

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА»
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ФИЗИКИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

**"Состояния с большим орбитальным моментом и угловые
распределения в соударениях тяжелых ионов."**

Выполнил студент
409 группы
Световидов Валентин Александрович

(подпись студента)

Научный руководитель:
д.ф-м.н., профессор
Теряев Олег Валерианович

(подпись научного руководителя)

Допущена к защите _____

Зав. кафедрой
академик РАН
Матвеев В.А.

Москва
2021 г.

Содержание

| | |
|----------------------------------|----|
| 1. Введение | 3 |
| 2. Теоретическое введение | 4 |
| 3. Преобразование инвариантов | 13 |
| 4. Заключение | 23 |
| Список использованных источников | 25 |
| Приложение | 27 |

1. Введение

В данной теоретической работе основным объектом исследований являются угловые распределения лептонов при распадах векторных бозонов со спином $S = 1$. В результате столкновений тяжелых ионов образуется вращающаяся материя (см. приложение (рис.2), (рис.3)), которая проявляется, например, на состоянии поляризации частиц [16], [15]. Мы предполагаем, что скорее всего квантово-механическим аналогом данных состояний будут являться состояния с определенной энергией $\hbar\omega$, продольным импульсом $\hbar k_z$ и определенным значением проекции полного момента импульса $\hbar m$ на ось z , именуемые закрученными состояниями (так называемые «Twisted states» [13]). Свое название они получили благодаря форме волнового фронта, напоминающего винтовую структуру [14]. Исследование их свойств на данный момент является достаточно интересной и востребованной задачей в физике высоких энергий. Сейчас мы прибегаем к классическому описанию, но в перспективе планируется изучение закрученных состояний с точки зрения квантово-механического описания. Поэтому один из способов исследования закрученных состояний заключается в рассмотрении углового распределения сталкивающихся частиц и его особенностей, а именно, инвариантных комбинаций. Мы же при изучении будем опираться частично на уже имеющиеся результаты по распадам Z -бозонов, экстраполируя результаты на любой векторный бозон. Процессы данного характера были изучены экспериментально в pp-столкновениях на коллайдерах. Мы будем рассматривать данные следующих экспериментов: CDF (2011) - измерение первых четырех коэффициентов углового распределения [2], CMS (2015) - измерение первых пяти коэффициентов [4] и ATLAS (2016) - измерение всех восьми коэффициентов [5]. Следует заметить, что данная область исследований представляет большой интерес для экспериментальной физики высоких энергий и, как следствие, побуждает специалистов в области теоретической физики изучить угловое распределение и выявить необходимые закономерности для построения математической модели процессов рассеяния, а также последующих прогнозирований и предсказаний.

2. Теоретическое введение

2.1. Принимаемые соглашения и необходимые математические сведения

1. В работе используется система единиц, в которой $c = \hbar = 1$.

2. При совершении преобразований используют тензорную алгебру, в которой общеупотребимы матрицы Дирака:

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\gamma^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где γ^5 получается следующим образом: $\gamma^5 = i\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4$. Эти матрицы удовлетворяют антикоммутиационным соотношениям:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\delta^{\mu\nu}$$

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$$

А также справедливо: $\gamma_\mu^2 = \gamma_5^2 = 1$, для $\mu = \overline{1, 4}$.

3. Имеет место также обращение к теории групп, которая описывает симметричные вращения.

Группа – множество G , в котором определена операция умножения, обладающая следующими свойствами:

(Ассоциативность) $\forall a, b, c \in G \Rightarrow (ab)c = a(bc)$;

(Существование единичного элемента) $\forall a \in G \exists e \in G : \Rightarrow ae = ea = a$;

(Существование обратного элемента) $\forall a \in G \exists a^{-1} \in G \Rightarrow a^{-1}a = aa^{-1} = e$

Еще одним важным свойством умножения является – **Коммутативность**: Говорят, что, если $\forall a, b \in G$ коммутируют, то есть $ab = ba$, то группа G – абелева, в противном же случае – неабелева.

Если существует набор непрерывных r -параметрических преобразований вида [19] $q = f(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_r) \mapsto q' = f(x_1, \dots, x_n; a_1 + \zeta_1, \dots, a_r + \zeta_r)$,

$i=\overline{1, n}$ (удовлетворяющих условию инфинитизимальности и определению группы), то говорят, что задана r -параметрическая группа преобразований Ли.

Пусть r -параметрической группе Ли отвечает вещественное r -мерное векторное пространство величин $\sum_{\rho} a_{\rho} X_{\rho}$, замкнутое относительно умножения [19]: $[X_i, X_j] = iC_{ijk}X_k$, где $C_{ijk} \in Re$ - структурные константы, то задана Алгебра Ли.

Значения C_{ijk} - структурных констант зависят от выбора базисных элементов - генераторов группы.

Для нас особый интерес представляют унитарные группы вращений $SO(2)$ и $SO(3)$.

2.2. Квантовомеханические чистые и смешанные состояния

В квантовой теории полный набор физических величин - это набор величин, измеримых одновременно, причем если они имеют одновременно определенные значения, то никакая другая величина (кроме функции этих величин) не может иметь в данном состоянии определенного значения. Согласно аксиоматике канонического квантования, любому «чистому» состоянию в соответствие ставится вектор $|\psi\rangle \in \mathcal{H} : \langle \psi | \psi \rangle = 1$ с точностью до начальной фазы $e^{i\phi}$, а для любой наблюдаемой \hat{F} в состоянии $|\psi\rangle$ действующий эрмитов оператор из бесконечномерного гильбертова пространства вернет только одно из собственных значений $\hat{F}|\psi_f\rangle = f|\psi_f\rangle$ с вероятностью $\omega_f = |\langle \psi_f | \psi \rangle|^2$. Однако этот подход описания справедлив в частном характере для замкнутых квантовомеханических систем. На практике часто встречаются ситуации, когда состояние системы невозможно описать вектором состояния, когда не существует полного набора наблюдаемых. Такие состояния называются «смешанными». Тогда необходимо говорить в более общем смысле. Значит для описания незамкнутых систем с воздействием (неконтролируемое влияние внешних факторов) справедливость подхода сопоставления состояниям системы векторов состояний (волновых функций) теряет смысл. Таким образом, разумный выход состоит в том, чтобы прибегнуть к переходу от «чистых» к «смешанным» состояниям, которым сопоставляются операторы плотности $\hat{\rho}$, обладающие следующими рядом свойств [17]:

1. $\hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho}$ (Эрмитовость)
2. $Tr(\hat{\rho}) = 1$ (Нормировка следа)
3. $\forall |\psi\rangle \in \mathcal{H} \Rightarrow \langle \psi | \hat{\rho} | \psi \rangle \geq 0$ (Неотрицательность матричного элемента)
4. $|Tr(\hat{\rho}^2)| < \infty$ (Ограниченность)

Таким образом, мы получили общий инструмент описания квантовомеханических состояний в случае незамкнутых квантовомеханических систем. Соответствующая модернизация аксиом канонического квантования приводит к тому, что:

1. Состояниям квантовой системы отвечают операторы плотности $\hat{\rho} \in \mathcal{H}$.
2. Измерение наблюдаемой \hat{F} в состоянии $\hat{\rho}$ может иметь результатом только собственное значение f , принадлежащее спектру оператора \hat{F} с вероятностью $\omega_f = \langle \psi_f | \hat{\rho} | \psi_f \rangle$. Как следствие, $\overline{F}_\rho = Tr(\hat{\rho}\hat{F})$.

Оператор плотности смешанного состояния может быть представлен в виде комбинации проекторов на векторы некоторого набора состояний с весовыми коэффициентами, имеющими смысл вероятностей того, что результат измерения в смешанном состоянии будет совпадать с результатом измерения в соответствующем чистом состоянии. Тогда для чистого состояния $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$ (с возможностью факторизации волновой функции) матрица плотности имеет вид:

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \quad (2.1)$$

а для смешанного состояния:

$$\rho = \sum_n \omega_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n| \quad (2.2)$$

$$0 \leq \omega_n \leq 1 \quad (2.3)$$

$$Tr(\rho) = 1 \quad (2.4)$$

2.3. Процесс Дрелла-Яна (Матвеева-Мурадяна-Тавхелидзе). Адронный и лептонный тензоры

В процессе Дрелла-Яна (Рис. 2.1), который был открыт независимо и одновременно Матвеевым, Мурадяном и Тавхелидзе при столкновении пары адронов происходит взаимодействие пары входящих в них партонов, с рождением

виртуального Z-бозона и его последующим распадом на лептонную пару. Именно угловое распределение конечных лептонов и регистрируется в эксперименте.

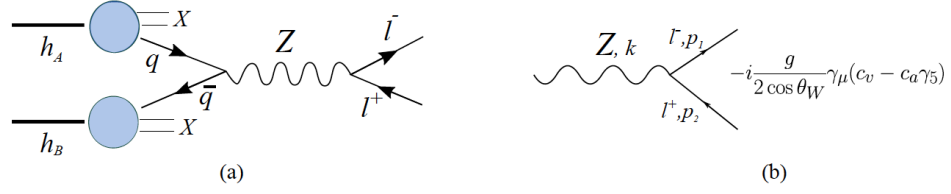


Рис. 2.1. (a) – Процесс Дрелла-Яна; (b) – вершина: распад Z-бозона, p_1, p_2 – импульсы лептонов, k – импульс Z.

Для начала предположим, что нет никаких начальных адронов, а существует просто Z-бозон, который распадается на лептоны. Этот распад происходит за счет электрослабого взаимодействия через нейтральный ток, а описывающий данное взаимодействие Лагранжиан имеет следующий вид:

$$\mathcal{L}_{inter}^{EW} = -i \frac{g}{\cos \theta_w} J_\mu^{NC} Z^\mu = -i \frac{g}{\cos \theta_w} \bar{\psi}_f \gamma_\mu \left[\frac{1}{2} (1 - \gamma_5) T^3 - Q_f \sin^2 \theta_w \right] \psi_f Z^\mu$$

$$\mathcal{L}_{inter}^{EW} = -i \frac{g}{\cos \theta_w} \bar{\psi}_f \gamma_\mu [c_v - c_a \gamma_5] \psi_f Z^\mu \quad (2.5)$$

Тогда матричный элемент, относящийся к Фейнмановской диаграмме распада Z-бозона на пару лептонов будет иметь следующий вид:

$$M = -i \frac{g}{\cos \theta_w} \bar{u}_r(p_1) \gamma_\mu [c_v - c_a \gamma_5] v_s(p_2) e_n^\mu(k) \quad (2.6)$$

Учитывая, что сечение рассеяния $\sigma \sim |M|^2$, а также процесс Дрелла-Яна подразумевает поправку на адронную структуру, то искомое сечение пропорционально свертке:

$$\sigma \sim |M|^2 \sim W^{\mu\nu} \times L_{\mu\nu}, \quad (2.7)$$

где $W^{\mu\nu}$ - адронный тензор, играющий роль матрицы плотности Z-бозона, который - суть билинейная комбинация кварковых токов [12]

$$W^{\mu\nu} \sim \langle p_1 p_2 | J_q^\mu | X \rangle \langle X | (J_q^\nu)^\dagger | p_1 p_2 \rangle \quad (2.8)$$

и обладает следующими свойствами: положительной определенности, эрмитовости, а также поперечности (как следствие определения и закона сохранения заряда $\partial_\mu J^\mu = 0$) $q_\mu W^{\mu\nu} = q_\nu W^{\mu\nu} = 0$.

А в качестве $L_{\mu\nu}$:

$$L_{\mu\nu} = \sum_{r,s} \bar{u}_r(p_1) \gamma_\mu (c_v - c_a \gamma_5) v_s(p_2) \bar{v}_s(p_2) (c_v + c_a \gamma_5) \gamma_\nu u_r(p_1) \quad (2.9)$$

$$L_{\mu\nu} = \gamma_\mu (c_v - c_a \gamma_5) (\hat{p}_1 - m) (c_v + c_a \gamma_5) \gamma_\nu (\hat{p}_2 + m) \quad (2.10)$$

выступает выражение для лептонного тензора.

2.4. Угловое распределение

Общее выражение для угловых распределений может быть записано в терминах спиновых наблюдаемых (коэффициенты углового распределения). Для этого сначала следует рассмотреть общий вид углового распределения. Как правило, чаще всего в литературе рассматривают две параметризации (2.11) и (2.14). Первый вид обычно появляется в экспериментальных работах, а второй в теоретических.

$$\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{3}{16\pi} \left(\left(1 + \frac{A_0}{2}\right) + \left(1 - \frac{3A_0}{2}\right) \cos^2 \theta + A_1 \sin 2\theta \cos \phi + \right. \quad (2.11)$$

$$\left. + \frac{A_2}{2} \sin^2 \theta \cos 2\phi + A_3 \sin \theta \cos \phi + A_4 \cos \theta + A_5 \sin^2 \theta \sin 2\phi + \right. \quad (2.12)$$

$$\left. + A_6 \sin 2\theta \sin \phi + A_7 \sin \theta \sin \phi \right); \quad (2.13)$$

$$\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{3}{4\pi} \frac{1}{3 + \lambda_\theta} (1 + \lambda_\theta \cos^2 \theta + \lambda_{\theta\phi} \sin 2\theta \cos \phi + \quad (2.14)$$

$$\left. + \lambda_\phi \sin^2 \theta \cos 2\phi + \lambda_{\perp\phi} \sin^2 \theta \sin 2\phi + \lambda_{\perp\theta\phi} \sin 2\theta \sin \phi + 2A_\theta \cos \theta + \right. \quad (2.15)$$

$$\left. + 2A_\phi \sin \theta \cos \phi + 2A_{\perp\phi} \sin \theta \sin \phi \right); \quad (2.16)$$

В качестве полного сечения выступает:

$$\sigma_{total} = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega. \quad (2.17)$$

По большому счету, коэффициенты углового распределения не являются независимыми, так как существенное влияние на них оказывает выбор системы координат. Таким образом, производя сравнение между наблюдаемыми, которые были измерены на эксперименте в различных системах координат и теоретическими результатами, можно сформировать характеристики, которые не будут зависеть от выбора системы координат, так называемые, инварианты. Такие характеристики являются мощнейшим инструментом для анализа данных, получаемых в эксперименте. Серьезный прогресс получен при формировании инвариантов, образующих группы вращений $SO(2)$ и $SO(3)$. В данной работе особое внимание уделяется построению формул, описывающих преобразование инвариантов при совершении Эйлеровых поворотов над искомой системой координат.

2.5. Инварианты

Сравним две параметризации: (2.11) и (2.14), сопоставляя коэффициенты при соответствующих членах:

$$\lambda_\theta = \frac{2 - 3A_0}{2 + A_0}, A_0 = \frac{2(1 - \lambda_\theta)}{3 + \lambda_\theta}; \quad (2.18)$$

$$\lambda_\phi = \frac{A_2}{2 + A_0}, A_2 = \frac{8\lambda_\phi}{3 + \lambda_\theta}; \quad (2.19)$$

$$\lambda_{\theta\phi} = \frac{2A_1}{2 + A_0}, A_1 = \frac{4\lambda_{\theta\phi}}{3 + \lambda_\theta}; \quad (2.20)$$

$$\lambda_{\perp\phi} = \frac{2A_5}{2 + A_0}, A_5 = \frac{4\lambda_{\perp\phi}}{3 + \lambda_\theta}; \quad (2.21)$$

$$\lambda_{\perp\theta\phi} = \frac{2A_6}{2 + A_0}, A_6 = \frac{4\lambda_{\perp\theta\phi}}{3 + \lambda_\theta}; \quad (2.22)$$

$$A_\theta = \frac{A_4}{2 + A_0}, A_4 = \frac{8A_\theta}{3 + \lambda_\theta}; \quad (2.23)$$

$$A_\phi = \frac{A_3}{2 + A_0}, A_3 = \frac{8A_\phi}{3 + \lambda_\theta}; \quad (2.24)$$

$$A_{\perp\phi} = \frac{A_7}{2 + A_0}, A_7 = \frac{8A_{\perp\phi}}{3 + \lambda_\theta}; \quad (2.25)$$

Теперь воспользуемся «рецептом», предложенным в [1] для построения адронного тензора в терминах наблюдаемых. Для этого воспользуемся (2.7):

$$\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{d\omega} \propto W^{\mu\nu} L_{\mu\nu} \quad (2.26)$$

Процесс распада будем рассматривать в СЦМ, связанной с дилептоном. Учитывая закон сохранения заряда и свойство поперечности адронного тензора, получим $q_\nu|_{W^{\mu\nu}=0}$, где q_ν - 4-вектор импульса промежуточной векторной частицы. В выбранной системе координат он примет следующий вид: $q_\nu = (q_0, 0, 0)$, тогда в выражении адронного тензора ненулевой останется только пространственная часть, представимая в виде 3×3 - эрмитовой матрицы. Пренебрежем фотонным вкладом и интерференционными членами и получим матричное выражение для лептонного тензора:

$$L^{ij} = ((c_a^2 + c_v^2)(\delta^{ij} - n^i n^j) + 2i c_a c_v \epsilon^{ijk0} n^k),$$

где

$$\epsilon^{ijk0} n^k = \begin{pmatrix} 0 & n^3 & -n^2 \\ -n^3 & 0 & n \\ n^2 & -n & 0 \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

Используя приближение малых лептонных масс, лептонный тензор переписется в следующем виде:

$$L_{ij} \propto \delta_{ij} - n_i n_j + i \epsilon_{ijk} n^k, \quad (2.28)$$

где вектор n_i параллелен вектору импульса положительно заряженного лептона конечного состояния. Предполагаем, что $\vec{n} = (\cos \theta, \sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi)$, тогда:

$$\begin{pmatrix} 1 - \cos^2 \theta & -\cos \theta \cos \phi \sin \theta + 2i \sin \theta \sin \phi & -\cos \theta \sin \phi \sin \theta - 2i \sin \theta \cos \phi \\ -\cos \theta \cos \phi \sin \theta - 2i \sin \theta \sin \phi & 1 - \cos^2 \phi \sin^2 \theta & -\sin^2 \theta \cos \phi \sin \phi + 2i C \cos \theta \\ -\cos \theta \sin \phi \sin \theta + 2i C \sin \theta \cos \phi & -\sin^2 \theta \cos \phi \sin \phi - 2i C \cos \theta & 1 - \sin^2 \theta \sin^2 \phi \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

где введено обозначение $C = \frac{c_a c_v}{c_a^2 + c_v^2}$. Заменяя соответствующие матричные

элементы, приведем к виду:

$$W^{ij} = \begin{pmatrix} d_1 & a_1 + ia_2 & b_1 + ib_2 \\ a_1 - ia_2 & d_2 & c_1 + ic_2 \\ b_1 - ib_2 & c_1 - ic_2 & d_3 \end{pmatrix}, \quad (2.30)$$

где коэффициенты $a_{1,2}, b_{1,2}, c_{1,2}, d_{1,2,3}$ - измеряемые в эксперименте.

Окончательно, произведя свертку $W^{ij}L_{ij}$ и учитывая (2.26), а также сопоставив коэффициенты (2.14):

$$\frac{2}{3 + \lambda_\theta} \begin{pmatrix} \frac{1-\lambda_\theta}{2} & -\lambda_{\theta\phi} - iA_{\perp\phi} & -\lambda_{\perp\theta\phi} + iA_\phi \\ -\lambda_{\theta\phi} + iA_{\perp\phi} & \frac{1+\lambda_\theta-2\lambda_\phi}{2} & -\lambda_{\perp\phi} - iA_\theta \\ -\lambda_{\perp\theta\phi} - iA_\phi & -\lambda_{\perp\phi} + iA_\theta & \frac{1+\lambda_\theta+2\lambda_\phi}{2} \end{pmatrix}, \quad (2.31)$$

получили матрицу, элементы которой выражаются через спиновые наблюдаемые. Эта матрица содержит всю информацию об угловом распределении, а следовательно, если придерживаться данного формализма, то проблема поиска независимых инвариантов вращений решается через вспомогательную задачу о поиске инвариантов матрицы (2.31).

Рассмотрим вопрос, связанный с количеством инвариантов данной матрицы и полностью согласующийся с физическим смыслом рассматриваемой системы. Прежде всего, в выбранной системе координат, может существовать $f = p - e = 8 - 3 = 5$ независимых вращений, так как $p = 8$ - число параметров углового распределения, а $e = 3$ - число углов Эйлера, которые образуют $SO(3)$ - группу вращений. Однако для фотона $e = 2$, так как он является безмассовой частицей, а следовательно, его вектор поляризации может вращаться только в плоскости ортогональной вектору момента импульса, значит существует только два инварианта, которые связаны с параметрами Стокса : $S_1^2 + S_3^2$ и S_2^2 . В общем же случае для фермионов, спин которых $S = \frac{1}{2}$ - полученное не верно! Матрица плотности в данном случае будет разделяться на симметричную и антисимметричную составляющие. Так как матрица (2.31) удовлетворяет свойству единичного следа, то ее можно разложить на часть с единичным следом и сумму симметричной и антисимметричной частей с нулевым следом:

$$W = \frac{1}{3}\mathbf{1} + W_{si}W_a \quad (2.32)$$

После совершения вращений, пространственная часть матрицы подвергнет-

ся преобразованию $W' = S^T W S$, где S - матрица вращений группы $SO(3)$, а W' - матрица, выражающая адронный тензор в новой системе координат.

Тогда (2.32) примет следующий вид:

$$W' = \frac{1}{3}\mathbf{1} + S^T(W_s + iW_a)S = \frac{1}{3}\mathbf{1} + S^T W_s S + iS^T W_a S, \quad (2.33)$$

причем матрицы W_s и W_a преобразуются независимо, значит W_s и W_a и $W_a + iW_s$, а также их различные комбинации - суть инварианты матрицы W . Но тогда задача поиска инвариантов сводится к отысканию собственных значений данной матрицы через характеристическое уравнение вида:

$$\det[F - \mathbf{1}f] = 0. \quad (2.34)$$

В ходе решения данной задачи мы получаем пять инвариантов [1]:

$$U_1 = \frac{A_\theta^2 + A_\phi^2 + A_{\perp\theta\phi}^2}{(3 + \lambda_\theta)^2}, \quad (2.35)$$

$$U_2 = \frac{\lambda_\theta^2 + 3(\lambda_\phi^2 + \lambda_{\theta\phi}^2 + \lambda_{\perp\phi}^2 + \lambda_{\perp\theta\phi}^2)}{(3 + \lambda_\theta)^2}, \quad (2.36)$$

$$T = \frac{(\lambda_\theta + 3\lambda_\phi)(2\lambda_\theta^2 - 6\lambda_\theta\lambda_\phi + 9\lambda_{\theta\phi}^2 + 9(\lambda_\theta\lambda_{\perp\theta\phi}^2 - 2\lambda_\theta\lambda_{\perp\phi}^2 + 6\lambda_{\theta\phi}\lambda_{\perp\theta\phi}\lambda_{\perp\phi} - 3\lambda_\phi\lambda_{\perp\theta\phi}^2))}{(3 + \lambda_\theta)^3}, \quad (2.37)$$

$$R = \frac{1}{(3 + \lambda_\theta)^3} [54(A_\theta A_\lambda \lambda_{\theta\phi} + A_\theta A_{\perp\phi} \lambda_{\perp\theta\phi} + A_{\perp\phi} A_\phi \lambda_{\perp\phi}) + \quad (2.38)$$

$$+ 9\lambda_\theta(2A_\theta^2 - A_{\perp\phi}^2 - A_\phi^2) + 27(A_\phi^2 - A_{\perp\phi}^2)], \quad (2.39)$$

$$M = \frac{1}{(3 + \lambda_\theta)^4} [A_\theta^2(\lambda_\theta^2 - 9\lambda_\phi^2 - 9\lambda_{\perp\phi}^2) - A_p h i^2(2\lambda_\theta(\lambda_\theta + 3\lambda_\phi) + 9\lambda_{\perp\theta\phi}^2) + \quad (2.40)$$

$$+ A_{\theta\phi}^2(6\lambda_\theta\lambda_\phi - 2\lambda_\theta^2 - 9\lambda_{\theta\phi}^2) + 6A_\theta A_{\perp\phi}(\lambda_{\perp\theta\phi}(\lambda_\theta - 3\lambda_\phi) + 3\lambda_{\theta\phi}\lambda_{\perp\phi}) + \quad (2.41)$$

$$+ 6A_\phi [A_\theta(\lambda_{\theta\phi}(\lambda_\theta + 3\lambda_\phi) + 3\lambda_{\perp\theta\phi}\lambda_{\perp\phi}) + A_{\perp\phi}(3\lambda_{\theta\phi}\lambda_{\perp\theta\phi} - 2\lambda_\theta\lambda_{\perp\phi})] \quad (2.42)$$

3. Преобразование инвариантов

3.1. Влияние Эйлера поворота по ϕ на сечение.

Выполним Эйлера поворот по углу ϕ , считая, что $\theta = fixed$. Тогда перейдем от угла $\phi \mapsto \phi'$, преобразующегося по тригонометрическим законам:

$$\phi \mapsto \phi' = \phi + \phi_0 \quad (3.1)$$

$$\cos \phi' = \cos \phi_0 \cos \phi - \sin \phi_0 \sin \phi \quad (3.2)$$

$$\sin \phi' = \sin \phi_0 \cos \phi + \sin \phi \cos \phi_0 \quad (3.3)$$

$$(3.4)$$

Тогда получим:

$$\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{3}{4\pi} \frac{1}{3 + \lambda'_\theta} (1 + \lambda'_\theta \cos^2 \theta + \lambda'_{\theta\phi} \sin 2\theta (\cos \phi_0 \cos \phi - \sin \phi_0 \sin \phi) + \quad (3.5)$$

$$+ \lambda'_\phi \sin^2 \theta (\cos 2\phi_0 \cos 2\phi - \sin 2\phi_0 \sin 2\phi) + \quad (3.6)$$

$$+ \lambda'_{\perp\phi} \sin^2 \theta (\sin 2\phi_0 \cos 2\phi + \sin 2\phi \cos 2\phi_0) + \quad (3.7)$$

$$+ \lambda'_{\perp\theta\phi} \sin 2\theta (\sin \phi_0 \cos \phi + \sin \phi \cos \phi_0) + \quad (3.8)$$

$$+ 2A'_\theta \cos \theta + 2A_\phi \sin \theta (\cos \phi_0 \cos \phi - \sin \phi_0 \sin \phi) + \quad (3.9)$$

$$+ 2A'_{\perp\phi} \sin \theta \sin (\sin \phi_0 \cos \phi + \sin \phi \cos \phi_0) \quad (3.10)$$

Найдем преобразование инвариантов при повороте на угол ϕ . Для этого решим алгебраическую задачу о приведении подобных слагаемых методом группировки. Причем сгруппируем так, чтобы выражение для углового распределения в повернутой системе координат (штрихованной системе координат) приняло такой же вид, как и в исходной, но уже с измененными коэффициентами. Тогда закон их преобразования можно установить, произведя почленное сравнение выражению (2.14) и (3.5):

$$\lambda_\theta = \lambda'_\theta \quad (3.11)$$

$$\lambda_{\theta\phi} = \lambda'_{\theta\phi} \cos \phi_0 + \lambda'_{\perp\theta\phi} \sin \phi_0 \quad (3.12)$$

$$\lambda_\phi = \lambda'_\phi \cos 2\phi_0 + \lambda'_{\perp\phi} \sin 2\phi_0 \quad (3.13)$$

$$\lambda_{\perp\phi} = \lambda'_{\perp\phi} \cos 2\phi_0 - \lambda'_\phi \sin 2\phi_0 \quad (3.14)$$

$$\lambda_{\perp\theta\phi} = \lambda'_{\perp\theta\phi} \cos \phi_0 - \lambda'_{\theta\phi} \sin \phi_0 \quad (3.15)$$

$$A_\theta = A'_\theta \quad (3.16)$$

$$A_\phi = A'_\phi \cos \phi_0 + A'_{\perp\phi} \sin \phi_0 \quad (3.17)$$

$$A_{\perp\phi} = A'_{\perp\phi} \cos \phi_0 - A'_\phi \sin \phi_0 \quad (3.18)$$

Приведем пример, доказывающий справедливость полученных формул преобразования (1.12)-(1.19). Проверим их на преобразовании инвариантов U_2 и T .

$$U_2 = \frac{\lambda_\theta^2 + 3(\lambda_\phi^2 + \lambda_{\theta\phi}^2 + \lambda_{\perp\phi}^2 + \lambda_{\perp\theta\phi}^2)}{(3 + \lambda_\theta)^2} \quad (3.19)$$

$$\lambda_\theta = \lambda'_\theta$$

$$\lambda_\phi^2 = \lambda'_\phi \cos^2 2\phi_0 + \lambda'_{\perp\phi} \sin^2 2\phi_0 + \cancel{\lambda'_\phi \lambda'_{\perp\phi} \sin 4\phi_0}$$

$$\lambda_{\theta\phi}^2 = \lambda'_{\theta\phi} \cos^2 \phi_0 + \lambda'^2_{\perp\theta\phi} \sin^2 \phi_0 + \cancel{\lambda'_{\theta\phi} \lambda'_{\perp\theta\phi} \sin 2\phi_0}$$

$$\lambda_{\perp\phi}^2 = \lambda'^2_{\perp\phi} \cos^2 2\phi_0 + \lambda'_\phi \sin^2 2\phi_0 - \cancel{\lambda'_{\perp\phi} \lambda'_\phi \sin 4\phi_0}$$

$$\lambda_{\perp\theta\phi}^2 = \lambda'^2_{\perp\theta\phi} \cos^2 \phi_0 + \lambda'_{\theta\phi} \sin^2 \phi_0 - \cancel{\lambda'_{\perp\theta\phi} \lambda'_{\theta\phi} \sin 2\phi_0}$$

Произведя почленное сложение и группировку одинаковых слагаемых с использованием основного тригонометрического тождества, получим:

$$(\lambda_\phi^2 + \lambda_{\theta\phi}^2 + \lambda_{\perp\phi}^2 + \lambda_{\perp\theta\phi}^2) = (\lambda'^2_\phi + \lambda'^2_{\theta\phi} + \lambda'^2_{\perp\phi} + \lambda'^2_{\perp\theta\phi})$$

$$3 + \lambda_\theta = 3 + \lambda'_\theta$$

$$\Rightarrow U_2 = U'_2 = inv$$

Если, например, произвести аналогичные алгебраические действия в пакете

Wolfram Mathematica 8 над T , то результат окажется также справедливым:

$$T = T' = inv \quad (3.20)$$

3.2. Влияние Эйлера поворота по θ на сечение.

Для того, чтобы получить формулы преобразований инварианта по углу θ , необходимо для начала установить непосредственно формулы преобразования угла ϕ , который изменяется, в зависимости от преобразований по θ . Общее решение поставленной задачи в координатном представлении является довольно трудоемким, поэтому пойдем немного другим способом. Для начала, рассмотрим поворот оси Oz декартовой системы координат на произвольный угол θ_0 . Тогда вместо координатного представления воспользуемся инвариантной по отношению к преобразованиям поворота величине - скалярному произведению, которое неизменно по отношению к повернутой и непреобразованной системе координат.

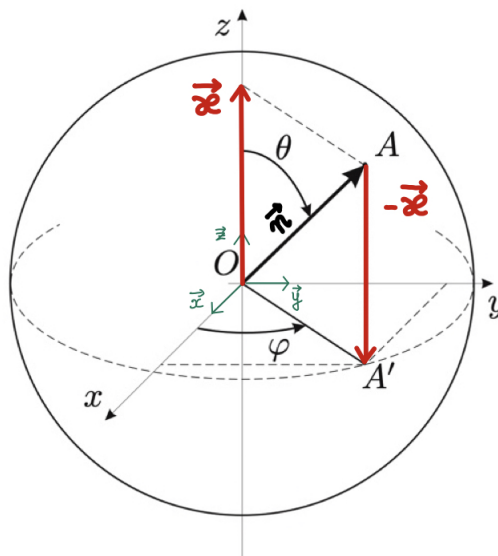


Рис. 3.1. Поворот системы координат на угол θ .

На (Рис. 3.1) в качестве ортов выбраны $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$, такие что $|\vec{x}| = |\vec{y}| = |\vec{z}| = 1$ и $\vec{x} \perp \vec{y} \perp \vec{z}$, а также единичный вектор \vec{n} . Тогда, по определению скалярного произведения:

$$(\vec{n}, \vec{z}) = \cos \theta. \quad (3.21)$$

Введем вектор \vec{b} :

$$\vec{b} = \vec{n} - \vec{\kappa} = \vec{n} - z(\vec{n}, \vec{z}), \quad (3.22)$$

$$(\vec{x}, \vec{b}) = |\vec{b}| \cos \phi, \quad (3.23)$$

Объединяя (3.22) и (3.23):

$$\cos \phi = \frac{\vec{x}(\vec{n} - z(\vec{n}, \vec{z}))}{\sqrt{1 - (\vec{n}, \vec{z})^2}}. \quad (3.24)$$

Тогда, так как при повороте система $\{X, Y, Z\} \rightarrow \{X', Y', Z'\}$, а на (рис. 3.1) и в задаче рассматривается сферическая система координат, то:

$$\vec{X}' = (-\sin \theta_0; \cos \theta_0; 0), \quad (3.25)$$

$$\vec{Z}' = (\cos \theta_0; \sin \theta_0; 0). \quad (3.26)$$

а следовательно, формула преобразования угла ϕ при повороте на θ_0 примет вид (3.27):

$$\boxed{\cos \phi' = \frac{\cos \theta_0 \sin \theta \sin \phi - \sin \theta_0 \cos \theta}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta'}}} \quad (3.27)$$

Аналогичным образом, используя инвариантность скалярного произведения при преобразованиях координат, можно получить формулу преобразования угла $\theta = \theta(\theta_0, \phi)$:

$$\boxed{\cos \theta' = \sin \theta_0 \sin \theta \cos \phi + \cos \theta_0 \cos \theta} \quad (3.28)$$

В самом общем случае, если использовать формулы (3.27) и (3.28) применительно к преобразованию углового распределения (2.26), то полученное выражение будет довольно трудно проанализировать и установить взаимосвязь угловых коэффициентов аналитически. Будем рассматривать следующий вид углового распределения (2.14):

$$\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{3}{4\pi} \frac{1}{3 + \lambda_\theta} (1 + \lambda_\theta \cos^2 \theta + \lambda_{\theta\phi} \sin 2\theta \cos \phi + \quad (3.29)$$

$$+ \lambda_\phi \sin^2 \theta \cos 2\phi + \lambda_{\perp\phi} \sin^2 \theta \sin 2\phi + \lambda_{\perp\theta\phi} \sin 2\theta \sin \phi \quad (3.30)$$

в котором, последние три слагаемых, отвечающие за четность обнулены, так как не учитывается нарушение симметрии. За счет возможности выбора положения плоскости (3.2) относительно которой отсчитывается угол мы обнулим слагаемые, которые содержат $\sin \phi$ и $\sin 2\phi$. Выберем ориентацию плоскости таким образом, что интересующий нас угол образован плоскостями сталкивающихся адронов и возникающего в результате реакции векторного бозона (например, виртуальный фотон, векторный мезон, Z' -бозон). В результате, формула (3.29) примет вид:

$$\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{3}{4\pi} \frac{1}{3 + \lambda_\theta} (1 + \lambda_\theta \cos^2 \theta + \lambda_{\theta\phi} \sin 2\theta \cos \phi + \lambda_\phi \sin^2 \theta \cos 2\phi). \quad (3.31)$$

Попробуем в (3.31) совершить первый Эйлера поворот и получить закон преобразования коэффициентов углового распределения в новой системе координат. Для этого выразим коэффициенты углового распределения (3.31) в новой системе координат (штрихованной системе)

$$\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{3}{4\pi} \frac{1}{3 + \lambda'_\theta} (1 + \lambda'_\theta \cos^2 \theta' + \lambda'_{\theta\phi} \sin 2\theta' \cos \phi' + \lambda'_\phi \sin^2 \theta' \cos 2\phi'). \quad (3.32)$$

подставляя вместо соответствующих тригонометрических функций штрихованного угла их законы преобразований (3.27) и (3.28), получим распределение, в котором каждое слагаемое выражается через старые углы, но уже с новыми (штрихованными) коэффициентами. (см. приложение).

После применения формул классической тригонометрии, приведения подобных слагаемых, мы приведем слагаемые распределения в новой (повернутой системе) к такому же виду, который был в исходной системе, но уже с новыми коэффициентами, стоящими при старых углах, с точностью до нормировочного множителя. Тогда, сравнивая два распределения по коэффициентно, получим закон преобразования каждого коэффициента распределения, где каждое

старое значение коэффициента выражено через штрихованное. Тогда законы преобразования имеют вид:

$$\lambda_\theta = \frac{1}{\gamma} \left(\lambda'_\theta \left(\frac{3 \cos^2 \theta_0 - 1}{2} \right) - \lambda'_{\theta\phi} \left(\frac{3 \sin 2\theta_0}{2} \right) + \lambda'_\phi \left(\frac{3 \sin^2 \theta_0}{2} \right) \right) \quad (3.33)$$

$$\lambda_{\theta\phi} = \frac{1}{\gamma} \left(\lambda'_\theta \left(\frac{\sin 2\theta_0}{2} \right) + \lambda'_{\theta\phi} (\cos 2\theta_0) - \lambda'_\phi \left(\frac{3 \sin 2\theta_0}{2} \right) \right) \quad (3.34)$$

$$\lambda_\phi = \frac{1}{\gamma} \left(\lambda'_\theta \left(\frac{\sin^2 \theta_0}{2} \right) + \lambda'_{\theta\phi} \left(\frac{\sin 2\theta_0}{2} \right) + \lambda'_\phi \left(\frac{1 + \cos^2 \theta_0}{2} \right) \right), \quad (3.35)$$

где нормировочный множитель:

$$\gamma = 1 + \lambda'_\theta \left(\frac{\sin^2 \theta_0}{2} \right) + \lambda'_{\theta\phi} \left(\frac{\sin 2\theta_0}{2} \right) + \lambda'_\phi \left(\frac{\cos^2 \theta_0 - 1}{2} \right) \quad (3.36)$$

Таким образом, получили формулы преобразования коэффициентов, которые можно записать в матричном виде $\Lambda = \frac{1}{\gamma} \Gamma \times \Lambda'$, а именно:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_\theta \\ \lambda_{\theta\phi} \\ \lambda_\phi \end{pmatrix}}_{\Lambda} = \frac{1}{\gamma} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{3 \cos^2 \theta_0 - 1}{2} & -\frac{3 \sin 2\theta_0}{2} & \frac{3 \sin^2 \theta_0}{2} \\ \frac{\sin 2\theta_0}{2} & \cos 2\theta_0 & -\frac{3 \sin 2\theta_0}{2} \\ \frac{\sin^2 \theta_0}{2} & \frac{\sin 2\theta_0}{2} & \frac{1 + \cos^2 \theta_0}{2} \end{pmatrix}}_{\Gamma} \times \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda'_\theta \\ \lambda'_{\theta\phi} \\ \lambda'_\phi \end{pmatrix}}_{\Lambda'} \quad (3.37)$$

Легко убедиться, что формулы (3.27) , (3.28) в предельном случае, а именно, при $\theta_0 \rightarrow 0$ переходят в исходные, то есть отвечают случаю отсутствия поворота:

$$\lambda_\theta = \lambda'_\theta \quad (3.38)$$

$$\lambda_{\theta\phi} = \lambda'_{\theta\phi} \quad (3.39)$$

$$\lambda_\phi = \lambda'_\phi, \quad (3.40)$$

Тогда, используя среду «Wolfram Mathematica 8», путем численного расчета мы убеждаемся в сохранении инвариантов U, T при повороте на угол θ , так как $|U' - U| \rightarrow 0, |T' - T| \rightarrow 0$ (так как существует погрешность машин-

ных вычислений). Численный подбор значений коэффициентов распределения производился исходя из рассмотрения области положительной определенности коэффициентов распределения [1], вытекающих из положительной определенности матрицы плотности в базисе из собственных векторов по теореме Декарта. В силу специального выбора системы координат, проварьированное нами угловое распределение (2.14) перешло в (3.31). Распределение аналогичное по виду, проверялось на эксперименте RHENIX для измерений в распадах $J/\psi \rightarrow \mu^- \mu^-$, в pp -столкновениях. Для вида распределения (3.31) возникает инвариант вращений:

$$\lambda = \frac{\lambda_\theta + 3\lambda_\phi}{1 - \lambda_\phi} \quad (3.41)$$

Тогда, используя формулы преобразований (3.33) проверяется справедливость инвариантности (3.41).

Введем обозначения:

$$\cos \theta_0 =: c \quad (3.42)$$

$$\sin \theta_0 =: s \quad (3.43)$$

и получим:

$$\begin{aligned} \lambda_\theta &= \frac{1}{\gamma} (\lambda'_\theta \frac{3}{2} c^2 - \lambda'_\theta \frac{1}{2} + \lambda'_{\theta\phi} (-3sc) + \lambda'_\phi \frac{3}{2} s^2) \\ 3\lambda_\phi &= \frac{1}{\gamma} (\lambda'_\theta \frac{3}{2} s^2 + \lambda'_{\theta\phi} (3sc) + \lambda'_\phi \frac{3}{2} c^2 + \lambda'_\phi \frac{3}{2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_\theta + 3\lambda_\phi}{1 - \lambda_\phi} &= \frac{\lambda'_\theta \underbrace{(\frac{3}{2}c^2 + \frac{3}{2}s^2 - \frac{1}{2})}_{s^2+c^2=1} + \cancel{\lambda'_{\theta\phi}(-3sc)} + \lambda'_\phi \underbrace{(\frac{3}{2}s^2 + \frac{3}{2}c^2 + \frac{3}{2})}_{s^2+c^2=1} + \cancel{\lambda'_{\theta\phi}(3sc)}}{\gamma(1 - \frac{\lambda_\phi}{\gamma})} \\ &= \frac{\lambda'_\theta + 3\lambda'_\phi}{1 - \lambda_\phi} \end{aligned}$$

теперь отдельно произведем преобразование знаменателя:

$$\begin{aligned}
(\gamma(1 - \frac{\lambda_\phi}{\gamma})) &= (\gamma - \lambda_\phi) = (1 + \cancel{\lambda'_\theta \frac{s^2}{2}} + \cancel{\lambda'_{\theta\phi} sc} + \cancel{\lambda'_\phi \frac{c^2}{2}} - \lambda'_\phi \frac{1}{2} - \cancel{\lambda'_\theta \frac{s^2}{2}} - \\
&= \cancel{\lambda'_{\theta\phi} sc} - \lambda'_\phi \frac{1}{2} + \cancel{\lambda'_\phi \frac{c^2}{2}}) = \\
&= (1 - \lambda'_\phi)
\end{aligned}$$

Тогда получаем

$$\frac{\lambda_\theta + 3\lambda_\phi}{1 - \lambda_\phi} = \frac{\lambda'_\theta + 3\lambda'_\phi}{1 - \lambda'_\phi} = inv$$

Таким образом, мы убедились в справедливости полученных формул и независимости (3.41) от угла вращений θ , а следовательно, аналитически доказали сохранение инварианта при преобразованиях.

Также для аналитической проверки также можно рассмотреть более простой случай углового распределения в пределах процесса Дрелла-Яна, на примере углового распределения дилептонов. Имеющиеся законы преобразования можно попытаться применить для получения формул преобразования угла некомпланарности [8], возникающего между адронной и лептонной плоскостями.

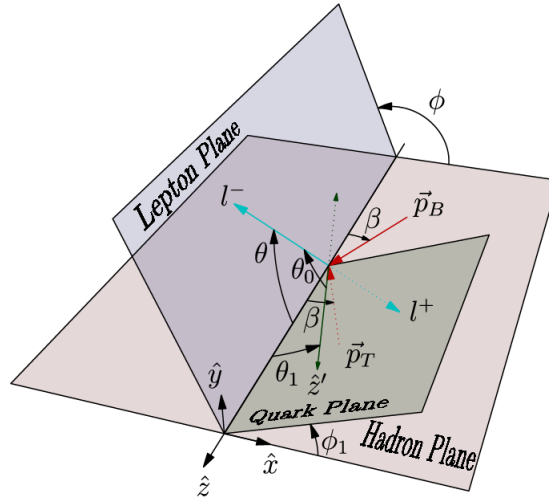


Рис. 3.2. Система отсчета и различные плоскости, образованные ориентацией моментов сталкиваемых адронов.

3.3. Соотношение Лэма-Тунга.

Азимутальные асимметрии Дрелл-Яновских пар в адронных столкновениях являются предметом теоретических и экспериментальных исследований длительное время. Существуют различные динамические механизмы, которые могут вызывать характерные асимметрии. Тем самым, они играют важную роль в области физики высоких энергий и ядерной физики. С одной стороны, их можно легко изучить экспериментально, а с другой стороны теоретически, в терминах тензора поляризации виртуальных фотонов. Недавно на детекторе CMS был проведен эксперимент, который открыл возможность исследования асимметрии методами кинематики. Скорее всего кинематический способ поможет рассмотреть более детально динамические механизмы, опираясь на энергетический подход и имеющуюся массовую зависимость дилептонов.

Рассмотрим угловое распределение дилептонов, которое имеет следующий вид [3]:

$$d\sigma \propto 1 + \lambda \cos^2 \theta + \mu \sin 2\theta \cos \phi + \frac{\nu}{2} \sin^2 \theta \cos 2\phi, \quad (3.44)$$

где углы θ и ϕ - полярный и азимутальный углы лептонов в системе их центра масс, а угловые коэффициенты λ, μ, ν - независимы и определяются из тензора поляризации виртуального фотона.

Из теории поля известно соотношение Лэма-Тунга $\lambda + 2\nu = 1$, которое описывает кинематическую составляющую азимутальной асимметрии, возникающей как эффект перехода от системы центра масс к естественной системе отсчета.

Получим выражения для соответствующих коэффициентов, связанные с элементами тензора поляризации. Для этого перепишем (3.44) в инвариантном представлении через скалярное произведение, по аналогии с тем как это было сделано при получении формул преобразования азимутального угла. Пусть вектор \vec{m} и \vec{n} характеризуют направление движения лептонов. Тогда углы θ, θ_0 - образованы между осью oZ и соответствующими направляющими векторами. Значит (3.44) примет вид:

$$d\sigma \propto 1 + \lambda_0 \cos^2 \theta_{nm}. \quad (3.45)$$

Учитывая (3.28), получим

$$d\sigma' \propto 1 + \frac{\lambda_0}{2} \sin^2 \theta_0 + \lambda_0 \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta_0\right) \cos^2 \theta + (\lambda_0 \cos \theta_0 \sin \theta_0) \cos \phi \sin 2\theta + \quad (3.46)$$

$$+ \left(\frac{\lambda_0}{2} \sin^2 \theta_0\right) \sin^2 \theta \cos 2\phi. \quad (3.47)$$

Сопоставляя с (3.44), получим:

$$\lambda = \lambda_0 \frac{2 - 3 \sin^2 \theta_0}{2 + \lambda_0 \sin^2 \theta_0}, \quad (3.48)$$

$$\nu = \lambda_0 \frac{2 \sin^2 \theta_0}{2 + \lambda_0 \sin^2 \theta_0}. \quad (3.49)$$

Если исключить $\sin^2 \theta_0$, то получим выражение, определяющее λ_0 через параметры Лэма-Гунга:

$$\lambda_0 = \frac{\lambda + \frac{3}{2}\nu}{1 - \frac{\nu}{2}}. \quad (3.50)$$

4. Заключение

Полученные в ходе работы результаты, доказывают справедливость инвариантов U_1, U_2, T при совершении Эйлера поворота по полярному углу ϕ , считая $\theta = const$ (3.1), а также рассматривается Эйлера преобразование по углу θ , при котором происходит одновременное изменение полярного угла (3.27) и (3.28). Получены формулы преобразования коэффициентов углового распределения для двух ситуаций. В первом случае, когда совершается полярный поворот, а азимутальное направление сохраняется, то формулы преобразования коэффициентов распределений принимают вид (3.11).

Второй случай применяется к угловому распределению (3.29), в котором коэффициенты, описывающие четность (последние три слагаемых), обнулены, причем без ограничения общности, так как мы выбрали специальную удобную систему отсчета (3.2), а соответственно упростили вид распределения. Формулы (3.33) описывают преобразование коэффициентов, в самом общем случае, когда совершается азимутальный поворот ($\theta \neq const$). Аналитически и численно произведена проверка формул на примере инварианта вращения, исследованного в эксперименте PHENIX - λ . Ожидается сохранение инвариантности даже при изменении азимутального угла для всех инвариантов исходного распределения (2.14).

На данный момент произведена численная проверка для инвариантов U_2, T в «Wolfram Mathematica». Получение законов преобразования оставшихся коэффициентов, а также проверка сохранения инвариантов R, M, S сейчас находятся в процессе активной разработки. Таким образом, преобразования, возникающие за счет симметрии углового распределения, позволили получить формулы, которые описывают переход из исходной системы координат в повернутую. Формулы, представленные в настоящей работе, существенным образом могут быть применимы к описанию и анализу состояний с большим орбитальным моментом, закрученным состояниям [13] [16] [15], приложениям квантовой хромодинамики [10], частицам со спином $S = 2$ (гравитонам) в теории сильной гравитации. Также еще одной важной задачей, которая может быть представлена к решению с использованием формул преобразования коэффициентов распределения, может служить задача о поиске преобразований для угла некоммутируемости [9], возникающего в дилептонных распадах.

В настоящий момент, производится разработка программного обеспечения,

а именно, программных кодов, которые смогут значительно облегчить анализ и численные расчеты на основе законов преобразования углового распределения для различных процессов. В итоге, получен мощный инструмент - отдельные преобразования коэффициентов - необходимый как теоретикам, так и экспериментаторам. По большому счету, в работе была установлена связь между релятивистской кинематикой и группой вращений Лоренца, что побуждает к созданию универсального «рецепта» поиска инвариантов для разного рода исследуемых процессов, в особенности, при изучении закрученных состояний.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. M. Gavrilova, O. Teryaev. Rotation-invariant observables as Density Matrix invariants. arXiv:1901.04018v1 [hep-ph], 13 Jan 2019.
2. T. Aaltonen, B. A. Gonzalez, S. Amerio, D. Amidei, A. Anastassov, A. Annovi, J. Antos, G. Apollinari, J. Appel, A. Apresyan, et al., Physical review letters 106, 241801 (2011).
3. O. V. Teryaev, KINEMATIC AZIMUTHAL ASYMMETRIES AND LAM-TUNG RELATION, arXiv:2012.11720v1 [hep-ph] 21 Dec 2020
4. CMS collaboration и др. «Angular coefficients of Z bosons produced in pp collisions at and decaying to $\mu^+\mu^-$ as a function of transverse momentum and rapidity». В: Physics Letters B 750 (2015), с. 154—175.
5. Georges Aad и др. «Measurement of the angular coefficients in Z-boson events using electron and muon pairs from data taken at $s=8$ TeV with the ATLAS detector». В: Journal of High Energy Physics 2016.8 (2016), с. 159.
6. C. collaboration et al., Physics Letters B 750, 154 (2015).
7. G. Aad, B. Abbott, J. Abdallah, O. Abdinov, B. Abeloos, R. Aben, O. AbouZeid, N. Abraham, H. Abramowicz, H. Abreu, et al., Journal of High Energy Physics 2016, 159 (2016).
8. Jen-Chieh Peng, Wen-Chen Chang, Randall Evan McClellan, Oleg Teryaev, Lepton angular distribution of Z boson production and jet discrimination, arXiv:1907.10483v1 [hep-ph] 20 Jul 2019
9. Yang Lyu, Wen-Chen Chang, Randall Evan McClellan, Jen-Chieh Peng, Oleg Teryaev, Lepton angular distribution of W boson productions, arXiv:2010.01826v2 [hep-ph] 16 Feb 2021
10. Wen-Chen Chang, Randall Evan McClellan, Jen-Chieh Peng, Oleg Teryaev, QCD effects in lepton angular distributions of Drell-Yan production and jet discrimination, arXiv:2101.11160v1 [hep-ph] 27 Jan 2021
11. O. Teryaev, in X1 Advanced Research Workshop on High Energy Spin Physics, DUBNA-SPIN-05 (2005) pp. 171-174-67.
12. Xavier Artru, Mokhtar Elchikh, Jean-Marc Richard, Jacques Soffer и Oleg Teryaev. «Spin observables and spin structure functions: inequalities and dynamics». В: Physics Reports 470.1 (2009), с. 1—92.
13. Konstantin Y. Bliokh, Aleksandr Y. Bekshaev, Franco Nori, Extraordinary momentum and spin in evanescent waves.

14. Б. А. Князев, В.Г. Сербо, Пучки фотонов с ненулевой проекцией орбитального момента импульса: новые результаты. УФН, Том 188 №5, Май 2018
15. Mircea Baznat, Konstantin Gudima, Alexander Sorin, Oleg Teryaev, Helicity separation in Heavy-Ion Collisions, arXiv:1301.7003v1 [nucl-th] 29 Jan 2013
16. M. Baznat, K. Gudima, A. Sorin, O. Teryaev, Chaotic vortical flows and their manifestations, EPJ Web of Conferences 126, 02030 (2016) DOI: 10.1051/epjconf/201612602030 ICNFP 2015
17. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Курс теоретической физики, Т.3. Квантовая механика (нерелятивистская теория) / под ред. Л.П. Питаевского. - 6-е изд. испр.с-, М: ФИЗМАТЛИТ, 2008. - 800 с. - ISBN 978-5-9221-0530-9
matr Блум К. Теория матрицы плотности и ее приложения. М.:Мир, 1983
18. А. Е. Умнов. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. 2006.
19. М. Хамермеш. Теория групп и ее применение к физическим проблемам, Мир, 1966.
20. PARTICLE PHYSICS BOOKLET, Extracted from the Review of Particle Physics, M. Tanabashi et al (Particle Data Group), Phys. Rev. D 98, 2020.

Приложение

Out[1]= $\cos[x] \times \cos[x0] + \cos[y] \times \sin[x] \times \sin[x0]$

Out[2]= $\csc[x1] \times (\cos[x0] \times \cos[y] \times \sin[x] - \cos[x] \times \sin[x0])$

Out[3]= $(\cos[x] \times \cos[x0] + \cos[y] \times \sin[x] \times \sin[x0])^2$

Out[4]= $2 (\cos[x0] \times \cos[y] \times \sin[x] - \cos[x] \times \sin[x0]) \times (\cos[x] \times \cos[x0] + \cos[y] \times \sin[x] \times \sin[x0])$

Out[5]= $(-1 + 2 \csc[x1]^2 (\cos[x0] \times \cos[y] \times \sin[x] - \cos[x] \times \sin[x0])^2) \sin[x1]^2$

Out[6]= $(-1 + 2 \csc[x1]^2 (\cos[x0] \times \cos[y] \times \sin[x] - \cos[x] \times \sin[x0])^2) \times$
 $(1 - (\cos[x] \times \cos[x0] + \cos[y] \times \sin[x] \times \sin[x0])^2)$

Out[7]= $\cos[x]^2 \cos[x0]^2 + 2 \cos[x] \times \cos[x0] \times \cos[y] \times \sin[x] \times \sin[x0] + \cos[y]^2 \sin[x]^2 \sin[x0]^2$

Out[8]= $2 \cos[x] \cos[x0]^2 \cos[y] \times \sin[x] - 2 \cos[x]^2 \cos[x0] \times \sin[x0] +$
 $2 \cos[x0] \cos[y]^2 \sin[x]^2 \sin[x0] - 2 \cos[x] \times \cos[y] \times \sin[x] \sin[x0]^2$

Out[9]= $2 \cos[x0]^2 \cos[y]^2 \sin[x]^2 - 4 \cos[x] \times \cos[x0] \times \cos[y] \times \sin[x] \times \sin[x0] + 2 \cos[x]^2 \sin[x0]^2 - \sin[x1]^2$

Out[10]= $-1 + \cos[x]^2 \cos[x0]^2 + 2 \cos[x0]^2 \cos[y]^2 \csc[x1]^2 \sin[x]^2 - 2 \cos[x]^2 \cos[x0]^4 \cos[y]^2 \csc[x1]^2 \sin[x]^2 +$
 $2 \cos[x] \times \cos[x0] \times \cos[y] \times \sin[x] \times \sin[x0] - 4 \cos[x] \times \cos[x0] \times \cos[y] \csc[x1]^2 \sin[x] \times \sin[x0] +$
 $4 \cos[x]^3 \cos[x0]^3 \cos[y] \csc[x1]^2 \sin[x] \times \sin[x0] - 4 \cos[x] \cos[x0]^3 \cos[y]^3 \csc[x1]^2 \sin[x]^3 \sin[x0] +$
 $2 \cos[x]^2 \csc[x1]^2 \sin[x0]^2 - 2 \cos[x]^4 \cos[x0]^2 \csc[x1]^2 \sin[x0]^2 +$
 $\cos[y]^2 \sin[x]^2 \sin[x0]^2 + 8 \cos[x]^2 \cos[x0]^2 \cos[y]^2 \csc[x1]^2 \sin[x]^2 \sin[x0]^2 -$
 $2 \cos[x0]^2 \cos[y]^4 \csc[x1]^2 \sin[x]^4 \sin[x0]^2 - 4 \cos[x]^3 \cos[x0] \times \cos[y] \csc[x1]^2 \sin[x] \sin[x0]^3 +$
 $4 \cos[x] \times \cos[x0] \cos[y]^3 \csc[x1]^2 \sin[x]^3 \sin[x0]^3 - 2 \cos[x]^2 \cos[y]^2 \csc[x1]^2 \sin[x]^2 \sin[x0]^4$

Рис. .1. Преобразования тригонометрических функций при угловых поворотах, выполненные в Wolfram Mathematica.

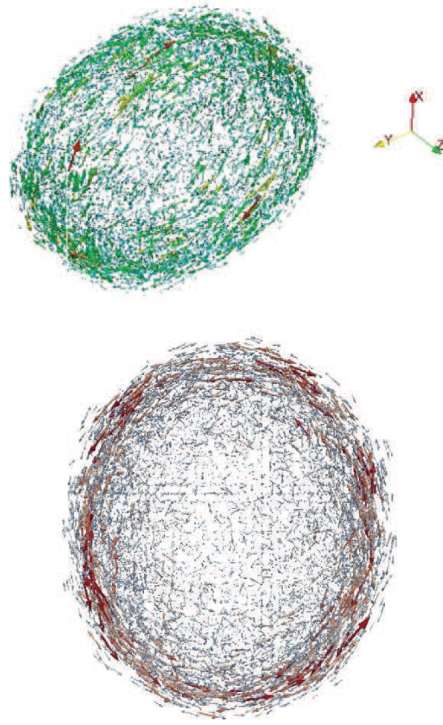


Рис. .2. Поле завихренностей в Au+Au столкновениях с энергией $\sqrt{s_{NN}} = 5\text{Gev}$

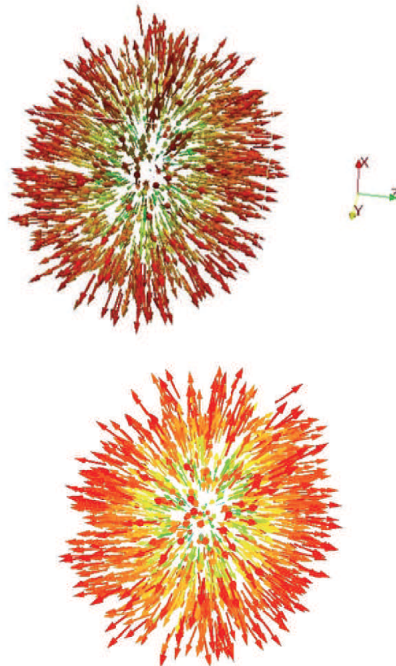


Рис. .3. Поле скоростей в Au+Au столкновениях с энергией $\sqrt{s_{NN}} = 5\text{Gev}$