

Измерение спектра мюонов космических лучей высоких энергий в эксперименте NOvA

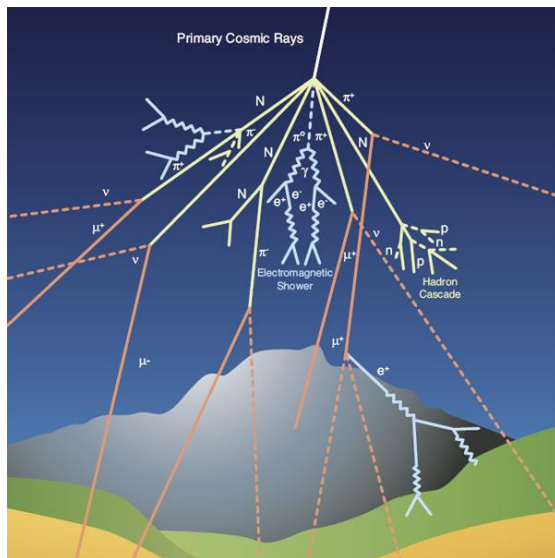
Выполнила студентка 209 группы Морозова Анна

Научный руководитель: доктор физ.-мат. наук, профессор
Ольшевский А.Г.

Научный консультант: кандидат физ.-мат. наук Самойлов О.Б.

Атмосферные мюоны

- Информация о спектре и составе КЛ
- Информация о деталях взаимодействия адронов
- Калибровка детекторов и нормировка спектров нейтрино



Источники атмосферных мюонов

Частица (f)	Мода распада	Относительная ширина распада, %	Время жизни, с	Критическая энергия $\varepsilon_f^{cr}(0^0) = m_f c^2 H_0 / c \tau_f$
μ_{e3}^{\pm}	$e^{\pm} + \nu_e(\bar{\nu}_e) + \bar{\nu}_{\mu}(\nu_{\mu})$	100	$2,19 \times 10^{-6}$	1,03 ГэВ
$K^{\pm} (K_{\mu 3}^{\pm})$	$\pi^0 + \mu^{\pm} + \nu_{\mu}(\bar{\nu}_{\mu})$	3.35	$1,24 \times 10^{-8}$	890 ГэВ
$K_L^0 (K_{L\mu 3}^0)$	$\pi^{\pm} + \mu^{\mp} + \bar{\nu}_{\mu}(\nu_{\mu})$	27	$5,12 \times 10^{-8}$	206 ГэВ
$K_S^0 (K_{Se 3}^0)$	$\pi^{\pm} + \mu^{\mp} + \bar{\nu}_{\mu}(\nu_{\mu})$	0,04	$0,90 \times 10^{-10}$	120 ТэВ
$K_{\mu 2}^{\pm}$	$\mu^{\pm} + \bar{\nu}_{\mu}(\nu_{\mu})$	63.55	$1,24 \times 10^{-8}$	890 ГэВ
π^{\pm}	$\mu^{\pm} + \nu_{\mu}(\bar{\nu}_{\mu})$	100	$2,6 \times 10^{-8}$	115 ГэВ

Постановка задачи

- Существует возможность измерения спектров мюонов высоких энергий (более 1 ТэВ), используя дальний детектора NOvA как параметр, позволяющий измерять энергию мюонов по частоте и мощности каскадных ливней, образуемых в основном за счет прямого рождения e^+e^- -пар при прохождении мюона через толстый слой вещества. Для проверки возможности изучения спектроскопии мюонов высоких энергий методом параметра была поставлена задача моделирования отклика детектора экспериментальной установки NOvA на прохождение атмосферных мюонов.
- Метод параметра может эффективно использоваться для измерения энергетических спектров мюонов в атмосфере с энергией выше 1 ТэВ при различных зенитных углах; для изучения характеристик групп мюонов в составе ШАЛ
- Важным элементом задачи является расчет энергетических спектров и зенитно-угловых распределений атмосферных мюонов в широком интервале энергий с использованием современных моделей адрон-ядерных взаимодействий и новейших измерений спектра космических лучей; такой расчет может служить основой теста результатов моделирования мюонных событий в детекторе.

1. Расчет спектра атмосферных мюонов

Расчеты выполнены в рамках метода $Z(E,h)$ функции

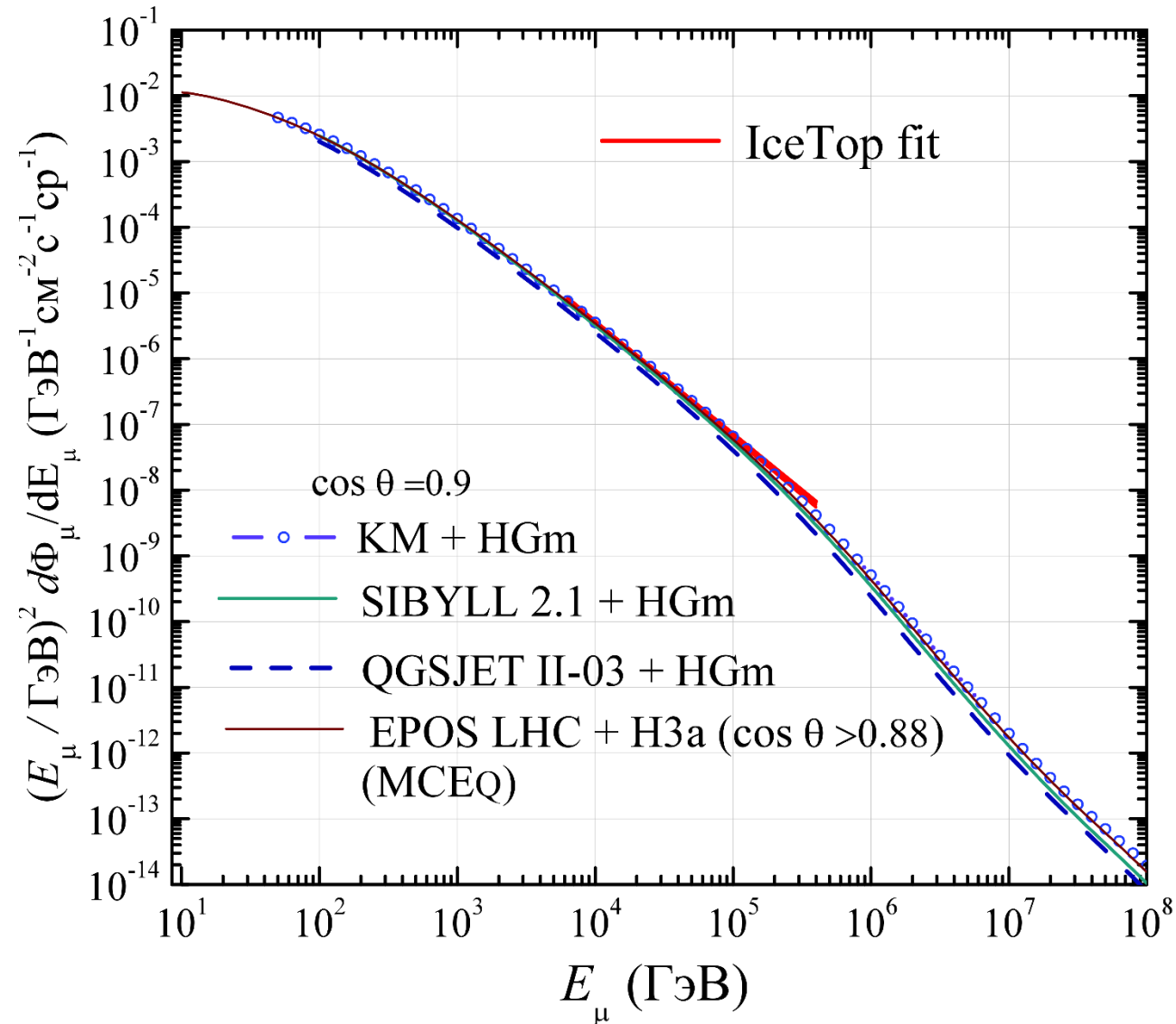
Данный метод решения уравнений адрон-ядерного каскада позволяет учитывать нестепенной характер первичного спектра космических лучей, нарушение скейлинга сечений рождения частиц и рост с энергией полных неупругих сечений адрон-ядерных столкновений.

Наумов В.А. Синеговская Т.С.

Ядерная физика. 2000. Т. 63. С. 2020-2028.

A.A. Kochanov, T.S. Sinegovskaya, S.I. Sinegovsky,
Astropart. Phys. 30, 219 (2008).

Сравнение с экспериментом IceCube



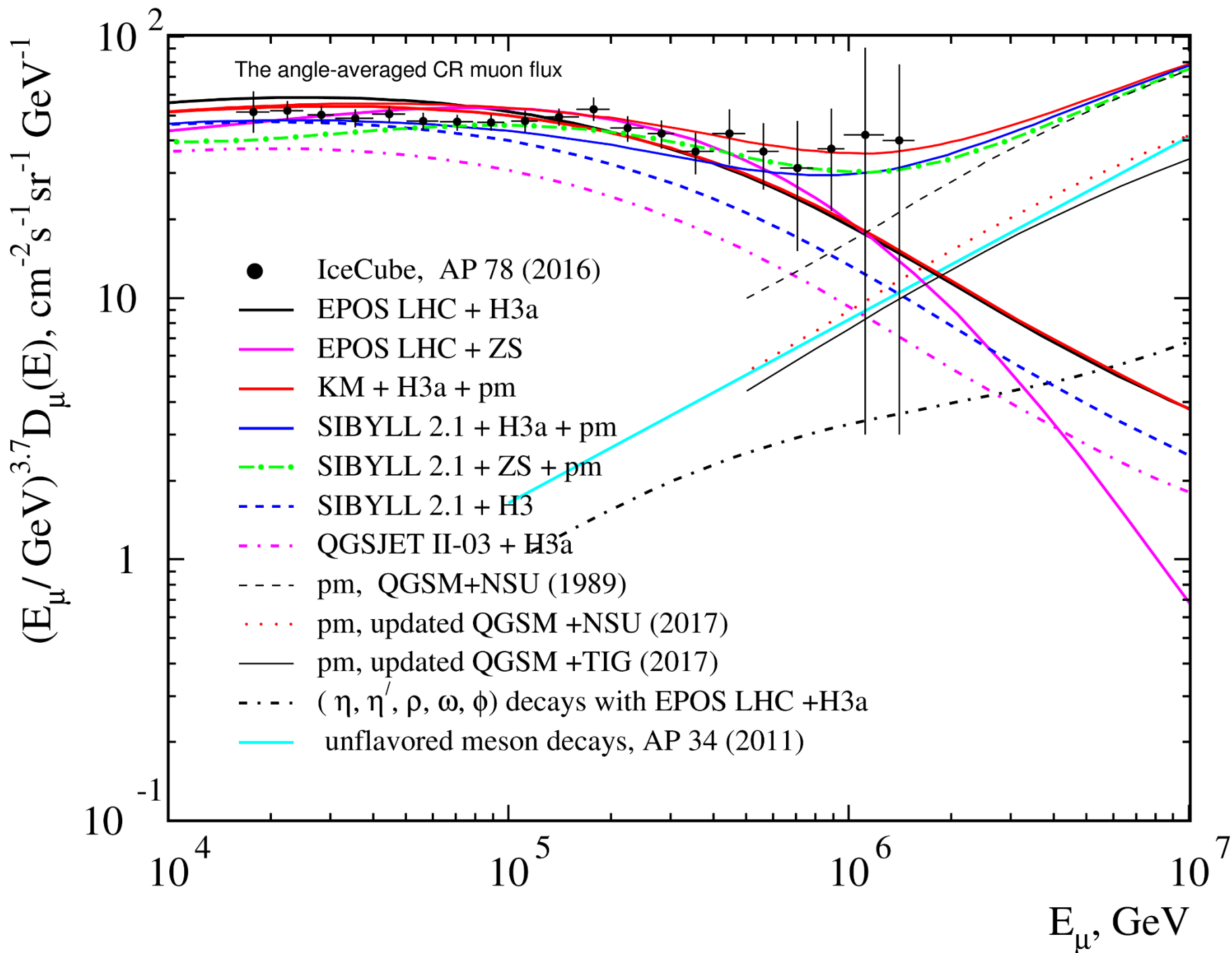
Сравнение расчета потока атмосферных мюонов ($\cos \vartheta = 0.9$) с фитом данных IceTop.

IceTop fit:

$$\frac{d\Phi_\mu}{dE_\mu} = 9.0 \pm 0.3 \cdot 10^{-17} \left(\frac{E_\mu}{50 \text{ ГэВ}} \right)^{-3.74 \pm \Delta\gamma}$$

$$\Delta\gamma = 0.3$$

$$6.31 \text{ ТэВ} < E_\mu < 398 \text{ ТэВ}$$



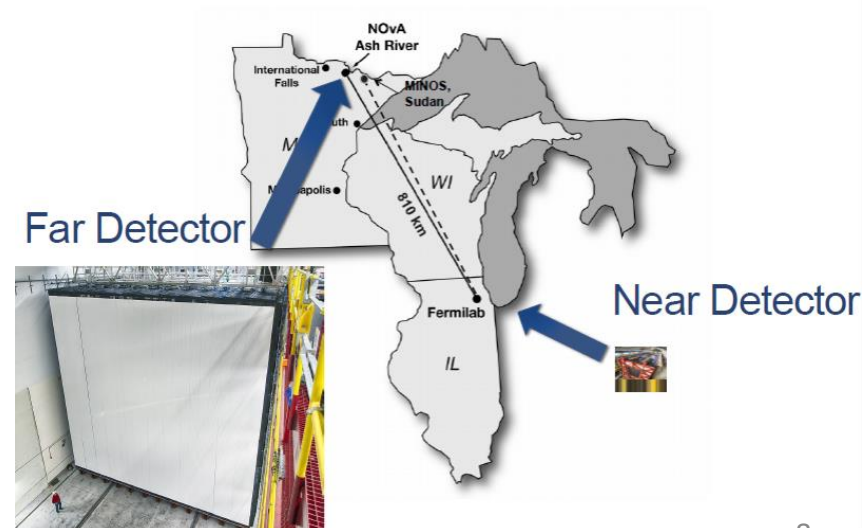
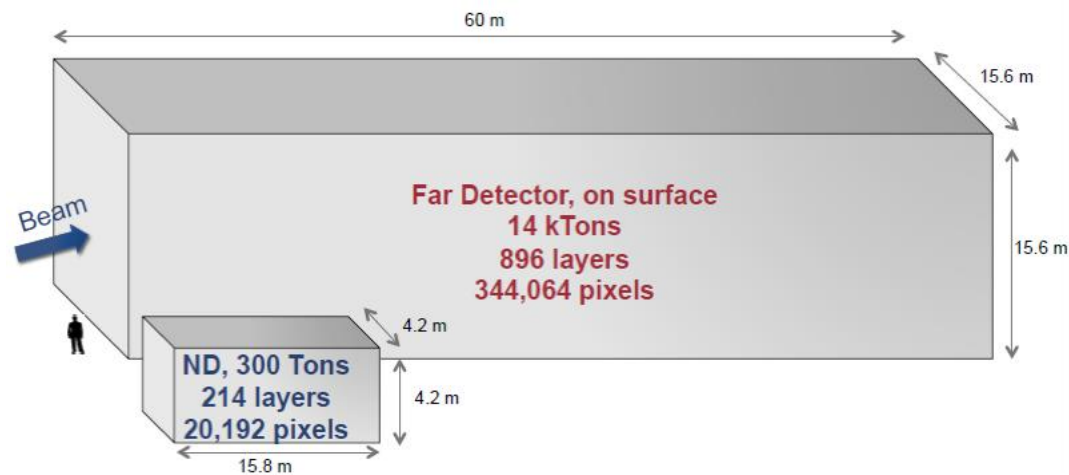
Спектр атмосферных мюонов (усредненный по зенитному углу) и измерения IceCube.

**M.G. Arsten et al.
 Characterization of the
 atmospheric muon flux in
 IceCube// Astropart.Phys. 2016
 V. 78 P.1-27**

Эксперимент NOvA

Эксперимент NOvA направлен на изучение нейтринных осцилляций ($\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu, \nu_\mu \rightarrow \nu_e$)

Установка эксперимента состоит из 2 детекторов: Ближнего Детектора и Дальнего Детектора



2. Использование детектора NOvA как параметр

- Большой детектор эксперимента NOvA может позволить зарегистрировать и оценить энергию мюонов.
- 14 килотонн жидкосцинтиляционный детектор(большой объем)
- Высоко сегментированный $6 \times 4 \text{ см}^2$ (позволяет отделить ионизационные потери мюонов от радиационных)
- Расположен на поверхности земли (интенсивный поток мюонов 100000 в сек)

Дальний детектор как параметр

Методы, позволяющие косвенно оценить интегральный энергетический спектр мюонов

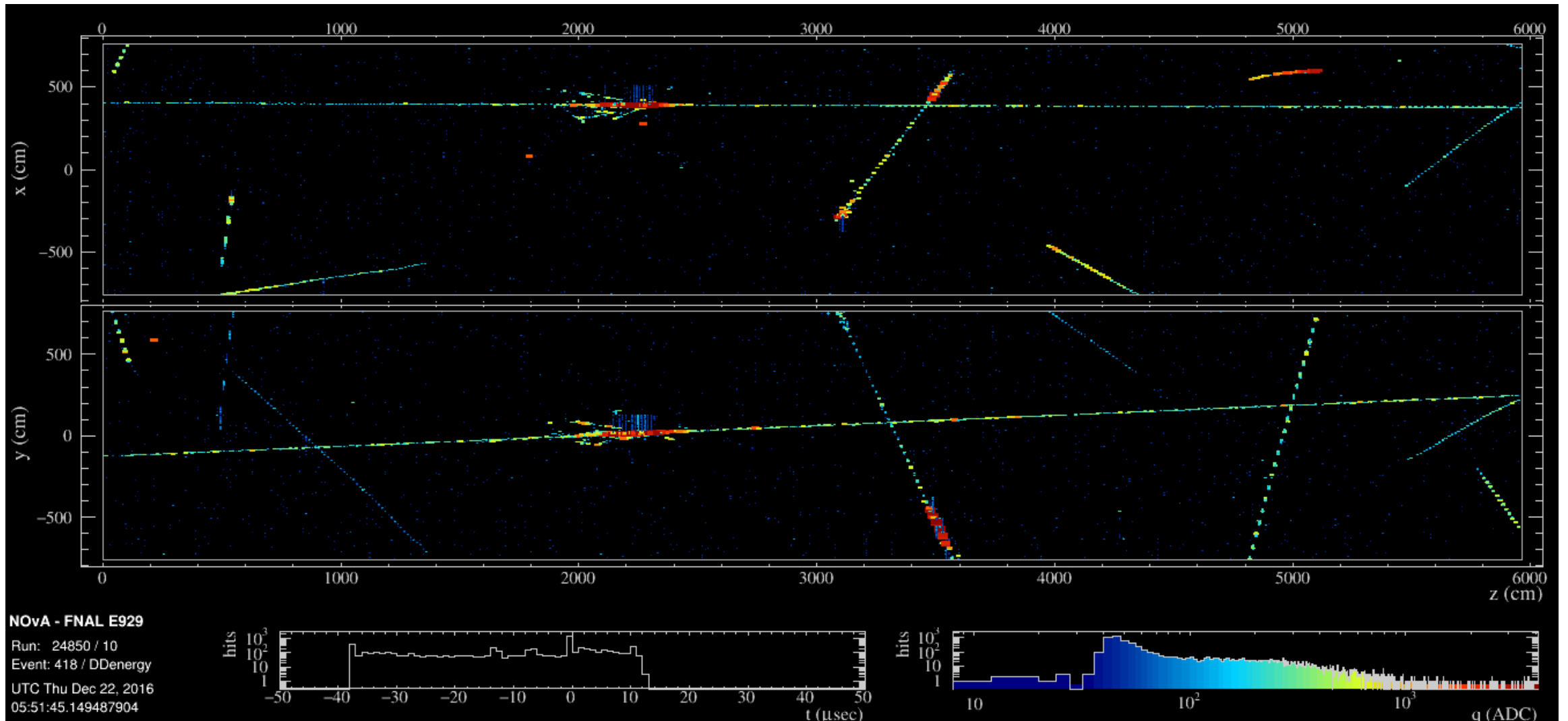
- измерение интенсивности мюонов на различных глубинах под землей;
- регистрация каскадных ливней от тормозного излучения мюонов

Реальный параметр является периодической многослойной структурой, состоящей из детекторов и поглотителей.

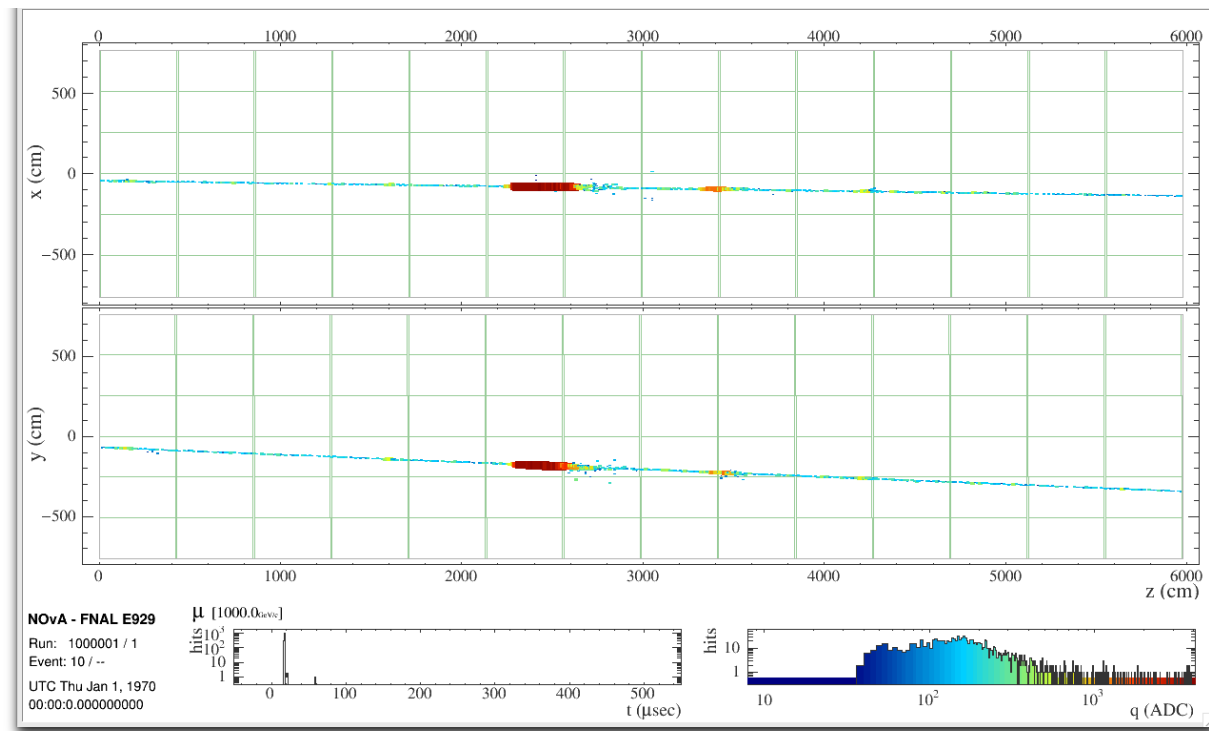
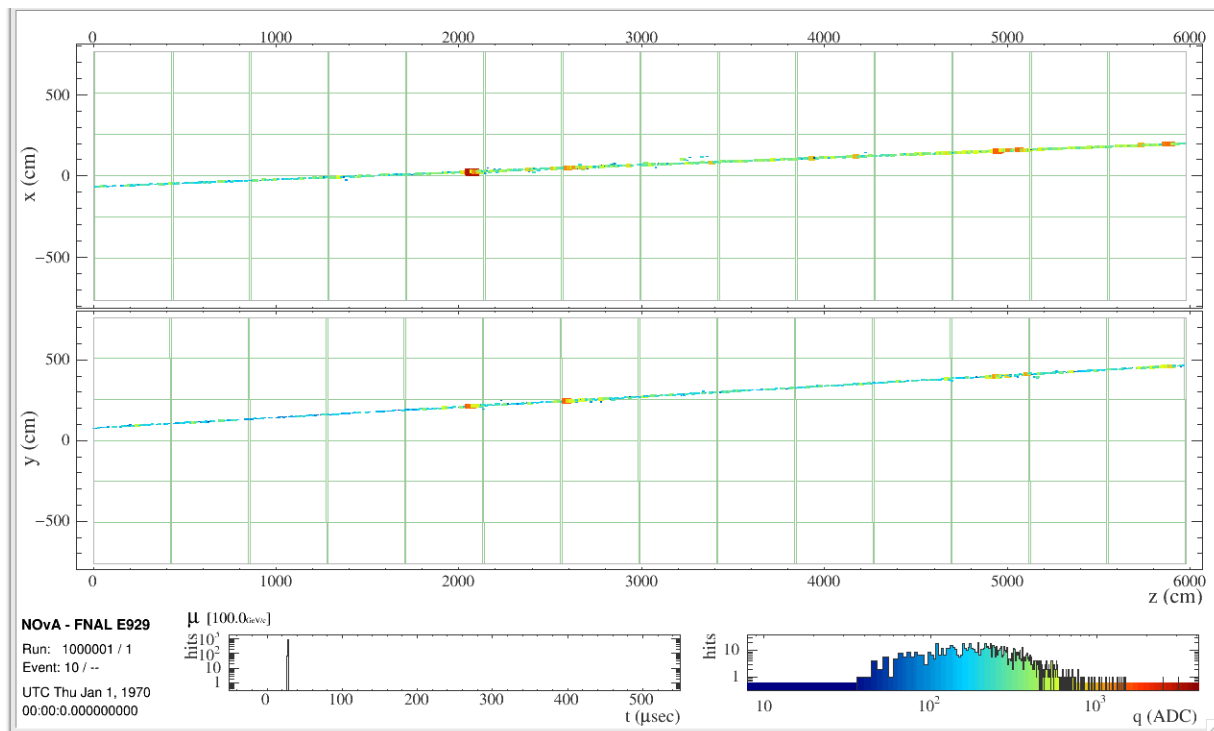
Суммарные потери почти линейно растут с энергией

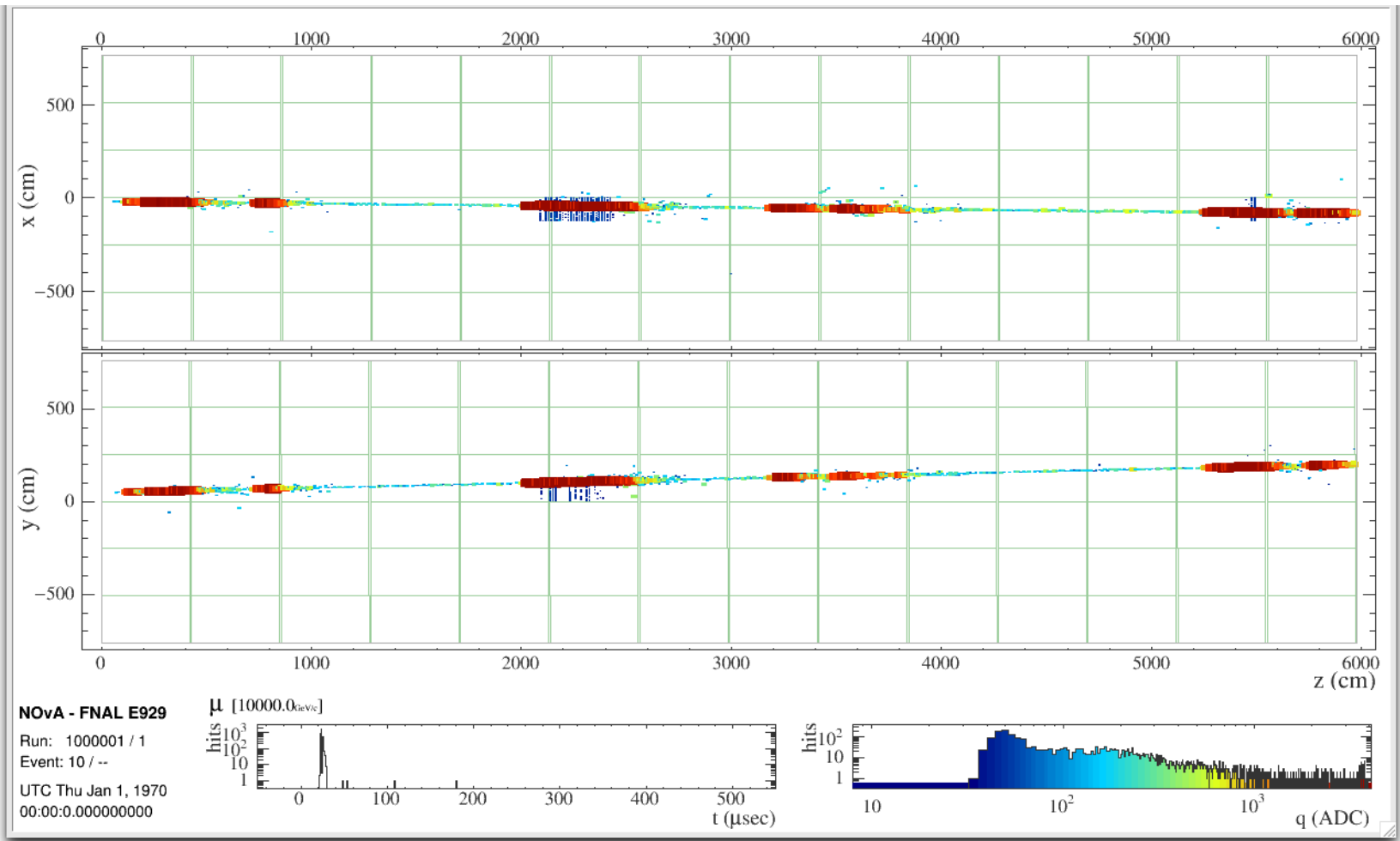
$$-\left(\frac{dE}{dx}\right) \cong a + bE$$

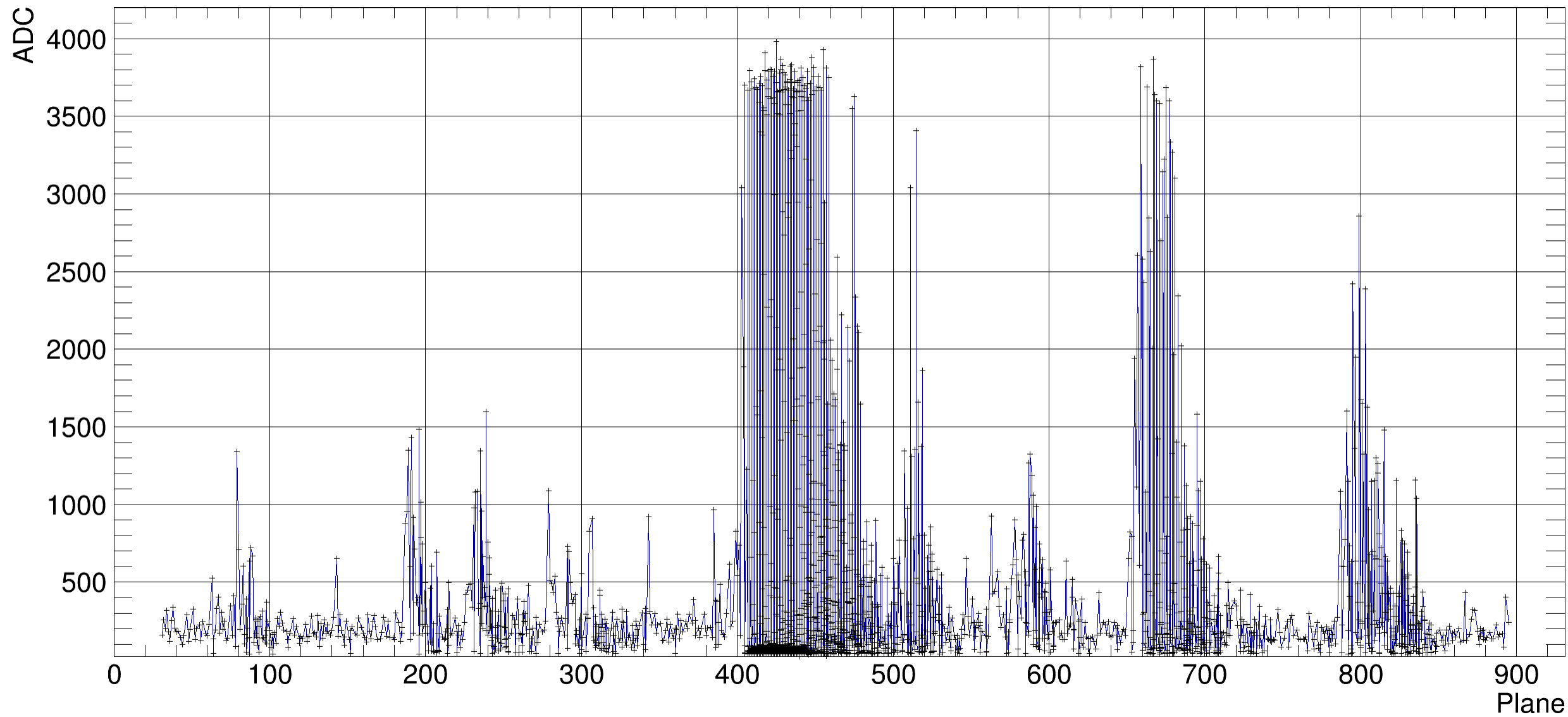
Реальные данные



Моделирование мюонов в диапазоне 100ГэВ-10ТэВ







Выводы

Рассчитаны энергетические спектры атмосферных мюонов в интервале энергий $10 - 10^8$ ГэВ - в рамках метода $Z(E,h)$ -функций для моделей адрон-ядерных взаимодействий Кимеля-Мохова, EPOS LHC, SIBYLL 2.1, QGSJET II-03 в комбинации с двумя параметризациями спектра ПКЛ - Зацепина-Сокольской и Хилласа-Гайссера.

Сравнение вычисленных потоков атмосферных мюонов с новыми данными экспериментов IceCube и IceTop показывает хорошее согласие расчета и эксперимента моделей для EPOS LHC, KM и SIBYLL 2.1.;

Модели KM и EPOS LHC дают почти совпадающие потоки мюонов и практически воспроизводят фит IceTop до энергии 200 ТэВ; модель QGSJET II-03 приводит к заниженному потоку мюонов для всех используемых спектров КЛ.

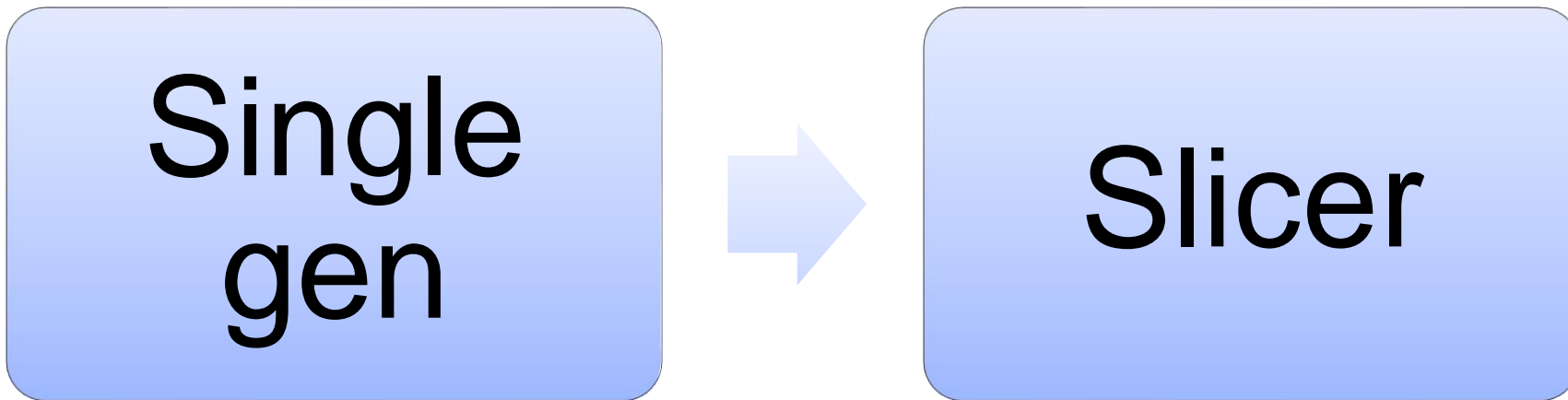
В области энергий $E < 100$ ТэВ, где вклад прямых мюонов очень мал, модели EPOS LHC и KM лучше согласуются с экспериментом; там, где прямые мюоны (от распада очарованных частиц) дают заметный вклад, экспериментальные ошибки не позволяют выбрать лучшую модель.

- Учет вклада редких распадов бесфлейворных мезонов (η , η' , ρ , ω , φ) улучшает согласие с данными эксперимента IceCube, в том случае, если потоки прямых мюонов от распадов очарованных частиц заметно ниже, чем предсказывали оптимистические модели (Волковой-Зацепина, Бугаева и др.), которые не нашли подтверждения в измерениях в спектров атмосферных нейтрино в эксперименте IceCube.
- Моделирование отклика детектора на мюоны позволяет сделать вывод, что метод парметра может быть использован при измерении энергии мюонов в эксперименте NOvA.

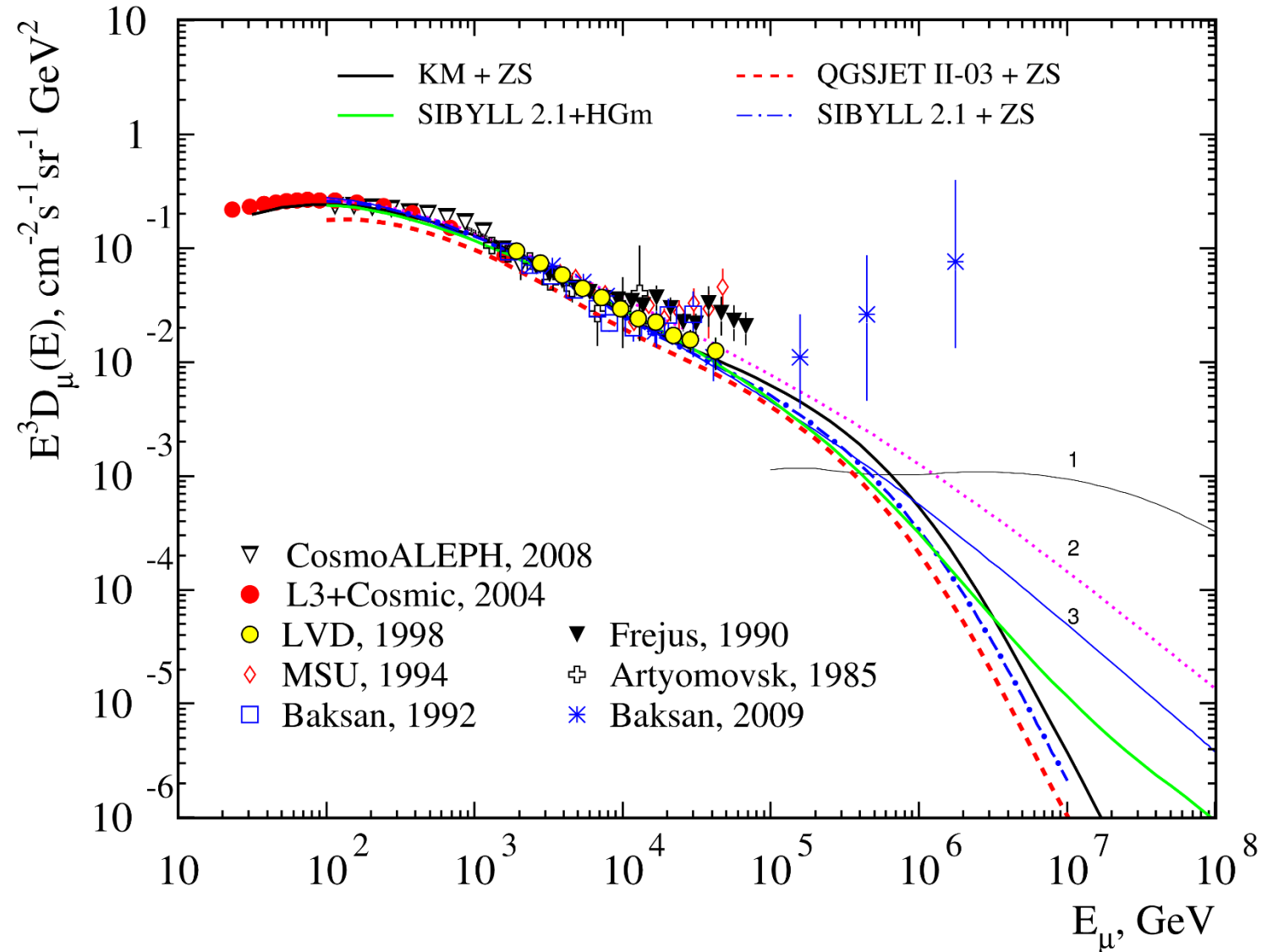
Спасибо за внимание!

В рамках программного обеспечения эксперимента NOvA :

- **проведена моделирование мюонов высоких энергий**
- **изучен его отклик**



Дифференциальный спектр атмосферных мюонов на уровне моря вблизи вертикали ($\vartheta = 0^\circ$)



D^\pm	$e^\pm + \nu_e(\bar{\nu}_e) + \text{адроны}$ $\mu^\pm + \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu) + \text{адроны}$	$(17.2 \pm 1.9)\%$ $(17.41 \pm 1.1)\%$	3.8×10^7
D^0	$e^+ + \nu_e + \text{адроны}$ $\mu^+ + \nu_\mu + \text{адроны}$	$(6.71 \pm 0.29)\%$ $(6.5 \pm 0.7)\%$	9.6×10^7
D_s^\pm	$\tau^\pm + \nu_\tau(\bar{\nu}_\tau)$ $\mu^\pm + \nu_\mu$ $e^\pm + \nu_e(\bar{\nu}_e) + \text{адроны}$ $l^+ + \nu_l + \text{адроны}$	$(6.4 \pm 1.5)\%$ $(6.1 \pm 1.9) \cdot 10^{-3}$ $(8_{-5}^{+6})\%$ $(10.8 \pm 0.6)\%$	8.0×10^7
Λ_c^+	$e^+ + \nu_e + \text{адроны}$ $\mu^+ + \nu_\mu + \text{адроны}$	$(4.5 \pm 1.7)\%$ $(2.0 \pm 0.7)\%$	2.4×10^8

- Изучено программное обеспечение эксперимента NOvA
- Проведено моделирование одиночных мюонов различных энергий
- Получены профили сигналов отклика одиночных мюонов в дальнем детекторе NOvA
- Моделирование отклика детектора на мюоны позволяет сделать вывод, что метод парметра может быть использован при измерении энергии мюонов в эксперименте NOvA.

- An attractive possibility of estimating high-energy muons is related to the measurement of energy losses. At energy $E \geq 1 \text{ TeV}$, the average losses almost linearly increase with energy:

$$- \frac{dE}{dX} = a(E) + b(E)E,$$

where $a(E)$ - ionization losses, $b(E)$ - radiation losses. But the energy losses of the muon in the matter strongly fluctuate.

For bremsstrahlung and nuclear interaction:

- the cross section is very low
- the transmitted energy strongly fluctuates for each interaction

For formation $e^+ e^-$ pair:

- The cross section is high

$$- E = \frac{dE/dx - a}{b_{\text{pair}}}$$

Модели адрон-ядерных взаимодействий при высоких энергиях

QGSJET-II-03 (Quark Gluon String model with JETs) - расширение модели кварк-глюонных струн (МКГС), включающее адронные струи - вклад жестких процессов.

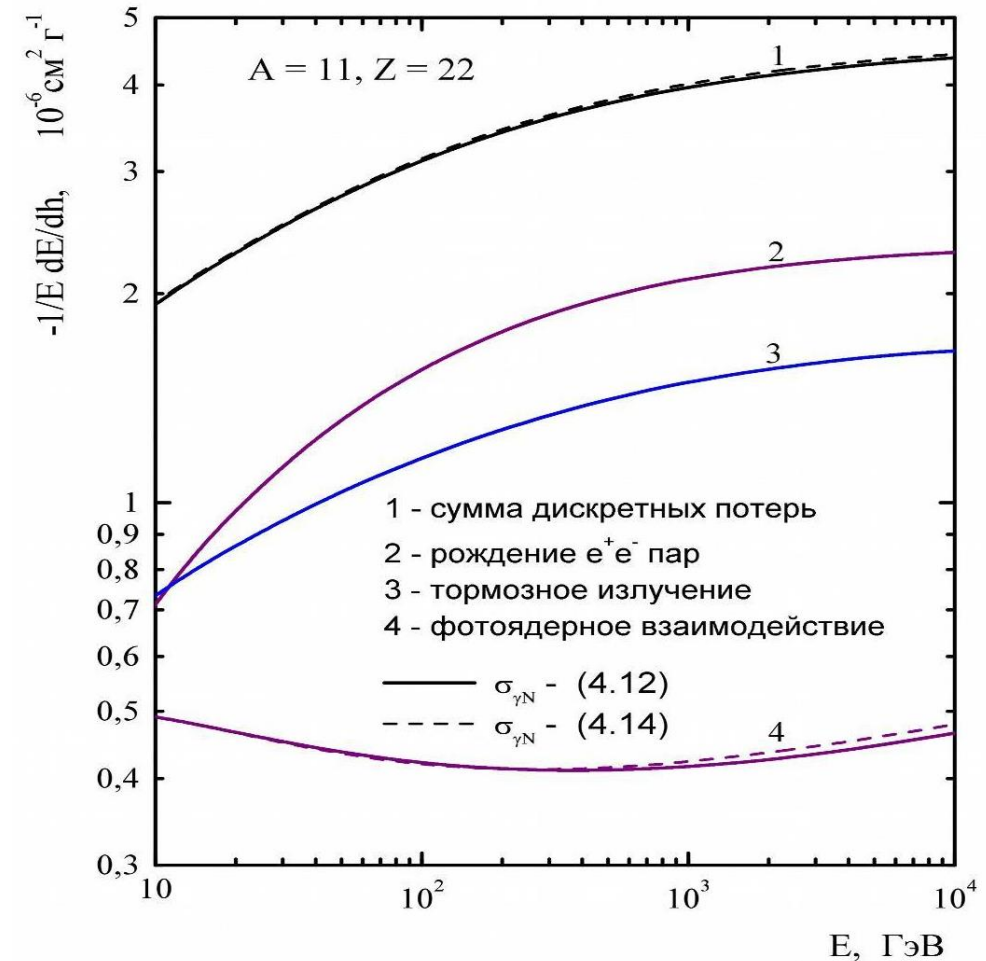
SIBYLL 2.1 (как и QGSJET) описывают рождение кварков и глюонов через одномерные релятивистские струны (трубки цветного тока) с концами, прикрепленными к валентному кварку (дикварку) из мишени и налетающей частицы; когда расстояние между кварками превышает критическое, струна рвется, рождая пару кварк-антикварк .

SIBYLL 2.1 - модель с включением мини-струй (полужесткие процессы) опирается на КХД и приближенно описывает мягкие и жесткие процессы

Взаимодействие мюонов с веществом

При прохождении через вещество мюоны с $E > 1$ ГэВ теряют энергию в следующих взаимодействиях :

1. Ионизация и возбуждение атомов вещества
2. Прямое рождение электрон-позитронных пар
3. Тормозное излучение
4. Неупругое рассеяние на ядрах с образованием адронного ливня



Модели адрон-ядерных взаимодействий при высоких энергиях

QGSJET-II-03 (Quark Gluon String model with JETs) - расширение модели кварк-глюонных струн (МКГС), включающее адронные струи - вклад жестких процессов.

SIBYLL 2.1 (как и QGSJET) описывают рождение кварков и глюонов через одномерные релятивистские струны (трубки цветного тока) с концами, прикрепленными к валентному кварку (дикварку) из мишени и налетающей частицы; когда расстояние между кварками превышает критическое, струна рвется, рождая пару кварк-антикварк .

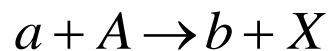
SIBYLL 2.1 - модель с включением мини-струй (полужесткие процессы) опирается на КХД и приближенно описывает мягкие и жесткие процессы

Адронная компонента ШАЛ

Модель адронного каскада, генерируемого нуклонами космических лучей высоких энергий:

- ✓ ядра космических лучей рассматриваются как совокупность несвязанных нуклонов (приближение суперпозиции);
- ✓ используется одномерное приближение для каскада (приближение "прямо-вперёд"), основанное на сильной анизотропии в угловом распределении ультррелятивистских вторичных частиц;
- ✓ пренебрегается потерями энергии на электромагнитные взаимодействия, так как они малы по сравнению с характерным для сильного взаимодействия масштабом (~ 0.2 ГэВ);
- ✓ влияние геомагнитного поля несущественно для частиц с энергией $E > 1$ ГэВ;
- ✓ на первом этапе не учитывается вклад процессов рождения нуклон-антинуклонных пар в мезон-ядерных взаимодействиях, что позволяет отщепить нуклонную часть каскада от мезонной;
- ✓ учитываются процессы регенерации и неупругой перезарядки нуклонов и пионов.

Уравнения для нуклонной компоненты ШАЛ (1)



$$\begin{aligned} \frac{\partial p(E, h)}{\partial h} = & -\frac{p(E, h)}{\lambda_N(E)} + \frac{1}{\lambda_N(E)} \int_E^\infty \frac{1}{\sigma_{NA}^{\text{in}}(E)} \frac{d\sigma_{pp}(E_0, E)}{dE} p(E_0, h) dE_0 + \\ & + \frac{1}{\lambda_N(E)} \int_E^\infty \frac{1}{\sigma_{NA}^{\text{in}}(E)} \frac{d\sigma_{np}(E_0, E)}{dE} n(E_0, h) dE_0. \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(E, h)}{\partial h} = & -\frac{n(E, h)}{\lambda_N(E)} + \frac{1}{\lambda_N(E)} \int_E^\infty \frac{1}{\sigma_{NA}^{\text{in}}(E)} \frac{d\sigma_{nn}(E_0, E)}{dE} n(E_0, h) dE_0 + \\ & + \frac{1}{\lambda_N(E)} \int_E^\infty \frac{1}{\sigma_{NA}^{\text{in}}(E)} \frac{d\sigma_{pn}(E_0, E)}{dE} p(E_0, h) dE_0, \end{aligned}$$

$$\frac{d\sigma_{ab}(E_0, E)}{dE} = 2\pi \int_0^{p_T^{\text{max}}} \frac{p_T}{p_L} \left(E \frac{d^3\sigma_{ab}}{d^3p} \right) dp_T, \quad \lambda_N(E) = 1 / (N_0 \sigma_{NA}^{\text{in}})$$

Уравнения для нуклонной компоненты ШАЛ (2)

Граничные условия:

$$p(E, h=0) = p_0(E), \quad n(E, h=0) = n_0(E).$$

Замена:

$$N^\pm(E, h) = p(E, h) \pm n(E, h),$$

$$N_0^\pm(E, 0) = p_0(E) \pm n_0(E)$$

$$\frac{\partial N^\pm(E, h)}{\partial h} = -\frac{N^\pm(E, h)}{\lambda_N(E)} + \frac{1}{\lambda_N(E)} \int_E^\infty \frac{1}{\sigma_{NA}^{\text{in}}(E)} \left[\frac{d\sigma_{pp}(E_0, E)}{dE} \pm \frac{d\sigma_{pn}(E_0, E)}{dE} \right] N^\pm(E_0, h) dE_0 \quad (1')$$

Ищем решение в виде

$$N^\pm(E, h) = N_0^\pm(E, 0) \exp \left[-\frac{h}{\Lambda_N^\pm(E, h)} \right], \quad (2)$$

$$\frac{1}{\Lambda_N^\pm(E, h)} = \frac{1 - Z_{NN}^\pm(E, h)}{\lambda_N(E)} \quad \text{или} \quad Z_{NN}^\pm(E, h) = 1 - \frac{\lambda_N(E)}{\Lambda_N^\pm(E, h)} \quad (3)$$

Z-факторы

Решение уравнений для нуклонов (1)

$$x = \frac{E}{E_0}$$

$$\frac{\partial(hZ_{NN}^\pm)}{\partial h} = \int_0^1 \Phi_{NN}^\pm(E, x) \eta_{NN}^\pm(E, x) \exp\left[-\frac{h}{\Lambda_N^\pm(E/x, h)} + \frac{h}{\Lambda_N^\pm(E, h)}\right] dx \quad (4)$$

$$\Phi_{NN}^\pm(E, x) = \frac{E}{\sigma_{NA}^{\text{in}}(E)} \left[\frac{d\sigma_{pp}(E_0, E)}{dE} \pm \frac{d\sigma_{pn}(E_0, E)}{dE} \right]_{E_0=E/x} \quad \eta_{NN}^\pm(E, x) = \frac{N_0^\pm(E/x, 0)}{x^2 N_0^\pm(E, 0)}$$

Формальное решение ур. (4) приводит к интегральному уравнению для Z-факторов:

$$Z_{NN}^\pm(E, h) = \frac{1}{h} \int_0^h dt \int_0^1 dx \Phi_{NN}^\pm(E, x) \eta_{NN}^\pm(E, x) \exp[-tD_{NN}^\pm(E, x, t)], \quad (5)$$

где $D_{NN}^\pm(E, x, t) = \frac{1 - Z_{NN}^\pm(E/x, t)}{\lambda_N(E/x)} - \frac{1 - Z_{NN}^\pm(E, t)}{\lambda_N(E)}$ коэф. поглощения

Идея решения (5) почти очевидна - последовательные приближения, т.е. разложение по малому параметру:

$$|hD_{NN}^\pm(E, x, h)| \sim h |1/\lambda_N(E/x) - 1/\lambda_N(E)| \ll 1.$$

Простейший выбор:

$$Z_{NN}^{\pm(1)} = \int_0^1 dx \Phi_{NN}^\pm(E, x) \eta_{NN}^\pm(E, x) \frac{1 - \exp[-hD_{NN}^{\pm(0)}(E, x)]}{hD_{NN}^{\pm(0)}} \quad (6)$$

$$Z_{NN}^{\pm(0)}(E, h) = 0$$

$$D_{NN}^{\pm(0)}(E, x) = 1/\lambda_N(E/x) - 1/\lambda_N(E)$$



Считая $hD_{NN}^{(0)} \ll 1$,

разложим экспоненту в (6) в ряд, ограничившись квадратичным по $hD_{NN}^{(0)}$ слагаемым, получим

$$Z_{NN}^{\pm(1)} = \int_0^1 dx \Phi_{NN}^{\pm}(E, x) \eta_{NN}^{\pm}(E, x) [1 - hD_{NN}^{\pm(0)}(E, x) / 2] \quad (7)$$

Для n -го приближения находим

$$Z_{NN}^{\pm(n)} = \frac{1}{h} \int_0^h dt \int_0^1 dx \Phi_{NN}^{\pm}(E, x) \eta_{NN}^{\pm}(E, x) \exp[-tD_{NN}^{\pm(n-1)}(E, x, t)] \quad (8)$$

$$D_{NN}^{\pm}(E, x, t) = \frac{1 - Z_{NN}^{\pm}(E/x, t)}{\lambda_N(E/x)} - \frac{1 - Z_{NN}^{\pm}(E, t)}{\lambda_N(E)} \quad (9)$$

1) спектр первичных космических лучей $N^\pm(E, h = 0) = N_0 E^{-(\gamma+1)}$; в этом случае $\eta_{NN}^\pm(E, x) = x^{\gamma-1}$;

2) полное сечение неупругого взаимодействия логарифмически растет с энергией $\sigma_{NA}^{\text{in}}(E) = \sigma_{NA}^0 [1 + \beta_N \ln(E/E_1)]$ (здесь $\sigma_{NA}^0 = 275$ мбн, $\beta_N = 0.07$, $E_1 = 100$ ГэВ), т. е. пробег нуклона до неупругого взаимодействия уменьшается с ростом энергии, $\lambda_N(E) = \lambda_N^0 / [1 + \beta_N \ln(E/E_1)]$;

3) сечения рождения нуклонов являются квазискейлинговыми (приближенный фейнмановский скейлинг – с точностью до логарифмических добавок) $\Phi_{NN}^\pm(E, x) = (\lambda_N(E)/\lambda_N^0) w_{NN}^\pm(x)$.

Простая модель нуклонного каскада (2)

$$N^\pm(E, h) = N^\pm(E, 0) \exp \left[-\frac{h(1 - Z_{NN}^\pm(E, h))}{\lambda_N(E)} \right] \quad Z_{NN}^\pm(E, h) = \frac{1}{h} \int_0^h dt \int_0^1 dx \Phi_{NN}^\pm(E, x) \eta_{NN}^\pm(E, x) \exp[-tD_{NN}^\pm(E, x, t)],$$

$$\Phi_{NN}^\pm(E, x) = (\lambda_N(E)/\lambda_N^0) w_{NN}^\pm(x) \quad \eta_{NN}^\pm(E, x) = \frac{N_0^\pm(E/x, 0)}{x^2 N_0^\pm(E, 0)} \quad N^\pm(E, h=0) = N_0 E^{-(\gamma+1)}; \quad \eta_{NN}^\pm(E, x) = x^{\gamma-1}$$

$$D_{NN}^\pm(E, x, t) = \frac{1 - Z_{NN}^\pm(E/x, t)}{\lambda_N(E/x)} - \frac{1 - Z_{NN}^\pm(E, t)}{\lambda_N(E)} \quad \longrightarrow \quad D_{NN}^{\pm(0)}(x) = \frac{1}{\lambda_N(E/x)} - \frac{1}{\lambda_N(E)} = -\frac{\beta_N}{\lambda_N^0} \ln x,$$

в нулевом приближении

$$\exp[\beta_N t / \lambda_N^0 \ln x] \equiv x^{\beta_N t / \lambda_N^0}$$

$$Z_{NN}^{\pm(1)}(E, h) = \frac{\lambda_N(E)}{h\lambda_N^0} \int_0^h dt \int_0^1 dx w_{NN}^\pm(x) x^{\gamma-1} \exp \left[t \frac{\beta_N}{\lambda_N^0} \ln x \right],$$

или

$$Z_{NN}^{\pm(1)}(E, h) = \frac{\lambda_N(E)}{h\lambda_N^0} \int_0^h dt \int_0^1 dx w_{NN}^\pm(x) x^{\tilde{\gamma}(t)-1}$$

$$= \frac{\lambda_N(E)}{h\lambda_N^0} \int_0^1 dx w_{NN}^\pm(x) x^{\gamma-1} \frac{[\exp(\beta_N h / \lambda_N^0 \ln x) - 1]}{(\beta_N / \lambda_N^0) \ln x}$$

где $\tilde{\gamma}(t) = \gamma + \beta_N(t/\lambda_N^0)$.

Это - эффект Н.Л. Григорова: логарифм. рост сечения неупругого НА-взаим. приводит к росту с глубиной эффективного показателя спектра вторичных КЛ.

Простая модель нуклонного каскада (3)

Ограничиваясь для малых глубин третьим членом разложения экспоненты под интегралом (10), получим

$$Z_{NN}^{\pm(1)}(E, h) \approx \frac{\lambda_N(E)}{\lambda_N^0} \left[z_{NN}^{\pm}(\gamma) - \frac{\beta_N h}{2\lambda_N^0} \zeta_{NN}^{\pm}(\gamma) \right], \quad (12)$$

где z_{NN}^{\pm} – момент, а ζ_{NN}^{\pm} – логарифмический момент инклюзивного распределения $w_{NN}^{\pm}(x)$:

$$z_{NN}^{\pm}(\gamma) \equiv \langle x^{\gamma-1} \rangle = \int_0^1 dx w_{NN}^{\pm}(x) x^{\gamma-1}, \quad (13)$$

$$\zeta_{NN}^{\pm}(\gamma) \equiv \langle x^{\gamma-1} (-\ln x) \rangle = \int_0^1 dx w_{NN}^{\pm}(x) x^{\gamma-1} (-\ln x). \quad (14)$$

Таким образом, в первом приближении этой модели спектр нуклонов дается выражением

$$N^{\pm}(E, h) = N_0 E^{-(\gamma+1)} \exp \left[-\frac{h(1 - Z_{NN}^{\pm(1)}(E, h))}{\lambda_N(E)} \right]. \quad (15)$$

Нуклонный каскад в простой модели (4)

Используя оценки момента $\langle x^{\gamma-1} \rangle$ и логарифмического момента, приближенные выражения для $Z_{NN}^{\pm(1)}$ можно записать в виде

$$Z_{NN}^{\pm(1)}(E, h) \approx \frac{\lambda_N(E)}{\lambda_N^0} z_{NN}^{\pm} [1 - h/(44\lambda_N^0)]. \quad (16)$$

Итак, в случае логарифмически растущего с энергией сечения неупругого нуклон-ядерного взаимодействия $\sigma_{NA}^{in}(E)$ величина Z_{NN}^{\pm} является функцией двух переменных - энергии и глубины. Для глубин $h \ll (2\lambda_N^0/\beta_N)(z_{NN}^{\pm}/\zeta_{NN}^{\pm})$ (т.е. для $h \ll 44\lambda_N^0$) можно пренебречь зависимостью Z-факторной функции от h :

$$Z_{NN}^{\pm(1)}(E) \approx \frac{\lambda_N(E)}{\lambda_N^0} z_{NN}^{\pm}, \quad N^{\pm}(E, h) \approx N_0 E^{-(\gamma+1)} \exp \left[-h \left(\frac{1}{\lambda_N(E)} - \frac{z_{NN}^{\pm}(\gamma)}{\lambda_N^0} \right) \right]. \quad (17)$$

Если в рассматриваемой модели считать пробеги нуклонов постоянными, то решение задачи является точным:

$$N^{\pm}(E, h) = N_0 E^{-(\gamma+1)} \exp \left[-\frac{h(1 - z_{NN}^{\pm}(\gamma))}{\lambda_N^0} \right].$$

Это видно из

$$Z_{NN}^{\pm(1)}(E, h) = \frac{\lambda_N(E)}{h\lambda_N^0} \int_0^h dt \int_0^1 dx w_{NN}^{\pm}(x) x^{\gamma-1} \exp \left[t \frac{\beta_N}{\lambda_N^0} \ln x \right], \quad (18)$$

в котором теперь нужно положить $\beta_N = 0$.

$$z_{NN}^{\pm}(\gamma) \equiv \langle x^{\gamma-1} \rangle = \int_0^1 dx w_{NN}^{\pm}(x) x^{\gamma-1},$$



Метод Matrix Cascade Equation

Метод MCEq разработан А. Fedynitch et al. и предназначен для расчетов атмосферных лептонных потоков при высоких энергиях, включая инклюзивные потоки атмосферных мюонов и нейтрино.

<http://github.com/afedynitch/MCEq>.

Fedynitch A. Engel R., Gaisser T.K. et al. MCEQ - numerical code for inclusive lepton flux calculations/ A. Fedynitch, R. Engel, T.K. Gaisser // PoS (ICRC2015) – P.1129;

Fedynitch A. Engel R., Gaisser T.K. et al. Calculation of conventional and prompt lepton fluxes at very high energy / A. Fedynitch, R.Engel, T. K. Gaisser // EPJ Web Conf. – 2015. – V. 99. – P. 08001; arXiv/1503.00544.

Исходные уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_h(E, X)}{dX} = & -\frac{\Phi_h(E, X)}{\lambda_{int,h}(E)} - \frac{\Phi_h(E, X)}{\lambda_{dec,h}(E, X)} + \sum_l \int_E^\infty dE_l \frac{dN_{l(E_l) \rightarrow h(E)}^{int}}{dE} \frac{\Phi_l(E_l, X)}{\lambda_{int,l}(E_l)} \\ & + \sum_l \int_E^\infty dE_l \frac{dN_{l(E_l) \rightarrow h(E)}^{dec}}{dE} \frac{\Phi_l(E_l, X)}{\lambda_{dec,l}(E_l, X)}. \end{aligned}$$

Вместо решения этих интегро-дифф. уравнений Федынич численно решает систему дискретных уравнений – на выбранной двумерной сетке энергия-глубина в атмосфере (E-X). На каждом шаге ($\Delta E, \Delta X$) происходит событие – взаимодействие (с рождением новой частицы и прежней но с другой энергией) или распад частицы. Вероятности этих процессов определяются инклюзивными сечениями рождения частицы ($c_{l(E)}$ - см. (3)) или вероятностью распада (см. (4)). Точность расчета определяется числом узлов решетки: если мало точек (грубая сетка), то быстро, но ошибка велика, если очень подробная сетка, то точность хорошая (~ 3-5 %), но считать будет долго. Компромисс находится на практике.

An approach aimed to avoid these calculation uncertainties is based on numerical integration of the coupled system by discretization on an energy grid. Eq. (1) becomes

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_{E_i}^h}{dX} = & -\frac{\Phi_{E_i}^h}{\lambda_{int,E_i}^h} + \sum_{E_k \geq E_i}^{E_N} \sum_l \frac{c_{l(E_k) \rightarrow h(E_i)}}{\lambda_{int,E_k}^l} \Phi_{E_k}^l \\ & -\frac{\Phi_{E_i}^h}{\lambda_{dec,E_i}^h(X)} + \sum_{E_k \geq E_i}^{E_N} \sum_l \frac{d_{l(E_k) \rightarrow h(E_i)}}{\lambda_{dec,E_k}^l(X)} \Phi_{E_k}^l. \end{aligned} \quad (2)$$

where the interaction coefficients

$$c_{l(E_l) \rightarrow h(E_h)} = \Delta E_l \frac{dN_{l \rightarrow h}(E_l)}{dE_h}(E_h) \quad (3)$$

absorb the finite interval size and the inclusive production cross-sections. The energy grid extends from 50 to 10^{10} GeV using 8-9 bins per decade. Analogously to Eq. (3) the inclusive decay coefficients

$$\frac{dN_{l \rightarrow h}^{dec}(E_l)}{dE} = \sum_i BR_{i,l \rightarrow h} \frac{dN_{i,h}}{dE} \quad \text{and} \quad d_{l(E_l) \rightarrow h(E_h)} = \Delta E_l \frac{dN_{l \rightarrow h}^{dec}(E_l)}{dE_h}(E_h) \quad (4)$$

are obtained by summing over all spectra of exclusive branching channels i that contain the secondary particle h .

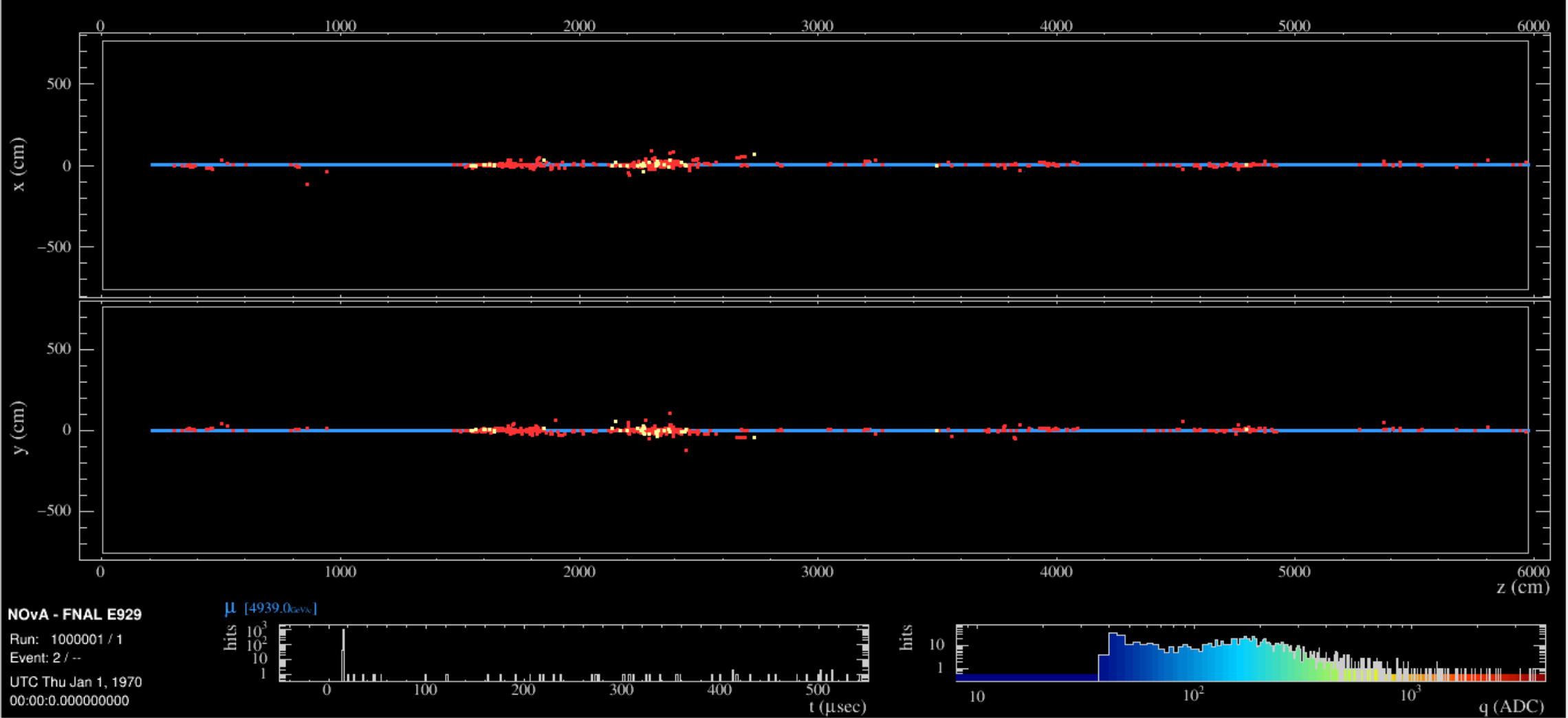
By combining the solutions for each particle type h and each energy bin E_i in a vector

$$\vec{\Phi} = \left(\vec{\Phi}^p \quad \vec{\Phi}^n \quad \vec{\Phi}^{\pi^+} \quad \dots \vec{\Phi}^{\bar{\nu}_\mu} \dots \right)^T, \quad \text{where} \quad \vec{\Phi}^p = \left(\Phi_{E_0}^p \quad \Phi_{E_1}^p \quad \dots \quad \Phi_{E_N}^p \right)^T. \quad (5)$$

the coupled system of equations can be expressed in matrix notation

$$\frac{d}{dX} \vec{\Phi} = \left[(-\mathbf{1} + \mathbf{C}) \mathbf{\Lambda}_{int} + \frac{1}{\rho(X)} (-\mathbf{1} + \mathbf{D}) \mathbf{\Lambda}_{dec} \right] \vec{\Phi}. \quad (6)$$

Моделирование мюонов в диапазоне 100ГэВ-10ТэВ



Мезонный каскад (1)

Система уравнений переноса пионов в атмосфере имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi(E, h, \vartheta)}{\partial h} = & -\frac{\pi(E, h, \vartheta)}{\lambda_{\pi}(E)} - \frac{m_{\pi} \pi(E, h, \vartheta)}{\rho \tau_{\pi} \rho(h, \vartheta)} + \\ & + \sum_i G_{i\pi}^{\text{int}}(E, h, \vartheta) + \sum_K G_{K\pi}^{\text{dec}}(E, h, \vartheta) + \\ & + \frac{1}{\lambda_{\pi}(E)} \int_{E_{\pi\pi}^{\text{min}}}^{\infty} \frac{1}{\sigma_{\pi A}^{\text{in}}(E)} \frac{d\sigma_{\pi\pi}(E_0, E)}{dE} \pi(E_0, h, \vartheta) dE_0, \end{aligned}$$

где $\pi = (\pi^+, \pi^-)$ – поток заряженных пионов; $\lambda_{\pi}(E) = 1/N_0 \sigma_{\pi A}^{\text{in}}$ – длина свободного пробега пионов ($\sigma_{\pi A}^{\text{in}}$ – полное неупругое сечение пионов, N_0 –

$$N_0 = N_A / A$$

Мезонный каскад (2)

Формальное решение для пионного каскада:

$$\Pi^{\pm}(E, h, \vartheta) = \int_0^h dt G_{N\pi}^{\pm}(E, t, \vartheta) \exp \left[- \int_t^h dz \left(\frac{1 - \mathcal{Z}_{\pi\pi}^{\pm}(E, z, \vartheta)}{\lambda_{\pi}(E)} + \frac{m_{\pi}}{\rho\tau_{\pi}\rho(z, \vartheta)} \right) \right],$$

$$\mathcal{Z}_{\pi\pi}^{\pm}(E, h, \vartheta) = \int_0^1 \Phi_{\pi\pi}^{\pm}(E, x) \frac{\Pi^{\pm}(E/x, h, \vartheta)}{\Pi^{\pm}(E, h, \vartheta)} \frac{dx}{x^2}, \quad \Pi^{\pm}(E, h, \vartheta) = \pi^{+}(E, h, \vartheta) \pm \pi^{-}(E, h, \vartheta),$$

$$\Phi_{\pi\pi}^{\pm}(E, x) = \frac{E}{\sigma_{\pi A}^{\text{in}}(E)} \left[\frac{d\sigma_{\pi^{+}\pi^{+}}(E_0, E)}{dE} \pm \frac{d\sigma_{\pi^{+}\pi^{-}}(E_0, E)}{dE} \right]_{E_0=E/x}$$

нулевое приближение: $\mathcal{Z}_{\pi\pi}^{\pm(0)}(E, h, \vartheta) = 0,$

$$\Pi^{\pm(0)}(E, h, \vartheta) = \int_0^h dt G_{N\pi}^{\pm}(E, t, \vartheta) \exp \left[- \int_t^h dz \left(\frac{1}{\lambda_{\pi}(E)} + \frac{m_{\pi}}{\rho\tau_{\pi}\rho(z, \vartheta)} \right) \right].$$

n-ое приближение:

$$\Pi^{\pm(n)}(E, h, \vartheta) = \int_0^h dt G_{N\pi}^{\pm}(E, t, \vartheta) \exp \left[- \int_t^h dz \left(\frac{1 - \mathcal{Z}_{\pi\pi}^{\pm(n)}(E, z, \vartheta)}{\lambda_{\pi}(E)} + \frac{m_{\pi}}{\rho\tau_{\pi}\rho(z, \vartheta)} \right) \right].$$

где $(n = 0, 1, \dots)$: $\mathcal{Z}_{\pi\pi}^{\pm(n+1)}(E, h, \vartheta) = \int_0^1 \Phi_{\pi\pi}^{\pm}(E, x) \frac{\Pi^{\pm(n)}(E/x, h, \vartheta)}{x^2 \Pi^{\pm(n)}(E, h, \vartheta)} dx.$

Мезонный каскад (3)

Zero approximation: $\mathcal{Z}_{\pi\pi}^{\pm(0)}(E, h, \vartheta) = 0,$

$$\Pi^{\pm(0)}(E, h, \vartheta) = \int_0^h dt G_{N\pi}^{\pm}(E, t, \vartheta) \exp \left[- \int_t^h dz \left(\frac{1}{\lambda_{\pi}(E)} + \frac{m_{\pi}}{\rho\tau_{\pi}\rho(z, \vartheta)} \right) \right].$$

n-th approximation:

$$\Pi^{\pm(n)}(E, h, \vartheta) = \int_0^h dt G_{N\pi}^{\pm}(E, t, \vartheta) \exp \left[- \int_t^h dz \left(\frac{1 - \mathcal{Z}_{\pi\pi}^{\pm(n)}(E, z, \vartheta)}{\lambda_{\pi}(E)} + \frac{m_{\pi}}{\rho\tau_{\pi}\rho(z, \vartheta)} \right) \right]$$

$$\mathcal{Z}_{\pi\pi}^{\pm(n+1)}(E, h, \vartheta) = \int_0^1 \Phi_{\pi\pi}^{\pm}(E, x) \frac{\Pi^{\pm(n)}(E/x, h, \vartheta)}{x^2 \Pi^{\pm(n)}(E, h, \vartheta)} dx.$$

Аналитическая модель для спектра π^\pm

1. Не учитывается вклад процессов рождения $N\bar{N}$ - пар в мезон-ядерных взаимодействиях
2. Выполняется фейнмановский скейлинг – сечения рождения частиц являются масштабно-инвариантными:

$$\frac{E}{\sigma_{NA}^{in}(E)} \frac{d\sigma_{N\pi}(E_0, E)}{dE} = W_{N\pi}(x)$$

3. Полные сечения неупругих взаимодействий пионов с ядрами не зависят от энергии: $\sigma_{\pi A}^{in} = \text{const}$
4. Спектр ПКЛ имеет степенной характер: $N_0^\pm(E) = F_0^\pm(E/E_1)^{-(\gamma+1)}$, тогда решения для нуклонов имеют простой вид:

$$N^\pm(E, h) = F_0^\pm(E/E_1)^{-(\gamma+1)} \exp\left[-\frac{h}{\Lambda_N^\pm(E)}\right]$$

Приближенное решение для спектра пионов

$$\Pi^{\pm(1)}(E, h, \vartheta) = \int_0^h dt G_{N\pi}^{\pm}(E, h) \left(\frac{t}{h}\right)^{\varepsilon_{\pi}(\vartheta)-1} \exp[-t(1/\Lambda_N^{\pm}(E) - 1/\Lambda_{\pi}(E))]$$

$$G_{N\pi}^{\pm}(E, h) = \frac{1}{\lambda_N(E)} \int_0^1 W_{N\pi}(E) x^{\gamma-1} N_0^{\pm}(E/x) \frac{dx}{x^2}, \quad \varepsilon_{\pi}(\vartheta) - 1 = \frac{E_{cr}}{E}$$

Сделав замену

$$(1/\Lambda_N^{\pm}(E) + 1/\Lambda_{\pi}(E)) t = y, \quad h(1/\Lambda_N^{\pm}(E) + 1/\Lambda_{\pi}(E)) = \xi,$$

получим

$$\begin{aligned} \Pi^{\pm(1)}(E, h, \vartheta) &= \frac{h}{\lambda_N(E)} N_0^{\pm} \exp\left[-\frac{h}{\Lambda_{\pi}(E)} \int_0^{\xi} e^y y^{\varepsilon_{\pi}-1} dy\right] = \\ &= \frac{h}{\lambda_N(E)} N_0^{\pm} \exp\left[-\frac{h}{\Lambda_{\pi}(E)}\right] \frac{1}{\xi^{\varepsilon_{\pi}}} \gamma(\varepsilon_{\pi}, \xi), \end{aligned}$$

Неполную гамма-функцию можно представить в виде ряда:

$$\gamma(\alpha, z) = \int_0^z e^y y^{\alpha-1} dy = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{n+\alpha}}{n!(\alpha+n)}$$



$$\Pi^{\pm(1)}(E, h, \vartheta) = N^{\pm} Z_{N\pi}^{\pm} \exp\left[-\frac{h}{\Lambda_{\pi}(E)}\right] \frac{h}{\lambda_N(E)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n h^n \left(1/\Lambda_N^{\pm}(E) - 1/\Lambda_{\pi}(E)\right)^n}{n!(\varepsilon_{\pi} + n)}$$

Уравнение переноса мюонов космических лучей в атмосфере Земли (приближение непрерывных потерь энергии)

$$\left[\frac{\partial}{\partial h} + \frac{E_{\mu}^{\text{cr}}(\vartheta)}{Eh} \right] D_{\mu}(E, h, \vartheta) = \frac{\partial}{\partial E} [\beta_{\mu}(E) D_{\mu}(E, h, \vartheta)] + G_{\mu}^{\pi, K}(E, h, \vartheta),$$

$\beta_{\mu}(E) = -dE/dh = a_{\mu}(E) + b_{\mu}(E)E$ – суммарные потери энергии мюона μ в воздухе на ионизацию и возбуждение атомов и в радиационных процессах.

Функция генерации мюонов (источник)

$$G_{\mu}^{\pi, K}(E, h, \vartheta) = \sum_{M=\pi^{\pm}, K^{\pm}} B(M_{\mu 2}) \frac{m_M}{\tau_M \rho(h, \vartheta)} \int_{E_{M_2}^{-}}^{E_{M_2}^{+}} \frac{dE_0}{p_0^2} F_{M_{\mu 2}}^{\mu}(E_0, E) M(E_0, h, \vartheta) +$$

$$+ \sum_{K=K^{\pm}, K_L^0, K_S^0} B(K_{\mu 3}) \frac{m_K}{\tau_K \rho(h, \vartheta)} \int_{E_{K_3}^{-}}^{E_{K_3}^{+}} \frac{dE_0}{p_0^2} F_{K_{\mu 3}}^{\mu}(E_0, E) K(E_0, h, \vartheta).$$

$$F_{M_{\mu 2}}^{\mu} = \left(1 - m_{\mu}^2/m_M^2\right)^{-1}, \quad E_{K_3}^{\pm} = \frac{(m_K^2 + m_{\mu}^2 - m_{\pi}^2) E \pm p \sqrt{(m_M^2 + m_{\mu}^2 - m_{\pi}^2)^2 - 4m_K^2 m_{\mu}^2}}{2m_{\mu}^2}.$$

$$E_{M_2}^{\pm} = \frac{(m_M^2 + m_{\mu}^2) E \pm (m_M^2 - m_{\mu}^2) p}{2m_{\mu}^2},$$

Решение уравнения переноса мюонов КЛ

Сначала решим однородное ур. без учета распада

$$\mu(E, h) = \mu_0(\varepsilon(E, h)) \frac{\beta_\mu(\varepsilon)}{\beta_\mu(E)},$$

где $\mathcal{E}(E, h)$ – корень уравнения $\int_E^\varepsilon \frac{dE}{\beta_\mu(E)} = h$

————— $t = 0$, $\varepsilon(E, h)$ – энергия на уровне $t=0$ мюона, пришедшего на уровень h с энергией E

----- t , $\varepsilon(E, h-t)$ – энергия на уровне t мюона, пришедшего на уровень h с энергией E

————— $t = h$, $\varepsilon(E, h-h) \equiv E$ – энергия мюона, на уровне h : мюон потерял в слое толщиной h энергию

$$\Delta E = \varepsilon(E, h) - E$$

Учет распада дает

$$\mu_1(E, h) = \mu_0(\varepsilon(E, h)) \frac{\beta_\mu(\varepsilon(E, h))}{\beta_\mu(E)} \exp\left[-\int_0^h dt \sigma(\varepsilon(E, t), h-t)\right],$$

$$\sigma(E, h) = E_\mu^{\text{cr}} / (hE)$$

А частное решение неоднородного уравнения по стандартной схеме даст

$$\mu_2(E, h) = \int_0^h dt \frac{\beta_\mu(\varepsilon(E, t))}{\beta_\mu(E)} \exp\left[-\int_t^h dt \sigma(\varepsilon(E, h-t), t)\right] G_\mu^{\pi, K}(\varepsilon(E, t), h-t)$$

Мюоны космических лучей в атмосфере (2)

Или в другой записи

$$D_{\mu}(E, h, \vartheta) = \int_0^h dt W_{\mu}(E, h, t, \vartheta) G_{\mu}^{\pi, K}(\mathcal{E}(E, h - t), t, \vartheta),$$

$$W_{\mu}(E, h, t, \vartheta) = \frac{\beta_{\mu}(\mathcal{E}(E, h - t))}{\beta_{\mu}(E)} \exp \left[-\frac{m_{\mu}}{\tau_{\mu}} \int_t^h \frac{dz}{\rho(z, \vartheta) \mathcal{E}(E, h - z)} \right],$$

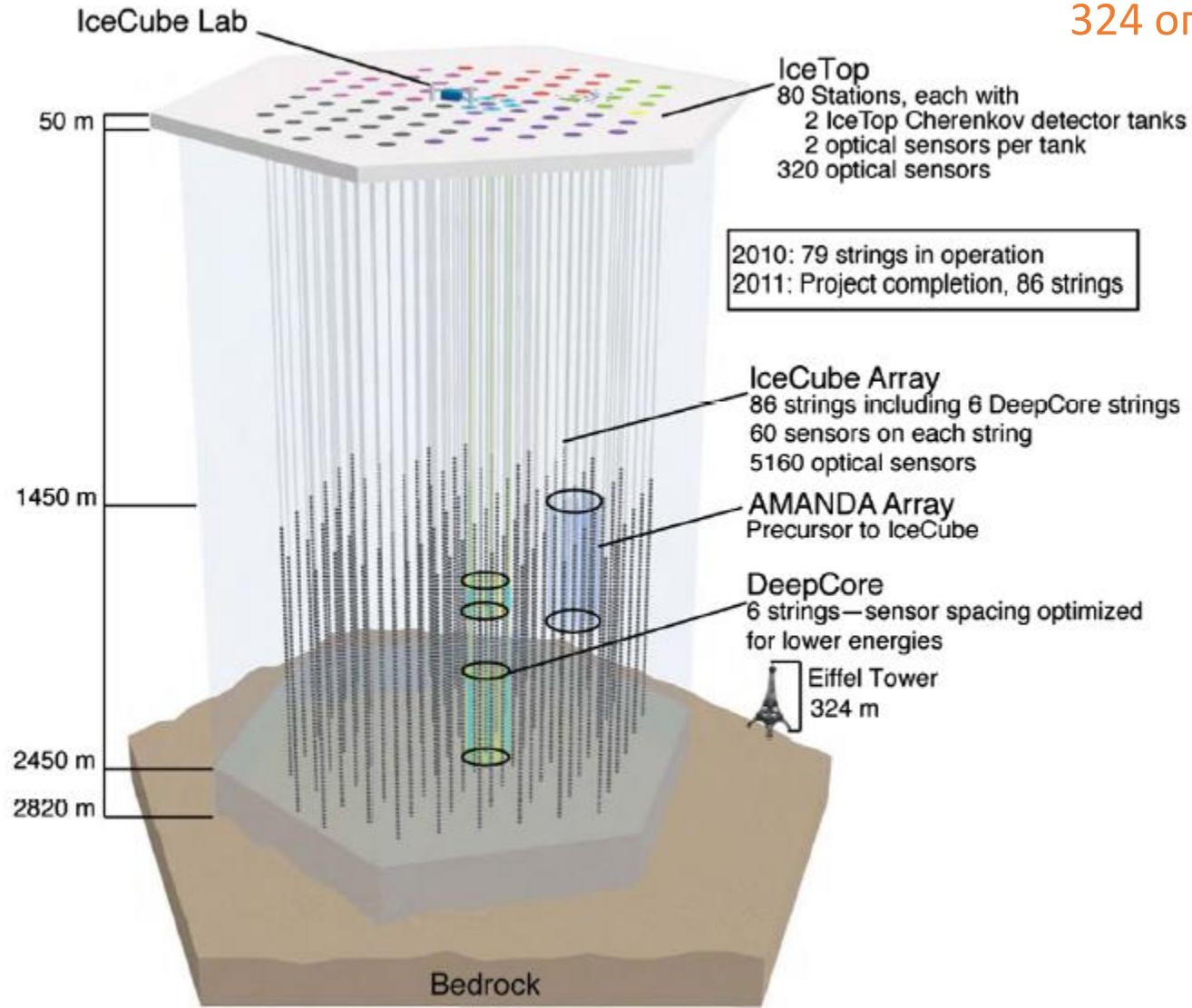
где $\mathcal{E}(E, h)$ – корень уравнения

$$\int_E^{\mathcal{E}} \frac{dE}{\beta_{\mu}(E)} = h.$$

Взаимодействие мюона с веществом

- **Ионизация и возбуждение атомов** (i)
- **Выбивание электронов из атома** (δ)
- **Рождение $e^+ e^-$ - пар** (p)
- **Тормозное излучение** (bremsstrahlung) (b)
- **Неупругое рассеяние мюонов на ядрах** (n)

IceTop: 81 станция, 324 опт. сенсора



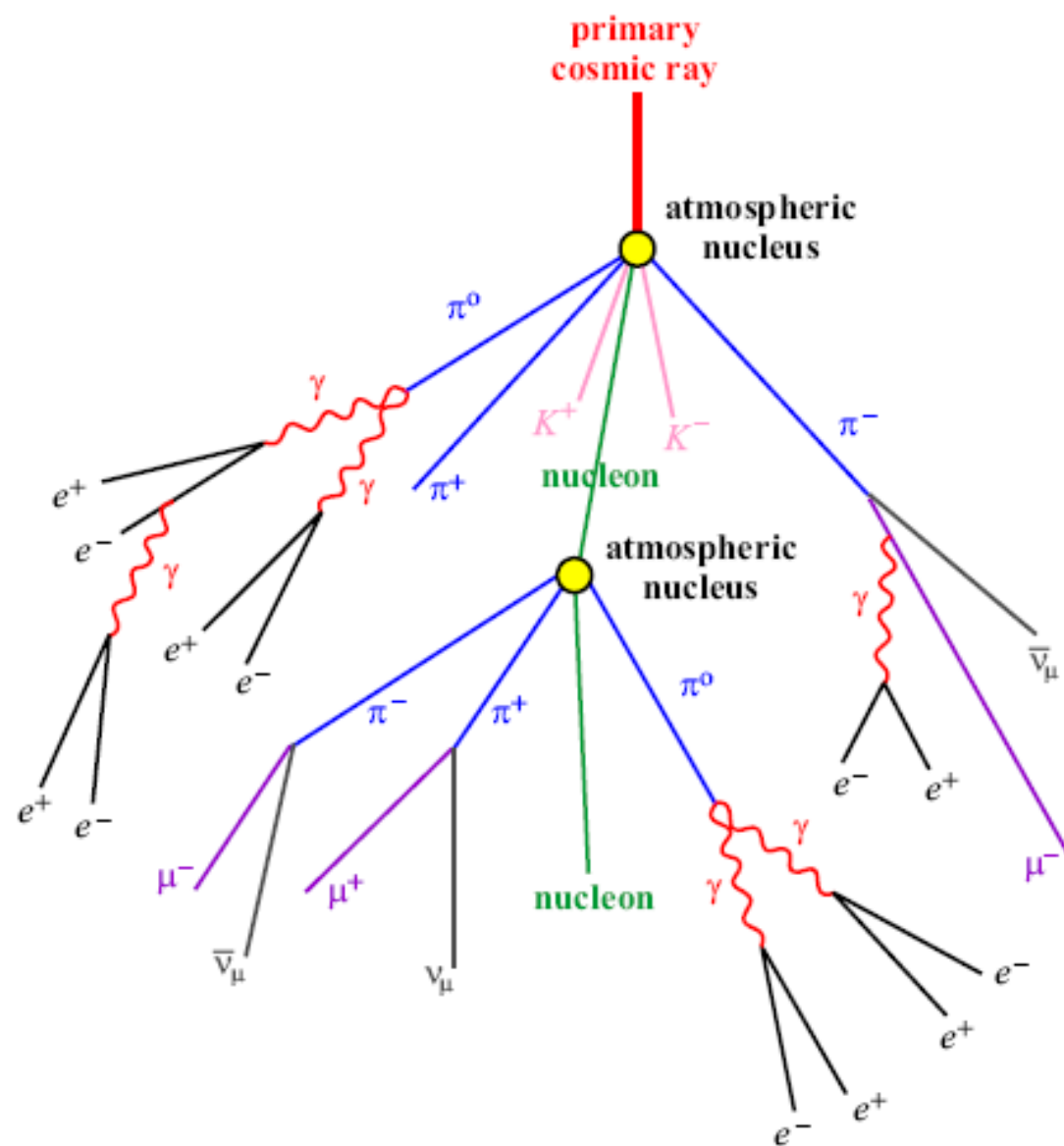
2835 м над у. м. (глубина
атмосферы = 695 г/см²)

162 бака
СО ЛЬДОМ

$\varnothing = 1.8\text{ м}, h = 1.3\text{ м}$

$S=1\text{ км}^2, 10\text{ м} -$
между баками

Генерація мюонов ШАЛ



Sources of the atmospheric muon neutrinos

$$\phi_\nu(E, h, \vartheta) = \int_0^h dt \left[G_\nu^\mu(E, t, \vartheta) + G_\nu^{\pi, K}(E, t, \vartheta) + G_\nu^{D, \Lambda_c}(E, t, \vartheta) \right]$$

conventional ν_μ 's

	Decay modes	Fraction
μ^\pm	$e^\pm + \nu_e(\bar{\nu}_e) + \bar{\nu}_\mu(\nu_\mu)$	$\simeq 100\%$
π^\pm	$\mu^\pm + \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu)$	$\simeq 100\%$
K^\pm	$\mu^\pm + \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu)$ $\pi^\pm + \pi^0$ $\pi^0 + \mu^\pm + \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu)$	63.44 % 20.92 % 3.32 %
K_L^0	$\pi^\pm + \mu^\mp + \bar{\nu}_\mu(\nu_\mu)$	27.02 %
K_S^0	$\pi^+ + \pi^-$ $\pi^\pm + \mu^\mp + \bar{\nu}_\mu(\nu_\mu)$	69.20 % $4.66 \cdot 10^{-4}$

prompt ν_μ 's

	Decay modes	Fraction
D^\pm	$\mu^\pm + \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu) + X$	17.2 %
D^0, \bar{D}^0	$\mu^\pm + \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu) + X$	7.31 %
D_s^\pm	$\mu^\pm + \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu) + X$	6.6 %
Λ_c^+	$\Lambda + \mu^+ + \nu_\mu$	2.0 %

К постановке задачи

- Измерение спектра мюонов на детекторе NOvA в области энергий 1-50 ТэВ при достижении необходимой точности также могло бы прояснить детали структуры спектра ПКЛ; указания на новые детали (еще один излом спектра) были получены в экспериментах ATIC-2 и NUCLEON.

- Эксперимент NOvA - многоцелевой эксперимент.
- Главными задачами являются измерение иерархии масс нейтрино и фазы δ , ответственной за нарушение CP-инвариантности в лептонном секторе. В эксперименте NOvA используются два детектора, ближний и дальний. Ближний детектор расположен на глубине 100 м в Национальной ускорительной лаборатории им. Ферми (Фермилаб) (США) на расстоянии примерно 1 км от мишенной части пучка NuMI. Масса ближнего детектора 0,3 кт. Дальний детектор массой 14 кт находится на расстоянии 810 км от источника нейтрино. Базовым элементом обоих детекторов является ячейка размером
- 1560 x 4 x 6 см из поливинилхлорида, заполненная жидким сцинтиллятором. Внутри ячейки проложено оптоволокно для вывода сцинтилляционного света, вызываемого прохождением заряженных частиц через жидкий сцинтиллятор в ячейке. Сцинтилляционный свет регистрируется 32-канальным лавинным фотодиодом. Ячейки формируют слои детектора, вертикальная и горизонтальная ориентация которых позволяет измерять x - и y -координаты треков частиц. Расположение ближнего и дальнего детекторов показано на рис. 18а. Оба детектора

- Эксперимент NOvA [29] использует нейтринный (off-axis) пучок со средней энергией около 2,2 ГэВ, направленный из Национальной ускорительной лаборатории им. Э. Ферми (Фермилаб) в дальний детектор массой
- 14 кт, находящийся на расстоянии 810 км. Параметры нейтринного пучка до осцилляций измеряются ближним детектором массой 0,3 кт, установленным на расстоянии
- 1 км от мишени. Оба детектора представляют собой сегментированные трековые калориметры, активная часть которых (жидкий сцинтиллятор) составляет около 70 % полной массы детекторов. Эксперимент начал набор статистики в сентябре 2013 г. с частью установленных блоков дальнего детектора при мощности 120 ГэВ-ного протонного пучка около 280 кВт. Ближний детектор будет полностью смонтирован и запущен в работу в начале 2014 г. При предположении, что набор статистики в эксперименте NOvA будет происходить в течение шести лет (три года с пучком нейтрино и три года с пучком антинейтрино) при мощности пучка 700 кВт, а полная интегральная светимость T2K составит 8×10^{21} р.о.т., комбинированный анализ данных по появлению электронных нейтрино в обоих экспериментах позволит достичь чувствительности к иерархии масс на уровне 3σ для небольшой области фазы δ в благоприятном случае максимального CP-нарушения, как видно из рис. б.