + D_p e^{-ip(x-b)} \right), b < x. \end{cases}$$

Где  $\kappa = \sqrt{2mV_0 - p^2}$

$$A_p = \sin(pa) + \frac{p}{\kappa} \cos(pa)$$

$$B_p = \sin(pa) - \frac{p}{\kappa} \cos(pa)$$

$$C_p = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{i\kappa}{p} \right) A_p e^{W_p} + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{i\kappa}{p} \right) B_p e^{-W_p}$$

$$D_p = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{i\kappa}{p} \right) A_p e^{W_p} + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{i\kappa}{p} \right) B_p e^{-W_p}$$

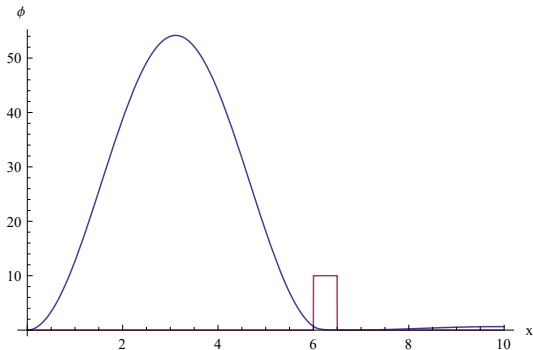
Где  $W_p = (b - a)\kappa$ . Из условия нормировки:

$$\int_0^\infty dx \phi_p(x) \phi_{p'}^*(x) = \delta(p - p')$$

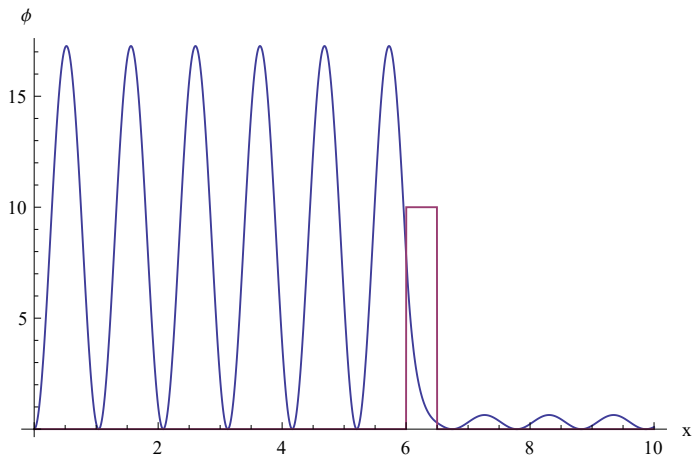
находим, что  $|N_p|^2 = 2\pi C_p D_p$

## 7.Решение

Оператор энергии в области нашей задачи имеет непрерывный спектр  $E \equiv \frac{p^2}{2m}$ . Среди этих энергий есть резонансные. Резонансные энергии  $E_i$  близки к энергиям связанного состояния в области FV. Связные состояния появились, если бы мы запретили туннелирование, то есть если бы  $b \rightarrow \infty$ . Таким образом, при резонансных энергиях собственные функции энергии локализованы в области FV.

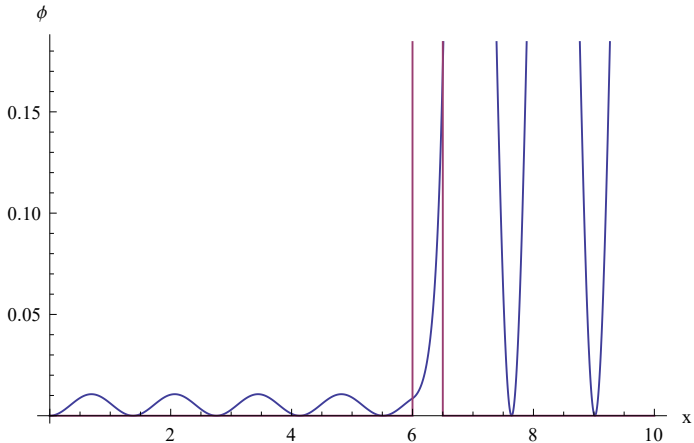


# 8.Решение

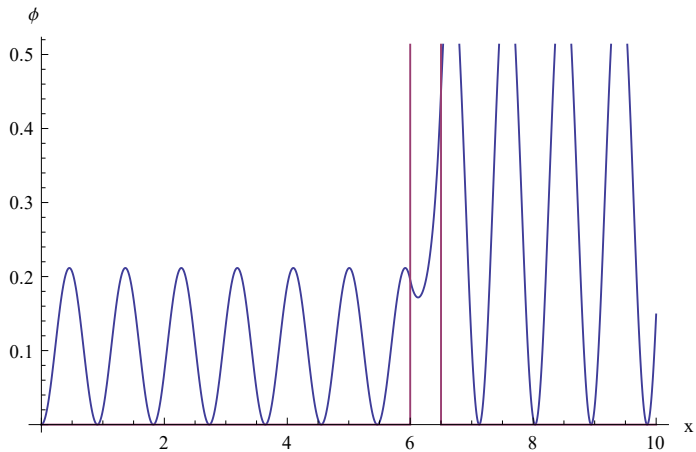


## 9.Решение

Пример собственных функций оператора полной энергии при нерезонансных энергиях.

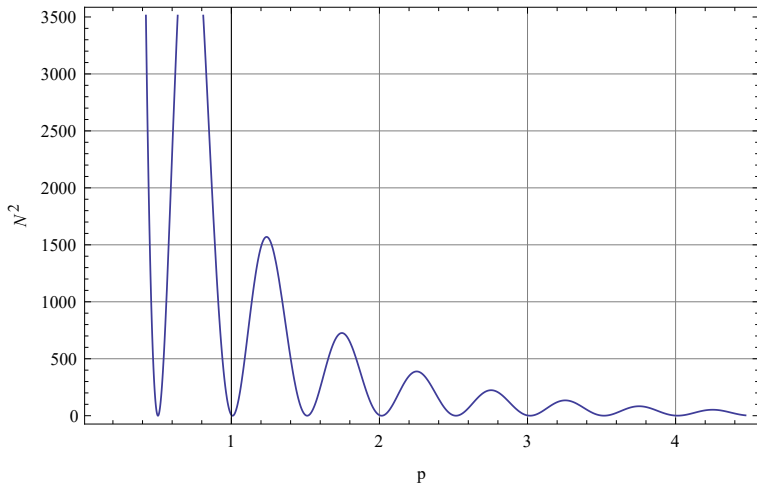


# 10.Решение



# 11.Решение

Резонансные энергии являются точками локальных минимумов для  $|N(E)|^2$





Чтобы подсчитать вероятность  $P_{FV}(t)$ , предположим для простоты, что начальная волновая функция  $\psi(x) \equiv \psi(x, t = 0)$  имеет значительное перекрытие с модами, чьи энергии близки к  $E_0$ , где  $E_0$  наименьшая реальная энергия, для которой  $|N(E)|^2$  имеет локальный минимум. Полезно рассмотреть комплексную энергию. Мы должны аналитически продолжить  $|N(E)|^2 = 2\pi C(E)D(E)$ . Первая пара нулей есть  $E = E_0 \pm \frac{i}{2}\Gamma_0$ . Нужно взять  $E = E_0 - \frac{i}{2}\Gamma_0$ .  $\Gamma_0 \ll E_0$ . Тогда получаем:

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \int_0^\infty \frac{dp}{2\pi} \int_0^\infty dy \psi(y) \phi_p^*(y) \phi_p(x) \exp\left(-\frac{ip^2 t}{2m}\right) = \\ &= \int_0^a dy \psi(y) (F(x, y, t) + G(x, y, t)) \end{aligned}$$

$$F(x, y, t) = \frac{i}{\pi} \sqrt{\frac{2m}{E_0}} \frac{\sin(xp_0) \sin(yp_0)}{C(E_0)D'(E_0)} e^{-iE_0 t} e^{-\frac{1}{2}\Gamma_0 t} \left( 1 + O\left(\frac{\Gamma_0}{E_0}\right) \right)$$

$$G(x, y, t) = -(i+1) \frac{(E_0 m)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi} |N(0)|^2} xy (E_0 t)^{-\frac{3}{2}} \left( 1 + O((E_0 t)^{-1}) \right)$$

Экспоненциальный распад наблюдается на временном масштабе  $T_{slush} \ll T \ll T_{NL}$ .  $T_{slush} \sim \frac{1}{E_0}$ ,  $T_{NL} \sim \frac{1}{\Gamma_0}$ .

Заметим, что  $F \sim \exp(-\frac{1}{2}\Gamma_0 t)$ , тем временем  $G \sim (E_0 t)^{-\frac{3}{2}}$ .

Поэтому если  $t$  не слишком большое  $t \leq \Gamma_0^{-1} \sim T_{NL}$ , то  $F \gg G$ . Тогда для данного временного режима получим:

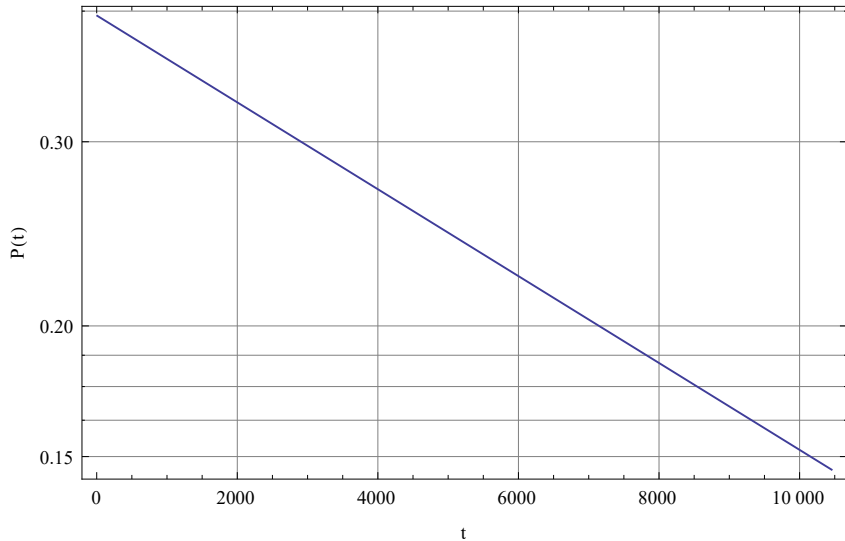
$$P_{FV}(t) \approx const \cdot \exp(-\Gamma_0 t)$$

Комплексные нули экспоненциально близки к резонансным энергиям. Эти резонансные энергии  $E_R = \frac{p_R^2}{2m}$  есть нули  $A(E)$ . Введем малый параметр, по которому мы произведем разложение  $D_p$ ,  $\delta \equiv e^{-W_p} = e^{-\kappa_R(b-a)}$ . Тогда несложно получить:

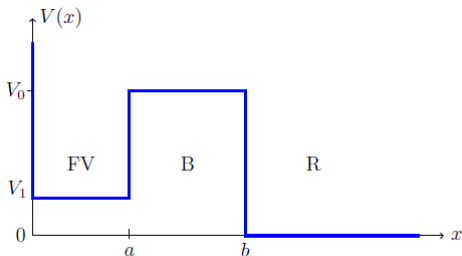
$$\Gamma = \frac{8p_R^3\kappa_R^3}{m(1 + a\kappa_R)(p_R^2 + \kappa_R^2)^2} e^{-2W_p}$$

Где  $\kappa_R = \sqrt{2mV_0 - p_R^2}$ . Теперь мы можем подсчитать вероятность обнаружить наше состояние локализованное в области FV. В качестве начального состояния возьмем затравочную функцию  $\psi(y) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin(\frac{\pi y}{a})$ .

# 15.Решение



## 16. Постановка задачи



Задача аналогичная, только немного изменятся собственные функции энергии, по которым мы раскладываем наше состояние.

Резонансные импульсы теперь ищутся как нули:

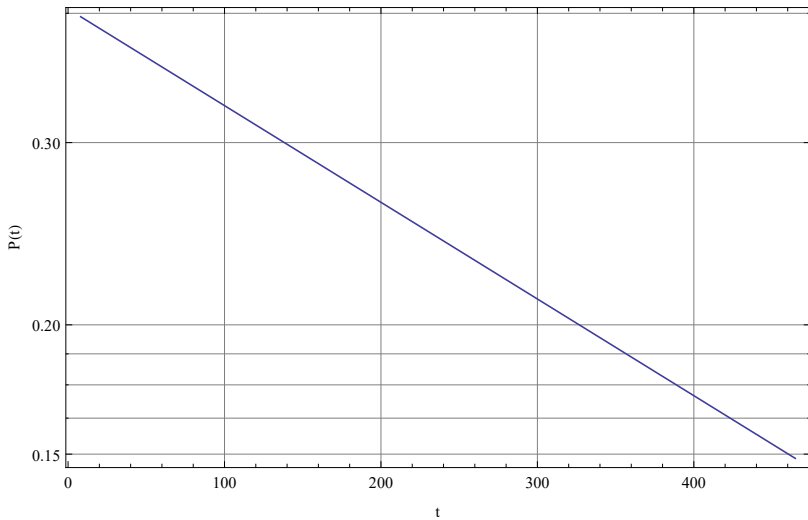
$$A_p = \sin(k_1 a) + \frac{k_1}{\kappa} \cos(k_1 a)$$

Где  $k_1^2 = 2m(E - V_1) = p^2 - 2mV_1$ ,  $V_1 > 0$ . Аналитическая формула для обратного времени жизни в этом случае:

$$\Gamma = \frac{8k_{1R}^2 p_R \kappa_R^3 e^{-2W_p}}{m(1 + a\kappa_R)(p_R^2 + \kappa_R^2)(k_{1R}^2 + \kappa_R^2)}$$

Где  $k_{1R}^2 = p_R^2 - 2mV_1$ .  $k_{1R} \rightarrow p_R$  при  $V_1 \rightarrow 0$ . Тогда получается исходная аналитическая формула для обратного времени жизни.

# 18.Решение



## 19. Векторы Гамова

Был изучен альтернативный подход вычисления времени жизни нестабильных состояний.

Рассмотрим трехмерный прямоугольный потенциал высотой  $V_0 > 0$ .

$$V(\vec{r}) = V(r) = \begin{cases} 0, & 0 < r < a, \\ V_0, & a < r < b, \\ 0, & b < r < \infty. \end{cases}$$

$$H|E, l, m\rangle = E|E, l, m\rangle$$

Любую волновую функцию можно разложить через собственные функции этой задачи:

$$\phi = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \int_0^{\infty} dE |E, l, m\rangle \langle E, l, m | \phi \rangle$$



$$\langle r, \theta, \Phi | H | E, l, m \rangle = E \langle r, \theta, \Phi | E, l, m \rangle$$

$$\left( -\frac{1}{2m} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{l(l+1)}{2mr^2} + V(r) \right) \langle r, \theta, \Phi | E, l, m \rangle = E \langle r, \theta, \Phi | E, l, m \rangle$$

$$\langle r, \theta, \Phi | E, l, m \rangle \equiv \langle r | E \rangle_l \langle \theta, \Phi | l, m \rangle \equiv \frac{1}{r} \chi_l(r; E) Y_{l,m}(\theta, \Phi)$$

Рассмотрим задачу с нулевым орбитальным моментом  $\chi_{l=0}(r; E) \equiv \chi(r; E)$ . Задача сведется к одномерной:

$$-\frac{1}{2m} \frac{d^2}{dr^2} \chi(r; E) + V(r) \chi(r; E) = E \chi(r; E)$$

## 21. Векторы Гамова

Её решение:

$$\chi(r; E) = \begin{cases} \alpha_1 e^{ikr} + \beta_1 e^{-ikr}, & 0 < r < a, \\ \alpha_2 e^{iqr} + \beta_2 e^{-iqr}, & a < r < b, \\ \alpha_3 e^{ikr} + \beta_3 e^{-ikr}, & b < r < \infty. \end{cases}$$

Естественные граничные условия:

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi(0; E) = 0, \\ \chi(a - 0; E) = \chi(a + 0; E), \\ \chi'(a - 0; E) = \chi'(a + 0; E), \\ \chi(b - 0; E) = \chi(b + 0; E), \\ \chi'(b - 0; E) = \chi'(b + 0; E), \\ |\chi(r; E)| < \infty. \end{array} \right.$$

$$\alpha_2(k) = \frac{e^{-iqa}}{2} \left( \sin(ka) + \frac{k}{iq} \cos(ka) \right) \alpha(k)$$

$$\beta_2(k) = \frac{e^{iqa}}{2} \left( \sin(ka) - \frac{k}{iq} \cos(ka) \right) \alpha(k)$$

$$\alpha_3(k) = \frac{e^{-ikb} \alpha(k)}{4} \left[ \left( 1 + \frac{q}{k} \right) e^{iq(b-a)} Q_1 + \left( 1 - \frac{q}{k} \right) e^{-iq(b-a)} Q_2 \right]$$

$$\beta_3(k) = \frac{e^{ikb} \alpha(k)}{4} \left[ \left( 1 - \frac{q}{k} \right) e^{iq(b-a)} Q_1 + \left( 1 + \frac{q}{k} \right) e^{-iq(b-a)} Q_2 \right]$$

$$\begin{cases} \alpha(k) = 2i\alpha_1, \\ Q_1 = \sin(ka) + \frac{k}{iq} \cos(ka), \\ Q_2 = \sin(ka) - \frac{k}{iq} \cos(ka). \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi(0; E_R) = 0, \\ \chi(a - 0; E_R) = \chi(a + 0; E_R), \\ \chi'(a - 0; E_R) = \chi'(a + 0; E_R), \\ \chi(b - 0; E_R) = \chi(b + 0; E_R), \\ \chi'(b - 0; E_R) = \chi'(b + 0; E_R), \\ \chi(r; E_R) \sim e^{ikr} \quad r \rightarrow \infty. \end{array} \right.$$

Эти условия могут быть записаны в терминах коэффициентов:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 e^{iqa} + \beta_2 e^{-iqa} = \alpha \sin(ka), \alpha = 2i\alpha_1, \\ iq(\alpha_2 e^{iqa} - \beta_2 e^{-iqa}) = \alpha k \cos(ka), \\ \alpha_3 e^{ikb} = \alpha_2 e^{iqb} + \beta_2 e^{-iqb}, \\ ik\alpha_3 e^{ikb} = iq(\alpha_2 e^{iqb} - \beta_2 e^{-iqb}). \end{array} \right.$$

## 24. Векторы Гамова

Решая эту систему, получим уравнение:

$$\left(1 - \frac{q}{k}\right) e^{iq(b-a)} Q_1 + \left(1 + \frac{q}{k}\right) e^{-iq(b-a)} Q_2 = 0$$

Которое согласуется с уравнением исходной задачи  $D_p = 0$ . Это уравнение имеет два корня  $E_R \pm \frac{i}{2}\Gamma_R$ . Собственный вектор, который согласуется с комплексным собственным значением  $E_R - \frac{i}{2}\Gamma_R$ , есть "распадающийся" вектор Гамова в координатном представлении:

$$\chi^{dec}(r; E_R) = \begin{cases} \sin(k_d r), & 0 < r < a, \\ \alpha_2(k_d) e^{iq_d r} + \beta_2(k_d) e^{-iq_d r}, & a < r < b, \\ \alpha_3(k_d) e^{ik_d r}, & b < r < \infty. \end{cases}$$

Где  $k_d = \sqrt{2m(E_R - \frac{i}{2}\Gamma_R)}$ ,  $q_d^2 = k_d^2 - 2mV_0$ .

## 25. S-матрица

Также была рассмотрена S-матрица для состояния с  $l = 0$ , которая для исходной задачи даётся выражением:

$$S(k) = -\frac{\alpha_3(k)}{\beta_3(k)}$$

Поэтому полюсам  $S(k)$  будут соответствовать нули  $\beta_3(k)$ .

$$\beta_3(k) = 0$$

$$\left(1 - \frac{q}{k}\right) e^{iq(b-a)} Q_1 + \left(1 + \frac{q}{k}\right) e^{-iq(b-a)} Q_2 = 0$$

Следовательно полюсами S-матрицы будут собственные значения вектора Гамова  $E_R \pm \frac{i}{2}\Gamma_R$ , что говорит нам, что подход S-матрицы является, как и подход Гамова, альтернативным способом решения нашей исходной задачи.

- Рассмотрена модельная кванто-механическая задача распада нестабильного состояния за счет туннелирования через барьер.
- Получено аналитическое выражение для обратного времени жизни. Произведено сравнение с результатом численного расчета. Сравнимые значения с хорошей точностью совпадают.
- Также были изучены другие методы решения подобной задачи. Это теория Гамова и  $S$ -матрица. Была продемонстрирована связь всех методов, их эквивалентность.

Спасибо за внимание!