

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ФИЗИКИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ
«ПРИМЕНЕНИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ МАГНУСА ДЛЯ РАСЧЁТА ВЕРОЯТНОСТИ
ОСЦИЛЛЯЦИЙ АТМОСФЕРНЫХ НЕЙТРИНО»

Выполнила студентка
209 группы
Шайдурова Арина Владимировна

Научный руководитель
доктор физ.-мат. наук Наумов Д. В.

Консультант
младший научный сотрудник ЛЯП ОИЯИ Тресков К. А.

Допущена к защите _____
Зав. кафедрой академик РАН
Матвеев В. А.

Москва
2021

Содержание

Введение	4
1 Краткая история развития нейтринной физики	6
2 Нейтринные осцилляции	9
2.1 Вакуумные осцилляции	11
2.2 Осцилляции в веществе	13
2.2.1 Наблюдаемые проявления МСВ	17
2.2.2 Условие резонанса МСВ	17
2.2.3 Условие адиабатичности	19
2.3 Параметры нейтринных осцилляций	20
3 Атмосферные нейтрино	24
3.1 Источники атмосферных нейтрино	24
3.2 Методы детектирования	25
3.2.1 Квазиупругое рассеяние	26
3.2.2 Упругое рассеяние	26
3.2.3 Резонансное рождение	27
3.2.4 Глубоконеупругое рассеяние	28
4 Распространение нейтрино в Земле	29
4.1 Модель PREM	29
4.2 Плотность вещества вдоль траектории нейтрино	29
4.3 Плотность электронов вдоль траектории нейтрино	32
5 Решение уравнения нейтринных осцилляций в веществе	34
5.1 Разложение Магнуса	34
5.2 Численная реализация алгоритма	39
5.2.1 Метод M2	40
5.2.2 Метод M4	40

5.3	Переменный шаг интегрирования	41
5.4	Вычисление матричной экспоненты	42
5.5	Сегментный счет	44
6	Результаты	46
6.1	Вычисление распределения электронов	47
6.2	Вычисление вероятности осцилляции атмосферных нейтрино .	48
6.3	Постоянная плотность вещества: кора Земли	52
6.4	Выводы	55
	Заключение	56
	Список использованных источников	57

Введение

На данный момент нейтринная физика представляет собой один из важнейших рубежей физики элементарных частиц. Изучение нейтрино сыграло важную роль в построении и подтверждении Стандартной Солнечной Модели. Также эта частица является одним из важных элементов построения физики за пределами Стандартной Модели.

Большим событием явилось наблюдение осцилляций типов (ароматов) нейтрино в процессе распространения частицы. К настоящему моменту факт осцилляций подтверждён многочисленными экспериментами с солнечными, атмосферными, реакторными и ускорительными нейтрино.

Прекрасным инструментом для изучения этого явления могут быть атмосферные нейтрино, так как они имеют широкий диапазон энергий и содержат частицы и античастицы всех ароматов. Но, прежде чем попасть в детектор, они проходят сквозь всю планету, что необходимо учитывать при анализе, так как наличие вещества оказывает существенное влияние на осцилляции.

Наблюдаемой величиной в осцилляционных экспериментах является вероятность перехода нейтрино из одного аромата в другой. В вакуумном случае её выводят аналитически, но при наличии вещества всё усложняется и необходимо решать матричное дифференциальное уравнение на эволюцию состояния аромата нейтрино. Как правило, применяют методы численного интегрирования.

Однако универсальные методы, как, например, схемы Рунге-Кутты, в общем случае не сохраняют норму решения на каждом этапе интегрирования. Метод, основанный на разложении Магнуса [1], лишен этого недостатка и может быть применен к данной задаче. Сохранение нормы вектора волновой функции нейтрино является принципиальным моментом, так как гарантирует, что сумма всех вероятностей будет равна единице.

Данная работа посвящена созданию пакета вычисления вероятностей осцилляций атмосферных нейтрино с применением разложения Магнуса. Для достижения этой цели, были поставлены следующие задачи:

- реализовать модуль расчёта распределения электронов на пути нейтрино;
- написать алгоритм вычисления вероятности нейтринных осцилляций на основе разложения Магнуса.

Актуальность данной работы связана с последующим применением написанного пакета для осцилляционного анализа с атмосферными нейтрино в реакторном эксперименте JUNO. Совместный анализ реакторных и атмосферных данных может значительно улучшить чувствительность JUNO к определению иерархии масс. Также данный пакет может быть применим к исследованиям нейтринной томографии Земли.

1 Краткая история развития нейтринной физики

Впервые наличие нейтрино было предсказано В. Паули на конференции в Тюбингене 4 декабря 1930 года. Неопубликованное письмо было позже воспроизведено в работе [2]. В нём было постулировано существование нейтрального фермиона с близкой к нулю массой. Целью введения такой частицы было обеспечение сохранения энергии, импульса и углового момента в β -распаде ядер. В. Паули предложил назвать частицу «нейтроном», который должен был исключительно слабо взаимодействовать с веществом, чтобы покинуть экспериментальную установку незамеченным. Вскоре, после открытия в 1932 году Джеймсом Чедвиком известного на сегодняшний день нейтрона [3], частицы нейтральной, но тяжелой и сильновзаимодействующей, Ферми в своей работе [4] предложил называть гипотетический «нейтрон» Паули «маленьким нейтроном» или, по-итальянски, нейтрино.

В 1934 году Рудольф Пайерлс и Ганс Бете с помощью теории Ферми оценили сечение взаимодействия нейтрино в веществе для энергий порядка нескольких МэВ [5]. Полученная оценка $\sigma < 10^{-44}$ см² соответствовала длине свободного пробега частицы примерно тысяче световых лет. Столь слабое взаимодействие с веществом заставляло сомневаться в возможности экспериментального наблюдения нейтрино.

Тем не менее, (анти)нейтрино были зарегистрированы в 1956 году в эксперименте Рейнса и Коуэна [6] с помощью реакции обратного β -распада [7].

Впоследствии выяснилось, что открытое антинейтрино — электронного типа. Далее последовали открытия мюонного нейтрино в 1961 [8] и таонного — в 2000 [9].

Параллельно исследовались различные нейтринные свойства: было обнаружено нарушение четности [10; 11], определена спиральность [12], изучалось рассеяние на других частицах, были подняты вопросы эквивалентности частицы и античастицы для нейтрино [13].

В 1968 году впервые наблюдались солнечные нейтрино экспериментом Homestake [14], однако, наблюдаемый поток ν_e был ниже ожидаемого в 2 – 3

раза, что сильно противоречило стандартной модели Солнца. Это несоответствие наблюдений и теории назвали проблемой дефицита солнечных нейтрино, которая позже была объяснена осцилляциями нейтрино в веществе Солнца.

Нейтринные осцилляции были предложены ранее, в 1957 году, Бруно Понтекорво. В основе его предположения лежало то, что, аналогично $K_0 - \bar{K}_0$ осцилляциям [15], существуют нейтрино-антинейтринные осцилляции [16; 17].

Хотя осцилляций нейтрино-антинейтрино в природе не наблюдается, идея Понтекорво стала основой для развития теории осцилляций ароматов нейтрино, предложенной в 1962 году Маки, Накагавой и Сакатой [18]. В их подходе использовалась совершенно иная точка зрения: она была основана на попытке единого понимания лептонов и адронов, тогда как Понтекорво проводил аналогию с K -мезонами.

Годом позже была предложена связь между смешиванием нейтрино определённой массы с нейтрино определённого аромата Накагавой, Окониги, Сакатой и Тойодой [19].

После стали появляться различные теоретические модели взаимодействия нейтрино с веществом. В 1978 году Вольфенштейн указал на эффект, возникающий при распространении нейтрино через обычное вещество [20]. Позднее Михеев и Смирнов нашли ошибку в формуле, рассмотрели случай переменной плотности вещества и указали на обязательное существование резонансного усиления осцилляций солнечных нейтрино при прохождении через вещество Солнца [21—23].

Наконец, в 1998 году Super-Kamiokande сообщил об обнаружении осцилляций нейтрино [24]. Данные результаты через нескольких лет были подтверждены экспериментом SNO [25]. За это в 2015 году Такааки Кадзита и Артур Макдональд были удостоены Нобелевской премии. Наблюдение нейтринных осцилляций означает наличие у нейтрино ненулевой массы, что выходит за пределы Стандартной модели физики частиц.

Результаты ряда экспериментов указывают на дефицит наблюдаемых потоков нейтрино [26—29]. Данные результаты возможно объяснить введением дополнительного не участвующего в слабом взаимодействии типа нейтрино —

стерильного нейтрино[30]. Поиски стерильного нейтрино ведутся до сих пор.

2 Нейтринные осцилляции

В общем случае нейтринные поля ν_α , $\alpha \in \{e, \mu, \tau, \dots\}$, обладающие определённым ароматом, являются суперпозицией полей ν_k , $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$, обладающих определённой массой $\{m_1, m_2, m_3, \dots\}$ соответственно. Первые отвечают за взаимодействия, а вторые — за распространение в пространстве.

Количество состояний с определённой массой N должно совпадать с количеством состояний с определённым ароматом, к настоящему моменту это число еще не найдено.

Нижняя граница устанавливается количеством активных (лёгких) типов нейтрино N_{act} , которое было измерено ускорительными экспериментами [31], и значение $N_{\text{act}} = 3$ согласуется с их результатами:

$$N_{\text{act}}^{\text{exp}} = 2.9840 \pm 0.0082. \quad (2.1)$$

Три типа активных нейтрино соответствует ароматам $\alpha \in \{e, \mu, \tau\}$. Верхняя граница определяется тем, сколько из предполагаемых стерильных типов нейтрино существует:

$$N = N_{\text{act}} + N_s, \quad N \geq 3, \quad (2.2)$$

где N_s — количество стерильных (тяжёлых) типов нейтрино. В дальнейшем будет рассмотрена только трёхнейтринная схема.

Согласно Стандартной модели нейтрино в реакциях всегда рождается с определённым ароматом, как следствие закона сохранения лептонного числа¹. Однако за счет неравенства масс $m_1 \neq m_2 \neq m_3$, массовые состояния нейтрино набирают разную фазу, и возникает возможность зарегистрировать аромат, отличающийся от исходного. В этом состоит суть явления, называемого нейтринными осцилляциями.

Состояние с определённым ароматом α представляется в виде линейной суперпозиции состояний с определённой массой. Доли массовых состояний опре-

¹За пределами Стандартной модели существуют также теории, предполагающие несохранение лептонного числа во взаимодействиях нейтрино, например [32].

деляются из матрицы смешивания² U :

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_k U_{\alpha k}^* |\nu_k\rangle, \quad (2.3)$$

если существует только три типа нейтрино, то матрица (2.3) является унитарной.

Массовые состояния так же могут быть представлены в виде суперпозиции ароматных:

$$|\nu_k\rangle = \sum_\alpha U_{\alpha k} |\nu_\alpha\rangle. \quad (2.4)$$

Базисы векторных ароматных и массовых пространств ортонормированы:

$$\langle\nu_\alpha|\nu_\beta\rangle = \delta_{\alpha\beta}, \quad \langle\nu_k|\nu_j\rangle = \delta_{kj}. \quad (2.5)$$

После рождения нейтрино с определённым ароматом α в момент времени $t = 0$, его вектор состояния $|\nu_\alpha(t)\rangle$ подчиняется уравнению Шрёдингера, в системе единиц $\hbar = c = 1$:

$$i \frac{d}{dt} |\nu_\alpha(t)\rangle = H |\nu_\alpha(t)\rangle, \quad |\nu_\alpha(t=0)\rangle = |\nu_\alpha\rangle, \quad (2.6)$$

данное уравнение можно записать как в массовом базисе, так и в ароматном. В общем случае полный гамильтониан H состоит из двух частей:

$$H = H_0 + H_I, \quad (2.7)$$

где H_0 — вакуумный гамильтониан, а H_I отвечает за вещество.

Решив уравнение (2.6), можно посчитать наблюдаемую величину — вероятность регистрации нейтрино с ароматом β , её также называют вероятностью осцилляций (перехода) нейтрино из аромата α в β .

²Матрица смешивания U в случае с 3 типами нейтрино является PMNS-матрицей (Понтекорво-Маки-Накагава-Саката).

Вероятность перехода $\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta$ записывается следующий образом:

$$P_{\alpha\beta}(t) = |\langle \nu_\beta | \nu_\alpha(t) \rangle|^2, \quad (2.8)$$

она зависит от времени (расстояния) и должна подчиняться условию $\forall t$, где включён случай равенства начального и конечного ароматов³:

$$\sum_{\beta} P_{\alpha\beta}(t) = 1. \quad (2.9)$$

2.1 Вакуумные осцилляции

Стандартный квантовомеханический подход рассматривает массовые состояния нейтрино как состояния с определённым импульсом — плоские волны. Другими словами, массовое состояние нейтрино $|\nu_k(t=0)\rangle = |\nu_k\rangle$ является собственным состоянием вакуумного Гамильтониана:

$$H_0 |\nu_k\rangle = E_k |\nu_k\rangle, \quad E_k = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_k^2}. \quad (2.10)$$

В случае распространения нейтрино в вакуума, где $H = H_0$, общее решение уравнения (2.6) в массовом базисе имеет вид:

$$i \frac{d}{dt} |\nu_k(t)\rangle = H_0 |\nu_k(t)\rangle \quad \rightarrow \quad |\nu_k(t)\rangle = e^{-iE_k t} |\nu_k\rangle. \quad (2.11)$$

В предположении, что в момент времени $t = 0$, нейтрино находилось во ароматном состоянии α , учитывая (2.3) и (2.11), находим эволюцию аромата во времени

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = \sum_k U_{\alpha k}^* e^{-iE_k t} |\nu_k\rangle. \quad (2.12)$$

Подставляя в (2.8) выражение (2.12) и сопряжённое ему (2.3), получим сле-

³В таком случае вероятность перехода называется вероятностью выживания.

дующее

$$P_{\alpha\beta}(t) = \sum_{k,n} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha n} U_{\beta n}^* e^{-i(E_k - E_n)t}, \quad (2.13)$$

которое можно упростить рядом тождественных преобразований

$$P_{\alpha\beta}(t) = \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{k>n} \operatorname{Re}(U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha n} U_{\beta n}^*) \sin^2 \frac{(E_k - E_n)t}{2} + \\ + 2 \sum_{k>n} \operatorname{Im}(U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha n} U_{\beta n}^*) \sin(E_k t - E_n t). \quad (2.14)$$

Так как в большинстве случаев нейтрино являются ультрарелятивистскими частицами, то из-за малости массы в сравнении с кинетической энергией, можно использовать следующее приближение:

$$E_k = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_k^2} \approx E + \frac{m_k^2}{2E}, \quad E_k - E_n \approx \frac{\Delta m_{kn}^2}{2E}, \quad (2.15)$$

где $\Delta m_{kn}^2 \equiv m_k^2 - m_n^2$ и $E = |\mathbf{p}|$.

Наиболее используемым видом (2.14) с учётом приближения (2.15) и $t \approx L$, где L это расстояние, которое нейтрино преодолело в вакууме, является

$$P_{\alpha\beta}(L, E) \approx \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{k>n} \operatorname{Re}(U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha n} U_{\beta n}^*) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{kn}^2 L}{4E} \right) + \\ + 2 \sum_{k>n} \operatorname{Im}(U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha n} U_{\beta n}^*) \sin \left(\frac{\Delta m_{kn}^2 L}{2E} \right). \quad (2.16)$$

Чтобы получить аналогичное выражение для антинейтрино, достаточно применить операцию комплексного сопряжения к полученной формуле.

Из выражения (2.16) видно, что осцилляции аромата возможны лишь в том случае, если массы $\{m_1, m_2, m_3\}$ не равны между собой и не равны нулю. Таким образом, наблюдение нейтринных осцилляций однозначно указывает на наличие ненулевой массы нейтрино. Здесь же стоит заметить, что осцилляционные эксперименты не чувствительны к точному значению массы нейтрино, однако вероятности осцилляций зависят от разницы квадратов масс Δm_{ij}^2 .

Полученные формулы выведены в плосковолновом пределе, что имеет ряд внутренних неразрешимых противоречий. Возникают они вследствие того, что не учитываются процессы рождения и детектирования нейтрино. Учёт этих процессов в пространстве приводит к локализации нейтрино.

Корректный подход состоит в использовании формализма волновых пакетов и воспроизводит формулу вакуумных осцилляций в некотором пределе [33—35].

2.2 Осцилляции в веществе

Хотя осцилляции в вакууме являются частным случаем осцилляций в веществе, их следует разделять, поскольку наличие среды приводит к существенным отличиям от вакуумного случая.

Взаимодействия нейтрино по каналам заряженного (CC) и нейтрального (NC) токов с частицами среды по мере распространения влияет на характер осцилляций.

При рассмотрении осцилляций в обычной среде учитывается только взаимодействие по заряженному каналу, так как NC-взаимодействие одинаково для всех типов нейтрино и генерирует общую для всех ароматов нейтрино фазу, которая не влияет на наблюдаемые величины. NC-взаимодействие следует учитывать в средах с огромной плотностью нейтрино, где реализуется реакция $\nu\nu \rightarrow \nu\nu$ [36]. Например, при слиянии нейтронных звёзд, в нейтриносфере при взрывах сверхновых и в космологии ранней Вселенной.

Единственной реакцией, проявляющейся в нейтринных осцилляциях для сред с нормальной плотностью, является рассеяние на электронах посредством обмена W^\pm -бозонами, что возможно только для электронного типа нейтрино.

Для релятивистских нейтрино, после вычитания глобальной фазы, полный гамильтониан в массовом базисе можно записать в следующей форме:

$$H = \frac{1}{2E} \mathbb{M}^2 + U^\dagger \mathbb{V} U = H_0 + H_I, \quad (2.17)$$

где присутствуют две диагональные матрицы:

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta m_{21}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta m_{31}^2 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} V_e & 0 & 0 \\ 0 & V_\mu & 0 \\ 0 & 0 & V_\tau \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

где матрица взаимодействия нейтрино с веществом V записана в общем виде, который включает в себя все виды лептонных взаимодействий.

В обычной среде, помимо протонов и нейтронов, содержатся только электроны, что приводит к различиям между эффективными потенциалами V_e и V_μ/V_τ . Это выражается в разных потенциалах взаимодействия посредством заряженного тока:

$$(V_e)_{CC} = \sqrt{2}G_F n_e, \quad (V_\mu)_{CC} = (V_\tau)_{CC} = 0, \quad (2.19)$$

где G_F — константа Ферми, а n_e обозначает плотность электронов на пути нейтрино.

Поскольку в электрически нейтральной среде равное количество электронов и протонов, потенциалы нейтрального тока протонов и электронов компенсируют друг друга, и остаётся только вклад от нейтронов [37]:

$$(V_{e,\nu,\tau})_{NC} = \sqrt{2}G_F \left(-\frac{n_N}{2} \right), \quad (2.20)$$

здесь n_N — количество нейтронов на пути нейтрино.

Таким образом, складывая (2.19) и (2.20), получаем эффективные потенциалы:

$$V_e = \sqrt{2}G_F \left(n_e - \frac{n_N}{2} \right), \quad V_\mu = V_\tau = \sqrt{2}G_F \left(-\frac{n_N}{2} \right). \quad (2.21)$$

В случае рассеяния антинейтрино необходимо сделать замену $V_\alpha \rightarrow -V_\alpha$.

Мюонный и таонный эффективные потенциалы не меняют картину осцилляций в обычной среде, поэтому матрицу потенциалов можно привести к более

удобному виду, если вычесть $V_\mu = V_\tau$ из V_e :

$$\mathbb{V} = \begin{pmatrix} V_{CC} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V_{CC} \equiv V_e - V_\mu = (V_e)_{CC}. \quad (2.22)$$

Данное преобразование гамильтониана влияет только на глобальную фазу и не изменяет наблюдаемых величин.

Следовательно, взаимодействие нейтрино с обычным веществом проявляется за счет рассеяния $\nu_e(\bar{\nu}_e)$ на электронах вещества посредством заряженного тока:

$$V_{CC} = \pm\sqrt{2} G_F n_e, \quad (2.23)$$

где нейтрино соответствует положительный знак, а антинейтрино — отрицательный.

Плотность электронов в общем случае является функцией координат (расстояния) $n_e \rightarrow n_e(\xi)$. Удобнее вынести данную зависимость за пределы матрицы взаимодействия нейтрино с веществом. Введём для этого функцию $v(\xi) \equiv V_{CC}(\xi)$, обозначив через ξ расстояние, пройденное частицей с момента рождения :

$$H_I = U^\dagger \mathbb{V} U = v(\xi) U^\dagger \text{diag}(1, 0, 0) U = v(\xi) \mathbb{W}. \quad (2.24)$$

Таким образом, мы выразили H_I в виде двух сомножителей: функции $v(\xi)$ и фиксированной матрицы $\mathbb{W} \equiv U^\dagger \text{diag}(1, 0, 0) U$.

Тогда уравнение эволюции, описывающее нейтринные осцилляции в веществе в приближении ультрарелятивистских частиц $t \approx \xi$, можно представить следующим образом:

$$i \frac{d}{d\xi} \Psi(\xi) = [H_0 + v(\xi) W] \Psi(\xi), \quad (2.25)$$

или в матричной форме:

$$i \frac{d}{d\xi} \begin{pmatrix} \nu_1(\xi) \\ \nu_2(\xi) \\ \nu_3(\xi) \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_{21} & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_{31} \end{pmatrix} + v(\xi) U^\dagger \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} U \right] \begin{pmatrix} \nu_1(\xi) \\ \nu_2(\xi) \\ \nu_3(\xi) \end{pmatrix}, \quad (2.26)$$

где использовалось обозначение $\Delta_{ij} \equiv \Delta m_{ij}^2 / (2E)$. Начальное состояние нейтрино с ароматом α может быть представлено в массовом базисе в виде:

$$\Psi(0) = \begin{pmatrix} \nu_1(0) \\ \nu_2(0) \\ \nu_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{\alpha 1}^* \\ U_{\alpha 2}^* \\ U_{\alpha 3}^* \end{pmatrix} = \Psi_\alpha. \quad (2.27)$$

В случае с антинейтрино необходимо применить операцию комплексного сопряжения (2.27).

Решив уравнение (2.26), можно найти вероятность перехода аромата нейтрино из α в β , если нейтрино преодолело расстояние ξ , с начальным условием (2.27):

$$P_{\alpha\beta}(\xi) = |\Psi_\beta^\dagger \cdot \Psi(\xi)|^2, \quad (2.28)$$

с конечным состоянием $\Psi_\beta^\dagger = (U_{\beta 1}, U_{\beta 2}, U_{\beta 3})$.

Уравнение (2.26) нельзя решить аналитически в общем виде, но существуют частные решения [38]. В общем случае необходимо использовать эффективные методы численного интегрирования.

Легко заметить, что если устремить к нулю количество электронов, а это в свою очередь устремит функцию $v(\xi)$ к нулю, то уравнение (2.25) выродится в (2.11). Таким образом, осцилляции нейтрино в веществе с нулевой плотностью электронов ожидаемо соответствуют осцилляциям в вакууме.

Наиболее ярким проявлением влияния вещества на нейтринные осцилляции является резонансное усиление вероятности перехода — частный случай эффекта Михеева – Смирнова – Вольфенштейна (МСВ).

2.2.1 Наблюдаемые проявления МСВ

В зависимости от величины градиента электронной плотности в веществе вдоль траектории нейтрино можно выделить несколько режимов:

- постоянная плотность;
- адиабатичный режим;
- неадиабатичный режим.

Также существует точка, в которой смешивание нейтрино максимально — резонанс МСВ, которой соответствует определённое значение электронной плотности при фиксированной энергии нейтрино.

Первоначально влияние вещества на осцилляции нейтрино был рассмотрен для случая постоянной плотности в [39]. Позднее было описано резонансное усиление осцилляций и исследован случай с переменной плотностью в работах [21—23], где также было обнаружено, что Солнце удовлетворяет условиям, необходимым для возникновения резонанса. С помощью этого удалось объяснить проблему дефицита солнечных нейтрино.

Помимо Солнца эффект вещества для нейтрино также проявляется и при распространении в Земле.

2.2.2 Условие резонанса МСВ

Рассмотрим простейшую ситуацию смешивания с двумя нейтрино. Это решение полезно для понимания качественных физических аспектов распространения нейтрино в веществах с переменной плотностью.

Возьмём для примера осцилляции между ν_e и ν_μ . Смешивание $\nu_e - \nu_\tau$ идентично, так как ν_μ и ν_τ имеют одинаковый потенциал вещества.

В двухнейтринном случае матрица смешивания параметризована углом смешивания θ и имеет размерность 2×2 :

$$U = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

Запишем уравнение Шрёдингера в базисе ароматов:

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = \left[U \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} U^\dagger + \begin{pmatrix} V_{CC} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix}, \quad (2.30)$$

где E_k — энергия k -го нейтрино.

Воспользуемся разложением (2.15):

$$E_{1,2} \approx E + \frac{m_{1,2}^2}{2E}, \quad E_2 - E_1 \approx \frac{\Delta m_{21}^2}{2E} \equiv \frac{\Delta m^2}{2E} \quad (2.31)$$

и перемножим матрицы:

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = \frac{1}{4E} \begin{pmatrix} -\Delta m^2 \cos(2\theta) + A_{CC} & \Delta m^2 \sin(2\theta) \\ \Delta m^2 \sin(2\theta) & \Delta m^2 \cos(2\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix}, \quad (2.32)$$

с $A_{CC} \equiv 2EV_{CC}$. Диагонализация эффективного гамильтониана (2.32) приводит его к виду:

$$H_M = \frac{1}{4E} \text{diag}(-\Delta m_M^2, \Delta m_M^2), \quad (2.33)$$

здесь введено обозначение для эффективного расщепления масс нейтрино в веществе:

$$\Delta m_M^2 = \sqrt{(\Delta m^2 \cos 2\theta - A_{CC})^2 + (\Delta m^2 \sin 2\theta)^2}. \quad (2.34)$$

Собственные состояния гамильтониана (2.33):

$$\nu_A = \nu_e \cos \theta_M + \nu_\mu \sin \theta_M, \quad \nu_B = -\nu_e \sin \theta_M + \nu_\mu \cos \theta_M, \quad (2.35)$$

где угол смешивания θ_M определяется выражением:

$$\text{tg } 2\theta_M = \frac{\text{tg } 2\theta}{1 - \frac{A_{CC}}{\Delta m^2 \cos 2\theta}}. \quad (2.36)$$

Явление, открытое Михеевым и Смирновым в 1986 году [22; 23], заключается в возникновении резонанса (максимального смешивания нейтрино) при зна-

чении A_{CC} равно

$$A_{CC}^R = \Delta m^2 \cos(2\theta), \quad (2.37)$$

что соответствует плотности электронов равной

$$n_e^R = \frac{\Delta m^2 \cos(2\theta)}{2\sqrt{2}EG_F}. \quad (2.38)$$

В резонансе эффективный угол смешивания равен $\pi/4$, что соответствует максимальному смешиванию и приводит к возможности полных переходов между двумя ароматами, если резонансная область достаточно широка.

2.2.3 Условие адиабатичности

Используя (2.35), выразим ν_e и ν_μ через состояния ν_A и ν_B :

$$\nu_e = \nu_A \cos \theta_M - \nu_B \sin \theta_M, \quad \nu_\mu = \nu_A \sin \theta_M + \nu_B \cos \theta_M, \quad (2.39)$$

тогда

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \nu_A \\ \nu_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_A(t) & -i\dot{\theta}_M \\ i\dot{\theta}_M & E_B(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_A \\ \nu_B \end{pmatrix}, \quad (2.40)$$

где $E_{A,B}$ — собственные энергии состояний $\nu_{A,B}$, $\dot{\theta}_M \equiv d\theta_M/dt$.

Если плотность вещества постоянна, $d\theta_M/dt = 0$, то вероятность осцилляций имеет такой же вид, что и вероятность для двухнейтринных осцилляций в вакууме, где угол смешивания и разность квадратов масс заменены их эффективными значениями в веществе.

Если плотность плавно изменяется, необходимо учитывать влияние $d\theta_M/dt$, которое определяется выражением

$$\frac{d\theta_M}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\sin 2\theta_M}{\Delta m_M^2} \frac{dA_{CC}}{dt}. \quad (2.41)$$

В этом случае точные решения уравнения (2.40) известны лишь для очень немногих эффективных потенциалов [38]. Приходится пользоваться различными

ми приближениями для нахождения его решений.

Наиболее распространённым является так называемое адиабатическое приближение. Оно заключается в пренебрежении недиагональными членами в уравнении (2.40) по сравнению с диагональными. Влияние недиагональных членов заключается в создании переходов между ν_A и ν_B . Для оценки количества таких переходов вводится так называемый параметр адиабатичности:

$$\gamma^{-1} \equiv \frac{2|\dot{\theta}_M|}{|E_A - E_B|} = \frac{\sin(2\theta_M) \frac{\Delta m^2}{2E}}{|E_A - E_B|^3}, \quad (2.42)$$

Адиабатическое приближение заведомо выполняется, когда показатель адиабатичности соответствует условию:

$$\gamma \gg 1. \quad (2.43)$$

Условие адиабатичности и адиабатическое распространение в веществе с переменной плотностью решает проблему солнечных нейтрино [40].

Изучая поведение осцилляций в трёх-нейтринном случае, В. Д. Баргер, К. Виснант, С. Пакваса и Р. Дж. Н. Филлипс в работе 1980 года [41] пришли к важным выводам, которые используются в настоящее время при анализе в нейтринных экспериментах. В частности, было показано, что эффект вещества разрешает неоднозначность в знаке Δm_{ij}^2 : может быть использован для установления порядка масс нейтрино. Благодаря этому эффекту было обнаружено, что $m_2 > m_1$.

2.3 Параметры нейтринных осцилляций

Для случая трёх нейтрино матрица смешивания U (2.46) описывается тремя углами смешивания $\{\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}\}$ и фазой δ_{CP} и параметризована следующим образом:

$$U = O_{23} \Gamma_D O_{13} \Gamma_D^\dagger O_{12}, \quad (2.44)$$

где O — матрицы поворота через углы Эйлера

$$O_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix}, O_{13} = \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13} & 0 & c_{13} \end{pmatrix}, O_{12} = \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.45)$$

а матрица $\Gamma_D = \text{diag}(1, 1, e^{i\delta_{CP}})$ — диагональная матрица, содержащая фазу нарушения CP-инвариантности.

В общем случае (2.44) помножена также на матрицу $\Gamma_M = \text{diag}(e^{i\phi_1}, e^{i\phi_2}, 1)$, где ϕ_1 и ϕ_2 — майорановские фазы CP-нарушения. Однако эксперименты с нейтринными осцилляциями не чувствительны к фазам Майораны (к ним чувствительны, например, эксперименты по поиску безнейтринного двойного β -распада).

Явный вид матрицы смешивания (2.44)

$$U = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta_{CP}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{CP}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{CP}} & c_{13}s_{23} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{CP}} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{CP}} & c_{13}c_{23} \end{pmatrix}, \quad (2.46)$$

где $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$ и $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$.

Также в выражении для вероятности перехода (2.16) используются два расщепления масс нейтрино, так как из трёх величин $\{\Delta m_{21}^2, \Delta m_{32}^2, \Delta m_{31}^2\}$ независимыми являются только две.

Итого, имеется шесть параметров, которыми описываются нейтринные осцилляции в плосковолновом подходе.

Известные на настоящий момент значения данных параметров согласно PDG 2020 года [42] представлены в таблице 1.

Одной из задач, связанных с изучением осцилляций, является определение иерархии масс нейтрино. Согласно таблице 1, неизвестно, является ли Δm_{32}^2 отрицательной или положительной величиной. В связи с этим в осцилляционном анализе экспериментальных данных необходимо рассматривать обе иерархии независимо.

Параметр	Значения
$\sin^2(\theta_{12})$	$0.307^{+0.013}_{-0.012}$
$\sin^2(\theta_{13})$	0.0212 ± 0.0008
$\sin^2(\theta_{23})$	0.547 ± 0.021 (ОИ) 0.545 ± 0.021 (НИ)
$\Delta m_{21}^2, 10^{-5} \text{ эВ}^2$	$7,53 \pm 0.18$
$\Delta m_{32}^2, 10^{-3} \text{ эВ}^2$	$-2.546^{+0.034}_{-0.040}$ (ОИ) 2.453 ± 0.034 (НИ)
Знак Δm_{32}^2	неизвестен
δ_{CP}	неизвестно

Таблица 1: Значения параметров осцилляций нейтрино по данным PDG 2020 [42]. НИ и ОИ обозначают нормальную и обратную иерархию соответственно.

Ранние эксперименты с атмосферными, солнечными и реакторными нейтрино указали на значение и знак Δm_{21}^2 и на значение, но не знак Δm_{32}^2 . Это позволило определить, что две массы m_1 и m_2 близки, а m_3 либо гораздо больше, либо гораздо меньше их. В первом случае наблюдается нормальная иерархия $m_3 > m_2 > m_1$, во втором — обратная (инверсная) $m_2 > m_1 > m_3$.

Обозначив ν_1 и ν_2 как состояния с близкими массами m_1 и m_2 соответственно, а третье состояние ν_3 с наиболее отличающейся массой m_3 , представим графически обе иерархии на рисунке 1.

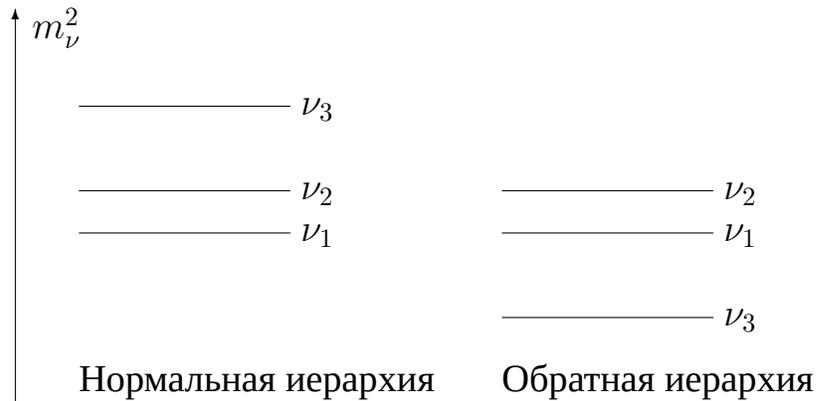


Рис. 1: Графическое представление масс нейтрино. Положение по оси ординат соответствует абсолютной массе нейтрино (не в масштабе) для случаев нормальной и обратной иерархии масс.

Стоит отметить, что иерархия масс нейтрино влияет на вероятности осцилляций в веществе, что даёт возможность её определения в ускорительных и атмосферных экспериментах с длинной базой.

В случае с вакуумом, вероятности осцилляций зависят только от модулей разностей квадратов масс, и замена $\Delta m_{ij}^2 \rightarrow -\Delta m_{ij}^2$ в формулах не изменяет вид вероятностей. Однако порядок масс нейтрино влияет также и на абсолютные значения, как можно заметить в таблице 1, что открывает возможность к определению иерархии масс в реакторном эксперименте JUNO.

3 Атмосферные нейтрино

Атмосферные нейтрино являются очень важным источником для изучения физики нейтринных осцилляций: они содержат нейтрино и антинейтрино всех ароматов; энергия наблюдаемых атмосферных нейтрино лежит в диапазоне от 100 МэВ и достигает значений > 1 ТэВ и расстояния, которые они преодолевают, прежде чем попасть в детектор, варьируются от 15 км до ~ 13000 км.

3.1 Источники атмосферных нейтрино

Атмосферные нейтрино образуются в результате распадов нестабильных частиц, рождаемых при взаимодействии космических лучей в ядерных процессах в атмосфере Земли. Столкновение порождает широкий атмосферный ливень (ШАЛ), состоящий из большого количества различных частиц, в частности, возникает большое количество пионов и каонов.

Впоследствии пион распадается на мюон и мюонное нейтрино (антинейтрино):

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu, \quad \pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu, \quad (3.1)$$

а мюон, в свою очередь, распадается на электрон, мюонное и электронное нейтрино (антинейтрино):

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu, \quad \mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu. \quad (3.2)$$

Каоны преимущественно (с относительной шириной распада $\sim 63\%$) распадаются по следующему каналу:

$$K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu, \quad K^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu. \quad (3.3)$$

На рисунке 2 схематично показано рождение нейтрино в атмосфере.

Данные распады являются основными источниками атмосферных нейтрино с энергиями $E < 10 - 15$ ГэВ.

Основными компонентами в потоке атмосферных нейтрино являются мю-

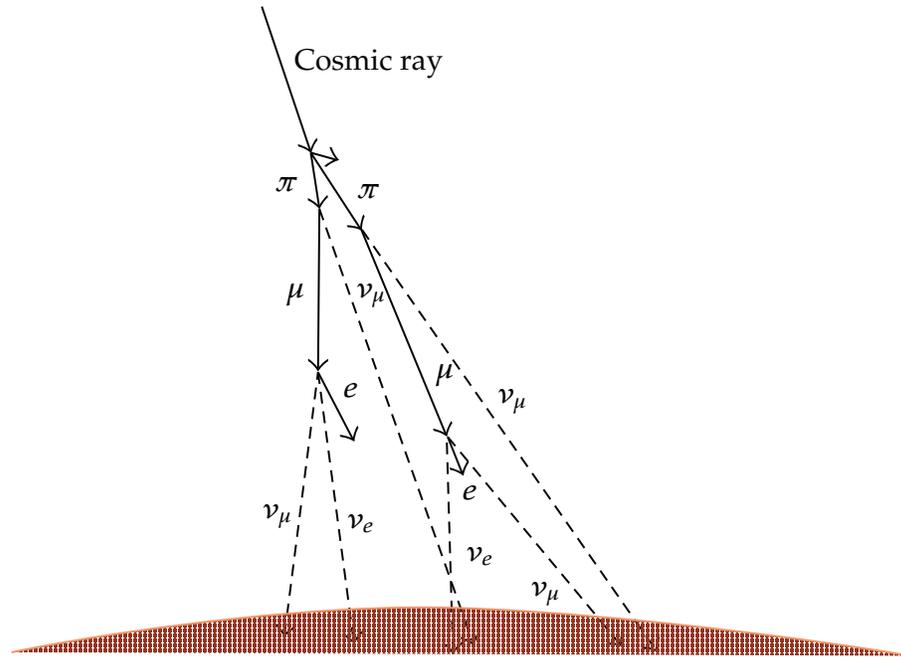


Рис. 2: Схематический рисунок, изображающий рождение атмосферных нейтрино [43].

онные и электронные нейтрино и антинейтрино. Отношение потоков ν_μ ($\bar{\nu}_\mu$) к потоку ν_e ($\bar{\nu}_e$), называемое ароматным отношением, примерно равно двум при низких энергиях. Для нейтрино с энергией $E > 1$ ГэВ ароматное отношение увеличивается, так как высокоэнергичные мюоны не успевают распасться в атмосфере.

В случае очень высоких энергий $E > 10$ ТэВ основной вклад в поток атмосферных нейтрино вносят полулептонные распады очарованных адронов, например, распады D^\pm , D^0 и \bar{D}^0 . В частности, источником атмосферных тау-нейтрино и антинейтрино является следующий распад:

$$D_s^+ \rightarrow \tau^+ + \nu_\tau + \text{адроны}, \quad D_s^- \rightarrow \tau^- + \bar{\nu}_\tau + \text{адроны}. \quad (3.4)$$

3.2 Методы детектирования

Зарегистрировать нейтрино можно по частицам, которые возникают в процессе взаимодействия нейтрино с веществом детектора. Продукты нейтринных взаимодействий включают множество конечных состояний от нуклонов до бо-

лее сложных конечных состояний, включая пионы, каоны и совокупности мезонов.

Нейтрино взаимодействует либо по каналу заряженного тока (CC), за счет обмена W^\pm -бозонами, либо по каналу нейтрального тока (NC), обмениваясь Z^0 -бозонами. Нейтрино также взаимодействует гравитационно, однако, в нейтринных экспериментах это не учитывается из-за малости эффекта.

Основными реакциями, посредством которых регистрируют взаимодействия атмосферные нейтрино, являются:

- упругое и квазиупругое рассеяние;
- резонансное рождение;
- глубоконеупругое рассеяние.

Примерный вклад каждого механизма в полное сечение нейтринного CC-взаимодействия представлен на рисунке 3, где также изображены известные экспериментальные сведения в данной области энергий [44].

3.2.1 Квазиупругое рассеяние

При энергии нейтрино меньше ~ 2 ГэВ, доминирующим процессом является квазиупругое рассеяние. При этом взаимодействии нейтрино рассеивается на нуклоне ядра мишени по заряженному каналу, с образованием заряженного лептона и нуклона: для нейтрино – протона, для антинейтрино – нейтрона:

$$\nu_l + n \rightarrow p + l^-, \quad \bar{\nu}_l + p \rightarrow n + l^+. \quad (\text{CC}) \quad (3.5)$$

3.2.2 Упругое рассеяние

Нейтрино также могут упруго рассеиваться на нуклоне ядра-мишени по каналу нейтрального тока:

$$\nu_l + p \rightarrow \nu_l + p, \quad \bar{\nu}_l + p \rightarrow \bar{\nu}_l + p, \quad (\text{NC}) \quad (3.6)$$

$$\nu_l + n \rightarrow \nu_l + n, \quad \bar{\nu}_l + n \rightarrow \bar{\nu}_l + n. \quad (\text{NC}) \quad (3.7)$$

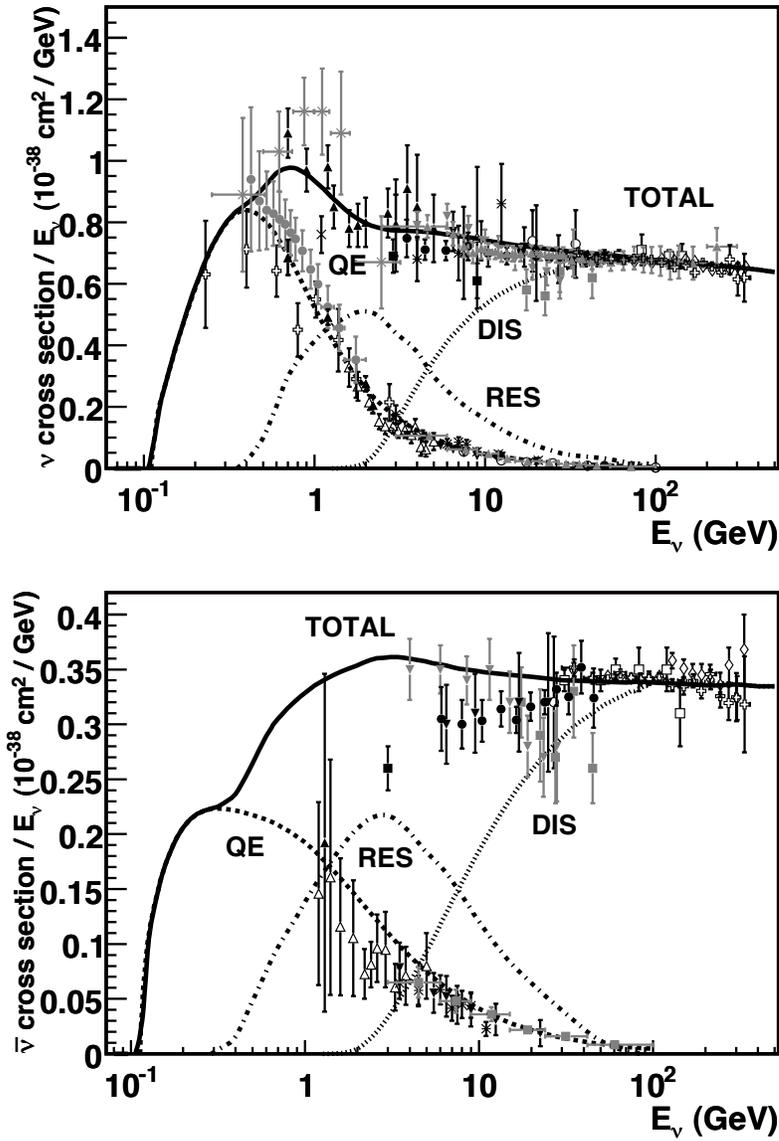


Рис. 3: Полное сечение (делённое на энергию) СС-рассеяния для ν и $\bar{\nu}$ на нуклоне в зависимости от энергии. Вклады квазиупругого рассеяния (QE), резонансного рождения (RES) и глубоко неупругого рассеяния (DIS) [44].

3.2.3 Резонансное рождение

При наличии достаточной энергии ($\sim 0.5 - 100$ ГэВ) нейтрино могут перевести нуклон в ядре-мишени в возбужденное состояние N^* . В этом случае возникает барионный резонанс (Δ, N^*), который чаще всего распадается до конечного состояния нуклона и пиона:

$$\nu_l + N \rightarrow l^- + N^* \Rightarrow (\Delta, N^*) \Rightarrow \pi + N'. \quad (3.8)$$

где $N, N' = n, p$.

Наиболее распространенные способы образования одиночных пионов при рассеянии нейтрино промежуточных энергий возникают за счет этого механизма. При рассеянии на свободных нуклонах существует семь возможных резонансных каналов одиночной пионной реакции (по семь для рассеяния нейтрино и антинейтрино), из них три через заряженный ток:

$$\nu_l + p \rightarrow l^- + p + \pi^+, \quad \bar{\nu}_l + p \rightarrow l^+ + p + \pi^-, \quad (3.9)$$

$$\nu_l + n \rightarrow l^- + p + \pi^0, \quad \bar{\nu}_l + p \rightarrow l^+ + n + \pi^0, \quad (3.10)$$

$$\nu_l + n \rightarrow l^- + n + \pi^+, \quad \bar{\nu}_l + n \rightarrow l^+ + n + \pi^-, \quad (3.11)$$

и по четыре через нейтральный:

$$\nu_l + p \rightarrow \nu_l + p + \pi^0, \quad \bar{\nu}_l + p \rightarrow \bar{\nu}_l + p + \pi^0, \quad (3.12)$$

$$\nu_l + p \rightarrow \nu_l + n + \pi^+, \quad \bar{\nu}_l + n \rightarrow \bar{\nu}_l + n + \pi^0, \quad (3.13)$$

$$\nu_l + n \rightarrow \nu_l + n + \pi^0, \quad \bar{\nu}_l + n \rightarrow \bar{\nu}_l + n + \pi^0, \quad (3.14)$$

$$\nu_l + n \rightarrow \nu_l + p + \pi^-, \quad \bar{\nu}_l + n \rightarrow \bar{\nu}_l + p + \pi^-. \quad (3.15)$$

3.2.4 Глубоконеупругое рассеяние

Для высоких энергий нейтрино, $E > 10$ ГэВ, глубоконеупругое рассеяние (ГНР) является доминирующим процессом. В процессах ГНР нейтрино рассеивается на ядре N вещества детектора по любому из каналов (СС или NC), образуя заряженные лептоны l^\pm и/или адроны X , которые, в свою очередь, приводят к адронному каскаду:

$$\nu_l + N \rightarrow l^- + X, \quad \bar{\nu}_l + N \rightarrow l^+ + X, \quad (\text{CC}) \quad (3.16)$$

$$\nu_l + N \rightarrow \nu_l + X, \quad \bar{\nu}_l + N \rightarrow \bar{\nu}_l + X. \quad (\text{NC}) \quad (3.17)$$

4 Распространение нейтрино в Земле

Для подавления фоновых событий от космогенных мюонов в осцилляционных экспериментах с атмосферными нейтрино рассматривают только события от нейтрино, проходящих сквозь Землю. Наличие среды неизбежно меняет характер осцилляций нейтрино, что приводит к необходимости учёта этого в осцилляционном анализе.

4.1 Модель PREM

В качестве модели распределения вещества была выбрана эталонная модель Земли, построенная по сейсмическим данным — PREM (Preliminary reference Earth model) [45]. В ней Земля предполагается сферически симметричной и поделена на 11 слоёв вещества разной плотности.

По этим значениям можно построить приближение квадратичной функцией, тогда получим непрерывное распределение плотности на каждом i -ом слое:

$$\rho(r) = a_i r^2 + b_i r + c_i, \quad h_{i-1} < r < h_i, \quad (4.1)$$

где r — расстояние от центра планеты, h_i — максимальная высота i -го слоя. Необходимые коэффициенты представлены в таблице 2.

На рисунке 4 изображена полученная зависимость плотности вещества Земли от глубины. Максимальная глубина соответствует радиусу Земли $R = 6371$ км.

4.2 Плотность вещества вдоль траектории нейтрино

Используя распределение плотности вещества Земли вдоль радиуса $\rho(r)$, $r \in [0, R]$, можно найти распределение плотности на пути нейтрино, пролетающего сквозь Землю под зенитным углом θ , который схематично определён на рис. 5. Существует граничное значение $\theta_{max} = \pi/2$, выше которого нейтрино не проходит сквозь вещество. Поэтому рассматриваемые значения $0 \leq \theta < \theta_{max}$.

i	Слой	Высота h_i (10^6 м),	a_i (10^{-11} кг · м ⁻⁵)	b_i (кг · м ⁻⁴)	c_i (10^3 кг · м ⁻³)
1	Внутреннее ядро	1.2215	-21.7730	1.9110×10^{-8}	13.0880
2	Внешнее ядро	3.4800	-24.1230	1.3976×10^{-4}	12.3460
3	D''	3.6300	0	-5.0007×10^{-4}	7.3067
4	Нижняя мантия	5.7010	-3.0922	-2.4441×10^{-4}	6.7823
5	Внутренняя переходная зона 1	5.7710	0	-2.3286×10^{-4}	5.3197
6	Внутренняя переходная зона 2	5.9710	0	-1.2603×10^{-3}	11.2490
7	Внешняя переходная зона	6.1510	0	-5.9706×10^{-4}	7.1083
8	Низкоскоростная зона	6.3466	0	1.0869×10^{-4}	2.6910
9	Внутренняя кора	6.3560	0	0	2.9000
10	Внешняя кора	6.3680	0	0	2.6000
11	Океан	6.3710	0	0	1.0200

Таблица 2: Значения коэффициентов приближения квадратичной функцией плотности вещества Земли для каждого слоя модели PREM [46].

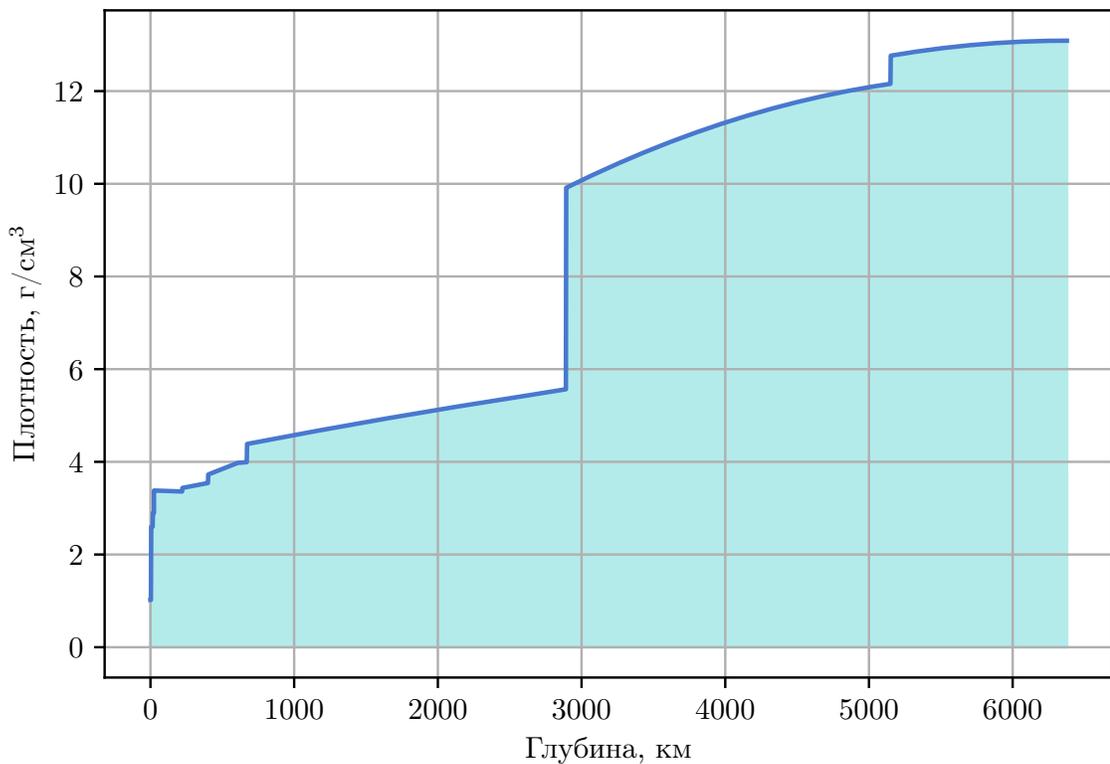


Рис. 4: Плотность вещества Земли в модели PREM как непрерывная функция глубины.

С помощью проекции на плоскость легко выделить равнобедренный треугольник, образованный траекторией нейтрино и радиусами Земли, что пред-

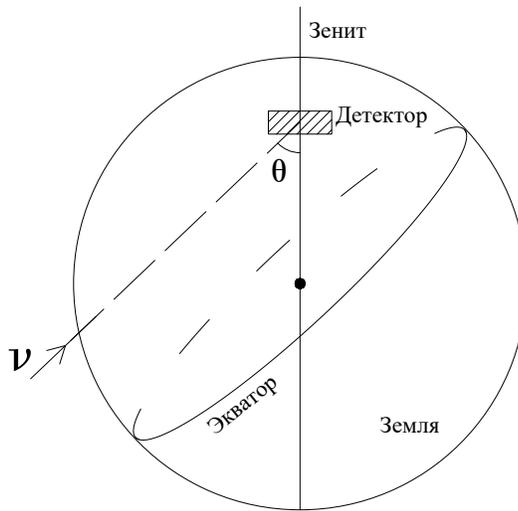


Рис. 5: Определение зенитного угла прилёта нейтрино.

ставлено на рис. 6. Через геометрические свойства равнобедренного треугольника легко связывается длина пути нейтрино L в веществе с зенитным углом θ :

$$L = 2R \cos \theta, \quad (4.2)$$

отсюда видно, что при пролёте нейтрино ровно через центр, т. е. при $\theta = 0$, длина пути нейтрино равняется диаметру Земли, а при $\theta = \theta_{\max}$ она обращается в нуль.

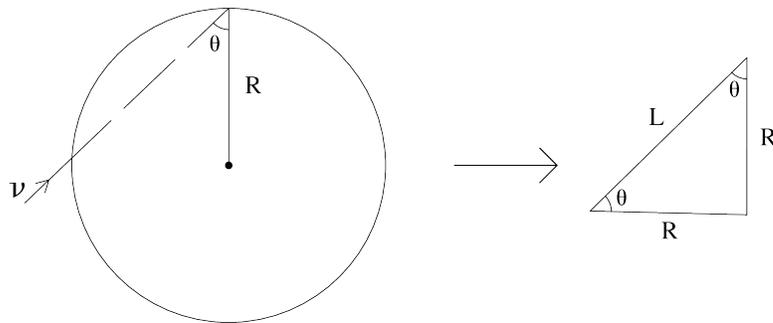


Рис. 6: Проекция на плоскость схемы пролёта нейтрино сквозь сферу Земли. Образованный нейтрино равнобедренный треугольник внутри окружности: основание — путь нейтрино в веществе длиной L , боковые стороны — радиусы окружности длиной R .

Введём бегущий параметр $\xi \in [0, L]$, равный промежуточной длине пути нейтрино и определённый на рис. 7. При каждом значении зенитного угла, спра-

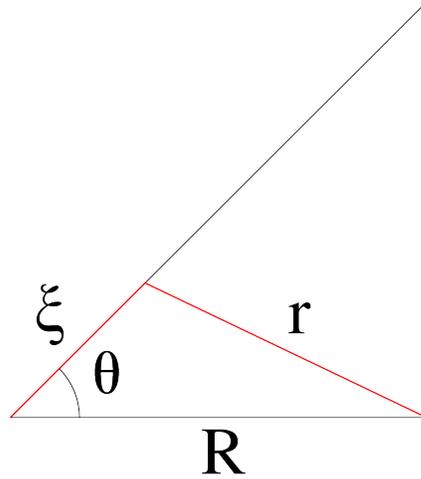


Рис. 7: Определение бегущего параметра ξ вдоль пути нейтрино. Каждому значению ξ , отсчитываемого от входа нейтрино в вещество, соответствует расстояние из центра Земли r .

ведливо следующее равенство, полученное по теореме косинусов:

$$r = \sqrt{\xi^2 + R^2 - 2\xi R \cos \theta}, \quad (4.3)$$

где r — расстояние из центра Земли до точки ξ .

Таким образом, необходимое распределение плотности вещества:

$$\rho'(\xi) = \rho(r(\xi)), \quad 0 \leq \xi \leq L. \quad (4.4)$$

4.3 Плотность электронов вдоль траектории нейтрино

Для расчёта вероятности осцилляций в веществе нужно знать распределение плотности электронов вдоль траектории распространения нейтрино $n_e(\xi)$, которое связано с обычной плотностью вещества через коэффициент пересчёта Y_e :

$$n_e(\xi) = Y_e \frac{\rho'(\xi)}{m_N}, \quad (4.5)$$

где m_N — масса нуклона, для численного расчета используется масса нейтрона из [42].

Физический смысл коэффициента пересчета — доля электронов вещества,

представляется в виде среднего отношения атомного номера Z к массовому числу A :

$$Y_e = \left\langle \frac{Z}{A} \right\rangle. \quad (4.6)$$

Используемые значения электронной доли в таблице 3.

Зона	Y_e	Расстояние от центра Земли
Кора + Мантия	0.4957	$r \geq 3480$ км
Ядро	0.4656	$r < 3480$ км

Таблица 3: Доля электронов на разных участках Земли [47].

5 Решение уравнения нейтринных осцилляций в веществе

Интегрирование дифференциальных уравнений нейтринных осцилляций с помощью классических универсальных методов (например, схем Рунге-Кутты) не сохраняет норму решения на каждом шаге интегрирования, что может привести к невыполнению условия $\sum_{\beta} P_{\alpha\beta} = 1$. В более сложных схемах величина нормы становится скорее критерием качества и устойчивости решения.

Напротив, так называемые геометрические числовые интеграторы лишены подобного недостатка, поскольку они предназначены для сохранения именно этого свойства с точностью до ошибки округления.

Существует множество геометрических интеграторов, здесь будет рассмотрен конкретный класс, основанный на разложении Магнуса [1; 48].

Отличительной особенностью разложения Магнуса является то, что получаемое приближенное решение разделяет с точным решением соответствующие геометрические свойства. Более конкретно, для рассматриваемого случая, унитарность оператора эволюции по времени приводит к сохранению нормы вектора решения.

В численном расчёте это проверяется на каждом шаге интегрирования, и, следовательно, вероятность сохраняется за счёт окончательного решения, полученного путём составления последовательных шагов.

Подход Магнуса использовался в большом количестве работ и представляет интерес для многих отраслей квантовой механики. В работе [49] показано, что существует широкий круг проблем, в которых элементарный пертурбативный подход первого порядка не работает, но, при использовании подхода Магнуса, оказывается достаточно первого слагаемого из разложения.

5.1 Разложение Магнуса

Подход, основанный на разложении Магнуса, представляет собой систематический способ построения приближений решения нестационарного уравнения Шрёдингера таким образом, чтобы в любом порядке оператор эволюции

был унитарным [48].

Рассмотрим оператор эволюции $U(t, t_0)$, который переводит квантовомеханическое состояние (волновую функцию) Ψ от времени t_0 ко времени t :

$$\Psi(t) = U(t, t_0)\Psi(t_0), \quad (5.1)$$

откуда следует очевидное условие $U(t_0, t_0) = I$, где I — единичный оператор.

С течением времени волновая функция Ψ не должна менять свою норму — это постоянное значение, обеспечивающее сохранение вероятности. Математически это означает, что оператор $U(t, t_0)$ является унитарным⁴

$$U(t, t_0)U^\dagger(t, t_0) = U^\dagger(t, t_0)U(t, t_0) = I \quad (5.2)$$

и удовлетворяет уравнению

$$i\frac{\partial}{\partial t}U(t, t_0) = \lambda H(t)U(t, t_0), \quad (5.3)$$

где $H(t)$ — гамильтониан системы, который в общем случае зависит от времени, а λ — промежуточный параметр, который в конце полагается $\lambda = 1$.

Если бы мы не рассматривали пространство матриц, то решение (5.3) легко можно было бы найти с помощью итераций

$$U(t, t_0) = I + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n P_n(t, t_0), \quad P_n(t_0, t_0) = 0. \quad (5.4)$$

Подставляя (5.4) в уравнение (5.3) и приравнивая слагаемые при одинаковых степенях λ , возникает система уравнений относительно P_n :

$$i\frac{\partial}{\partial t}P_1(t, t_0) = H(t), \quad i\frac{\partial}{\partial t}P_n(t, t_0) = H(t)P_{n-1}(t, t_0) \quad (n > 1). \quad (5.5)$$

⁴При отсутствии поглощения.

Интегрируя, получаем P_n

$$P_n(t, t_0) = (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_1 H_2 \cdots H_n, \quad H_i \equiv H(t_i). \quad (5.6)$$

Если гамильтониан системы не зависит от времени, то P_n приобретает компактный вид и ряд (5.4) сводится к экспоненте

$$P_n = \frac{1}{n!} \left(-i(t - t_0)H \right)^n \rightarrow U(t, t_0) = e^{-i(t-t_0)\lambda H}. \quad (5.7)$$

Так как мы ищем решение матричного уравнения, то (5.6) будет верным лишь в том случае, если $[H(t_1), H(t_2)] = 0, \forall t_1, t_2$. В общем случае это не так для произвольных гамильтонианов, зависящих от времени, $H = H(t)$.

Для удобства переопределим: $A(t) \equiv -iH(t)$, оператор $A(t)$ является антиэрмитовым. Переписываем матричное уравнение, используя оператор $A(t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = \lambda A(t) U(t, t_0). \quad (5.8)$$

Учтём, что работаем с матрицами и будем искать решение в виде ряда:

$$U(t, t_0) = e^{\Omega(t, t_0)} = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \Omega^n(t, t_0), \quad \Omega(t_0, t_0) = 0, \quad (5.9)$$

если $A(t) = A = const$, то $\Omega(t, t_0) = \lambda(t - t_0)A$.

Так как обычным правилам дифференцирования (для функций) матричные экспоненты не подчиняются, то встаёт вопрос, как получить дифференциальное уравнение на $\Omega(t, t_0)$. Чтобы его составить, нужно воспользоваться

- 1) групповым свойством оператора эволюции

$$U(t_2, t_0) = U(t_2, t_1) U(t_1, t_0); \quad (5.10)$$

- 2) формулой Бейкера–Кемпбелла–Хаусдорфа для матричных экспонент [50]:

$$\ln(e^X e^Y) = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}[X, [X, Y]] + \frac{1}{12}[Y, [Y, X]] + \dots, \quad (5.11)$$

а точнее, его приближением [51]

$$\ln(e^X e^Y) \simeq X + Y + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{B_n}{n!} \underbrace{[Y, [\dots [Y, X]] \dots]}_{n \text{ раз}} + O(X^2), \quad (5.12)$$

где B_n — числа Бернулли.

Воспользуемся первым свойством, где t_2 и t_1 положим равными $t + \delta t$ и t соответственно. В предположении $A(t) \simeq A(t + \delta t)$ получаем уравнение

$$e^{\Omega(t+\delta t, t_0)} \simeq e^{\lambda A(t) \delta t} \cdot e^{\Omega(t, t_0)}, \quad (5.13)$$

и, применяя к нему второе свойство в пределе $\delta t \rightarrow 0$, можно получить дифференциальное уравнение на $\Omega(t, t_0)$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Omega(t, t_0) = \lambda A(t) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{B_n}{n!} \underbrace{[\Omega(t, t_0), [\dots [\Omega(t, t_0), A(t)]] \dots]}_{n \text{ раз}}. \quad (5.14)$$

Выражаем Ω в виде ряда по степеням λ , который называется рядом Магнуса:

$$\Omega = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \Omega_n. \quad (5.15)$$

Подставляя его в (5.14) и приравнивая слагаемые при одинаковых степенях λ ,

после некоторых вычислений, получаем первые три члена ряда Магнуса:

$$\Omega_1(t, t_0) = \int_{t_0}^t dt_1 A_1, \quad (5.16)$$

$$\Omega_2(t, t_0) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 [A_1, A_2], \quad (5.17)$$

$$\Omega_3(t, t_0) = \frac{1}{6} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 \left([A_1, [A_2, A_3]] + [[A_1, A_2], A_3] \right), \quad (5.18)$$

где использовано обозначение $A_i \equiv A(t_i)$.

Преимуществом такого подхода является то, что при любом порядке по λ усечённая сумма ряда Магнуса всегда антиэрмитова, так как $A(t)$ — антиэрмитовый оператор. Следовательно, экспонента такого ряда будет всегда давать унитарное приближение для $U(t, t_0)$.

Таким образом решение нестационарного уравнения Шрёдингера

$$i \frac{d}{dt} \Psi(t) = H(t) \Psi(t), \quad (5.19)$$

или, используя оператор $A(t)$

$$\frac{d}{dt} \Psi(t) = A(t) \Psi(t), \quad A \in \mathbb{C}^{n \times n}, \quad \Psi \in \mathbb{C}^n, \quad (5.20)$$

даётся следующей формулой

$$\Psi(t) = e^{\Omega(t, t_0)} \Psi(t_0), \quad \Omega(t, t_0) \in \mathbb{C}^{n \times n}, \quad \Omega(t_0, t_0) = 0, \quad (5.21)$$

где $\Omega(t, t_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_n(t, t_0)$ с начальным условием $\Omega_n(t_0, t_0) = 0$.

5.2 Численная реализация алгоритма

При нахождении решения $\Psi(t)$, с начальным условием $\Psi(t_0)$, необходимо эффективно обрабатывать каждый шаг интегрирования.

Точки, в которых вычисляется решение на интервале $[t_0, t_f]$, связаны между собой приращением на величину шага h_n :

$$t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_f, \quad t_{n+1} = t_n + h_n, \quad (5.22)$$

где $0 \leq n \leq N - 1$. Тогда решение будет строиться следующим образом:

$$\Psi(t_1) = e^{\Omega(t_1, t_0)} \Psi(t_0), \quad (5.23)$$

$$\Psi(t_2) = e^{\Omega(t_2, t_1)} \Psi(t_1), \quad (5.24)$$

$$\vdots \quad (5.25)$$

$$\Psi(t_{n+1}) = e^{\Omega(t_{n+1}, t_n)} \Psi(t_n), \quad (5.26)$$

$$\vdots \quad (5.27)$$

$$\Psi(t_f = t_N) = e^{\Omega(t_N, t_{N-1})} \dots e^{\Omega(t_1, t_0)} \Psi(t_0), \quad (5.28)$$

или в краткой записи:

$$\Psi(t_f) = \left[\prod_{n=0}^{N-1} e^{\Omega(t_{n+1}, t_n)} \right] \Psi(t_0). \quad (5.29)$$

Матрица $\Omega(t_{n+1}, t_n)$ зависит от шага h_n в качестве параметра:

$$\Omega(t_{n+1}, t_n) = \Omega(t_n + h_n, t_n) \equiv \Omega(t_n; h_n). \quad (5.30)$$

Решение в точке $\Psi(t_n + h_n)$ вычисляется с точностью до $O(h_n^{r'})$. Значение r' определяется количеством слагаемых ряда Магнуса (5.15) и точностью вычисления каждого из них.

Приближение усечённого ряда Магнуса порядка r' :

$$\Omega(t_n; h_n) \simeq \Omega^{[r']}(t_n; h_n). \quad (5.31)$$

5.2.1 Метод М2

Метод приближения второго порядка является самым простым, так как из ряда Магнуса остаётся только первое слагаемое $\Omega^{[2]} = \Omega_1$:

$$\Omega_1(t_n; h_n) = -i \int_{t_n}^{t_n+h_n} dt H(t), \quad (5.32)$$

и для достижения заданной точности достаточно вычислить подынтегральное выражение в одной точке, чтобы оценить значение интеграла (5.32).

Таким образом, для гамильтониана из уравнения (2.25), второй порядок точности реализуется формулой:

$$\Omega^{[2]}(t_n; h_n) = -iH(\bar{t})h_n = -i(H_0 + \bar{v}W)h_n, \quad (5.33)$$

где взята средняя точка интервала интегрирования $\bar{t} \equiv t_n + h_n/2$. Величина $\bar{v} \equiv v(\bar{t})$ пересчитывается на каждом шаге.

5.2.2 Метод М4

Для достижения $r' = 4$ необходимо вычислить первые два члена разложения $\Omega^{[4]} = \Omega_1 + \Omega_2$, а интегралы аппроксимировать двухточечными квадратурами Гаусса–Лежандра [52].

Точки вычисления квадратур

$$t_{\pm} = t_n + \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \frac{h_n}{2}, \quad (5.34)$$

в которых определены величины $H_{\pm} = H(t_{\pm})$ и $v_{\pm} = v(t_{\pm})$.

Конечная формула такого метода сводится к следующему выражению

$$\Omega^{[4]}(t_n; h_n) = -i(H_+ + H_-) \frac{h_n}{2} + \frac{\sqrt{3}}{12} [H_-, H_+] h_n^2. \quad (5.35)$$

В качестве альтернативы квадратуры Симпсона так же дают эквивалентное приближение четвёртого порядка.

5.3 Переменный шаг интегрирования

Проще всего производить расчёт с постоянным значением шага интегрирования. Для этого необходимо разбить интервал $[t_0, t_f]$ на N равных промежутков, с шагом $h_n = h = (t_f - t_0)/N$. После чего установить приращение $t_n = t_0 + nh$, где $n \in \{1, \dots, N\}$.

Однако такая реализация не является эффективной, так как на некоторых промежутках решение $\Psi(t)$ может испытывать быстрые изменения и медленные на других, что может заметно отразиться на конечном решении.

Наиболее оптимально использовать шаг, который адаптируется автоматически в процессе счета для достижения большей вычислительной производительности. Один из возможных способов для адаптации шага во время решения уравнения — введение условия, что локальная ошибка должна быть ниже установленного значения `tol`, и при невыполнении этого условия уменьшать шаг интегрирования.

Для оценки локальной абсолютной ошибки E_r в точке t_{n+1} понадобятся результаты расчёта волновой функции в этой точке у обоих рассмотренных методов:

$$\hat{\Psi}_{n+1} = e^{\Omega^{[2]}(t_n, h_n)} \Psi_n, \quad \Psi_{n+1} = e^{\Omega^{[4]}(t_n, h_n)} \Psi_n, \quad (5.36)$$

M2 и M4 соответственно. Тогда локальную ошибку метода M2 можно выразить следующим образом:

$$E_r = \|\hat{\Psi}_{n+1} - \Psi_{n+1}\|, \quad (5.37)$$

где используется норма вектора $\|X\| = \sqrt{\sum_i x_i^2}$.

Если в данной точке $E_r > \text{tol}$, то возвращаемся в исходную точку, выбираем меньший шаг h_{new} согласно [53] и заново интегрируем в полученном интервале:

$$h_{\text{new}} = sh_c \left(\frac{\text{tol}}{E_r} \right)^{1/3}, \quad (5.38)$$

здесь h_c означает текущее значение шага и $s < 1$ (safety factor) обеспечивает уменьшение вероятности того, что при следующем шаге опять сработает условие $E_r > \text{tol}$.

Прямая оценка E_r из (5.37) может значительно увеличить общее время вычислительной работы алгоритма, чтобы избежать этого, можно выразить

$$\hat{\Psi}_{n+1} - \Psi_{n+1} = (e^{\Omega^{[2]}} - e^{\Omega^{[4]}}) \Psi_n = (e^Z - I) \Psi_{n+1}, \quad (5.39)$$

$$Z = \ln(e^{\Omega^{[2]}} e^{-\Omega^{[4]}}) = \Omega^{[2]} - \Omega^{[4]} - \frac{1}{2} [\Omega^{[2]}, \Omega^{[4]}] + \dots \quad (5.40)$$

и посчитать локальную ошибку приближённо:

$$E_r \simeq \|(h_n^2 S_1 + h_n^3 S_2 + \frac{1}{2} h_n^4 S_1^2) \Psi_{n+1}\| + O(h_n^5), \quad (5.41)$$

где введены матрицы

$$S_1 = -\frac{\sqrt{3}}{12} (v_+ - v_-) [H_0, W], \quad (5.42)$$

$$S_2 = i \frac{\sqrt{3}}{24} (v_+ - v_-) \left([H_0, [H_0, W]] + \frac{1}{2} (v_+ + v_-) [W, [H_0, W]] \right). \quad (5.43)$$

Однако на практике удобнее использовать относительную ошибку вместо абсолютной. В этом случае i -ая компонента вектора разности $\hat{\Psi}_{n+1} - \Psi_{n+1}$ делится на величину $d_i = |(\Psi_{n+1})_i|$.

5.4 Вычисление матричной экспоненты

Для получения решения необходимо вычислять действие матричной экспоненты на вектор текущего состояния на каждом этапе интегрирования. В данной

работе с этой целью для эффективного счёта был использован алгоритм Путцера [54], но существуют также и другие способы с разной эффективностью [55]. Была произведена проверка работы данного алгоритма с другим методом вычисления матричной экспоненты, основанном на приближении Паде [56]. Результаты вычисления матричной экспоненты методом Путцера и Паде согласуются.

Алгоритм Путцера — это аналитический метод расчёта матричных экспонент с использованием собственных значений и компонент в решении линейной системы. Опишем способ получения конечного алгебраического выражения в случае эрмитовой матрицы A размерности 3×3 для явного вычисления унитарной матрицы e^{itA} , где t — параметр.

Первый шаг заключается в том, чтобы сделать матрицу A бесследовой, используя следующее:

$$e^{itA} = e^{itzI} \cdot e^{itA_0}, \quad (5.44)$$

где I — единичная матрица, $z = \text{Tr}(A)/3$. Тогда бесследовая матрица выразится как $A_0 = A - zI$. Собственные значения бесследовой матрицы A_0 действительны и определяются характеристическим уравнением для случая размерности 3×3 :

$$\lambda^3 - \frac{1}{2}\text{Tr}(A_0^2)\lambda + \det(A_0) = 0 \quad (5.45)$$

явные решения которого могут быть записаны как [57]:

$$\lambda_k = \sqrt{\frac{p}{3}} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(\frac{3q}{2p} \sqrt{\frac{p}{3}}\right) - \frac{2\pi k}{3}\right). \quad (5.46)$$

для $k = 0, 1, 2$, с $p = \text{Tr}(A_0^2)/2$ и $q = \det(A_0)$. Условие $p > 0$ обеспечивает вещественность корней.

Переупорядочив собственные значения λ_k так, что $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2$, определим параметры

$$r_0 = -\frac{1 - e^{iat}}{a}, \quad (5.47)$$

$$r_1 = -\frac{1}{a-b} \left(\frac{1 - e^{iat}}{a} - \frac{1 - e^{ibt}}{b} \right), \quad (5.48)$$

где введены величины $a = \lambda_1 - \lambda_0$ и $b = \lambda_2 - \lambda_0$.

Наконец, используя алгоритм Путцера [54], получаем:

$$e^{itA_0} = e^{i\lambda_0 t} \left[(1 - \lambda_0(r_0 - \lambda_1 r_1))I + (r_0 + \lambda_2 r_1)A_0 + r_1 A_0^2 \right]. \quad (5.49)$$

5.5 Сегментный счет

Если плотность задана кусочно-непрерывной функцией, то возникает необходимость использовать сегментный счет.

Для численных расчётов используется безразмерный параметр t :

$$t = \xi/L, \quad t \in [0, 1], \quad (5.50)$$

физический смысл которого — доля пройденного пути нейтрино, если целый путь L . Выражение для расстояния от центра земли 4.3, записанное через новую безразмерную переменную с использованием 4.2:

$$r(t, \cos \theta) = R\sqrt{1 + 4t(t - 1)\cos^2 \theta}. \quad (5.51)$$

Каждому зенитному углу прилёта нейтрино соответствует своя определённая траектория внутри Земли. Когда нейтрино проходит половину своего пути внутри вещества, оно максимально близко к центру Земли: $r(t = 0.5, \cos \theta) = r_{\min}(\cos \theta)$. Это помогает выделить слои, которые пересекает траектория — их высоты больше значения r_{\min} .

Пронумеруем слои на пути нейтрино по мере их появления: первый встреченный частицей слой имеет индекс $j = 1$, второй $j = 2$ и далее.

Каждому значению высоты слоя h_j по формуле (5.51) соответствует два значения t , назовём их t_I^j и t_F^j :

$$t_{I,F}^j = \frac{1}{2} \left(1 \mp \frac{1}{\cos \theta} \sqrt{\cos^2 \theta - 1 + \frac{h_j^2}{R^2}} \right), \quad h_j > r_{\min}(\cos \theta), \quad (5.52)$$

отрицательный знак соответствует точке с индексом I , а положительный — с

индексом F .

Эти точки определяют, в каких местах по t траектория нейтрино пересекает окружность радиусом h_j . Схематично они изображены на рисунке 8.

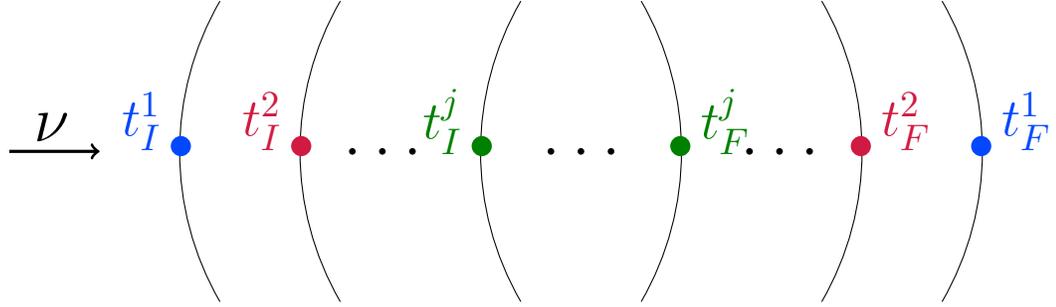


Рис. 8: Точки пересечения границ слоёв вещества нейтринной траекторией.

Очевидно, что $t_I^1 = 0$ и $t_F^1 = 1$, так как они являются самым началом пути и его концом.

Используя набор точек $\{t_I^j, t_F^j\}$, разбиваем траекторию нейтрино на сегменты:

$$t \in [t_I^1, t_I^2] \cup \dots \cup (t_F^2, t_F^1]. \quad (5.53)$$

Схема, представленная в 5.2, применяется для каждого сегмента: каждому j -го слою, в который попадает нейтрино, соответствуют своя начальная точка t_0^j и конечная точка t_f^j , в пределах которых считается волновая функция. Посчитанная конечная волновая функция сегмента является начальной для следующего сегмента: $\Psi(t_0^{j+1}) = \Psi(t_f^j)$. В первом слое начальная волновая функция соответствует состоянию нейтрино с определённым ароматом (2.27).

6 Результаты

В данной главе представлены результаты проделанной работы, в которую входит: создание модуля вычисления электронной плотности вдоль траектории (атмосферного) нейтрино, реализация алгоритма расчёта вероятностей нейтринных осцилляций в подходе, основанном на разложении Магнуса. Также реализован частный случай осцилляций нейтрино в веществе для земной коры с постоянной плотностью.

Программы расчёта вероятностей осцилляций нейтрино производились с использованием программного обеспечения Global Neutrino Analysis (GNA) [58; 59]. GNA разработано сотрудниками Лаборатории Ядерных Проблем ОИЯИ для проведения высокопроизводительного статистического анализа данных нейтринных экспериментов.

GNA состоит из отдельных модулей, которые можно объединить в вычислительный блок. Результат расчёта каждого модуля сохраняется и пересчитывается только тогда, когда это действительно необходимо, т. е. когда изменяются параметры или входные данные этих модулей. Задача пользователя — использовать эти блоки в качестве компонентов для проведения анализа.

Для сохранения подхода пакет расчёта вероятностей осцилляций атмосферных нейтрино, которому посвящена данная работа, был разбит на две самостоятельные программы: первая отвечает за вещество, а вторая — за решение уравнения.

Пользовательский интерфейс GNA реализован на языке Python, а все преобразования и способ их взаимодействия описаны на языке C++. Эти две части связаны через PyRoot, который осуществляет взаимодействие с любым классом из ROOT с помощью интерпретатора Python.

Аналогичным способом были реализованы программы и интерфейс к ним в данной работе.

6.1 Вычисление распределения электронов

Для эффективного решения задачи расчёта вероятностей осцилляций атмосферных нейтрино в веществе с переменной плотностью был создан отдельный модуль для вычисления плотности электронов. В нём хранится вся информация об используемой модели Земли и на её основе производится расчёт электронной плотности вдоль траектории нейтрино с помощью формул, полученных в главе 4. Полученное распределение подаётся в алгоритм расчёта вероятности осцилляций по сегментам вдоль пути нейтрино согласно формулам 5.5.

Наиболее наглядно представить работу этого модуля можно, рассмотрев распределения плотности массы в Земле. На рисунке 9 изображено, как проходит траектория нейтрино при заданном зенитном угле (для примера $\cos \theta = 0.9$) на карте плотности Земли и соответствующее распределение вдоль этой траектории. Симметричный вид распределения относительно середины пути нейтри-

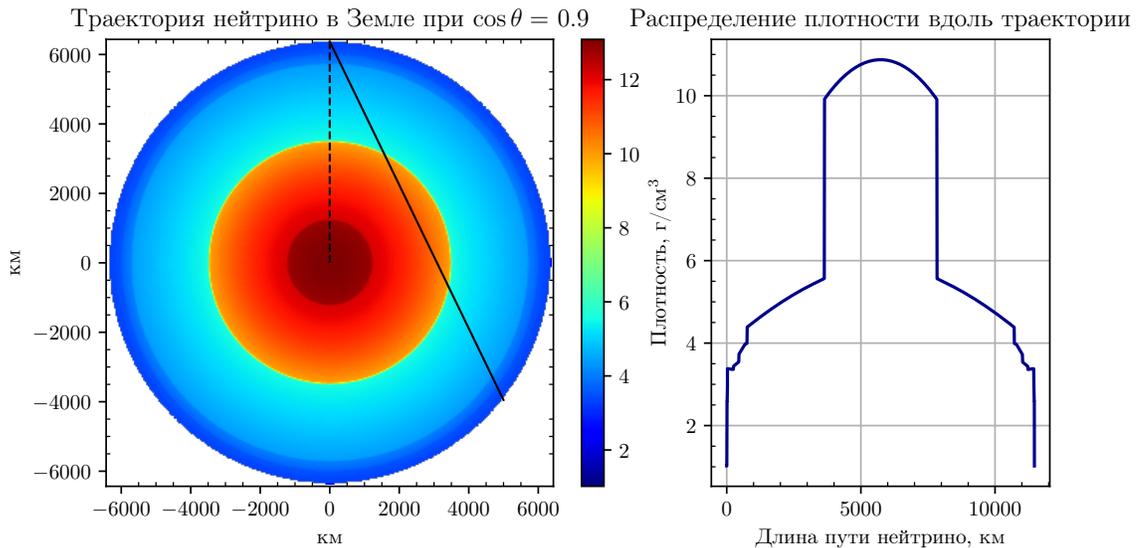


Рис. 9: Траектория нейтрино при $\cos \theta = 0.9$ поверх профиля плотности Земли (слева), плотность вдоль траектории в зависимости пройденного пути (справа).

но связан с тем, что в основе лежит сферически симметричная модель Земли PREM.

Чем меньше значение косинуса зенитного угла, тем меньше полная длина пути нейтрино в веществе, что иллюстрирует график 10, также на нём видно

вложенность траекторий как следствие вложенности слоёв Земли. При прохож-

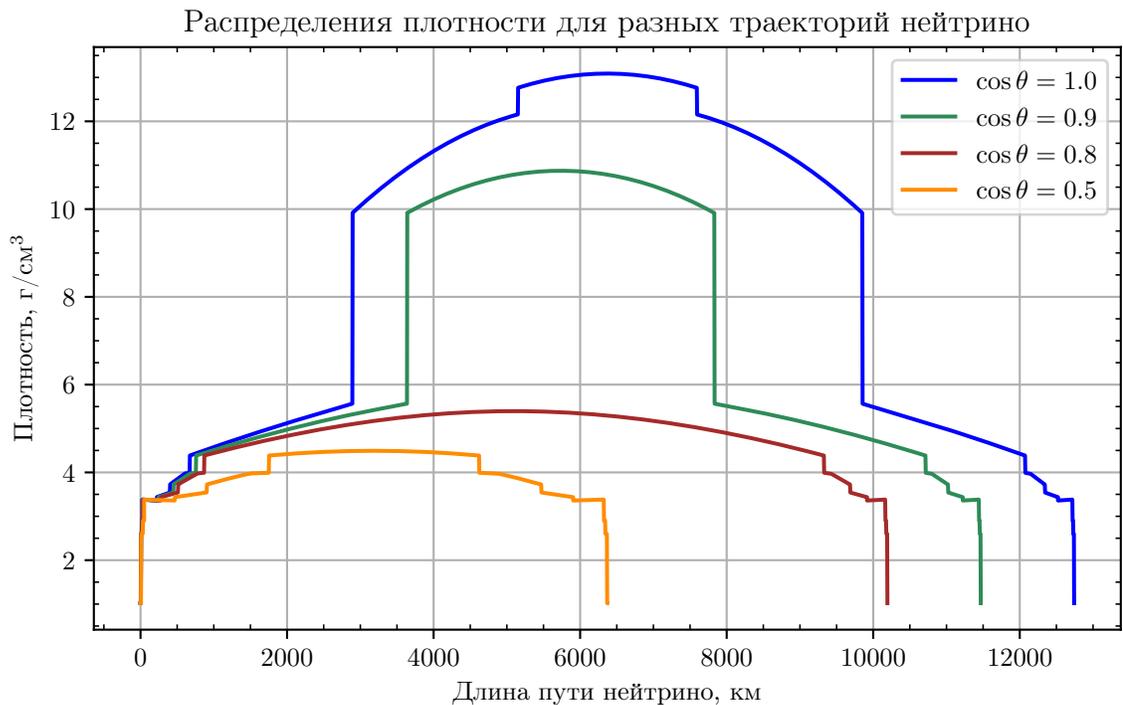


Рис. 10: Распределения плотности вдоль траектории нейтрино для разных значений зенитных углов.

дении нейтрино ровно через центр ($\cos \theta = 1$) получаем радиальное распределение плотности вещества, если обрезать его на полпути частицы, то получим плотность как функцию глубины, представленную на рис. 4.

По умолчанию расчёты проводятся для модели Земли, основанной на PREM, однако, пользователь может задавать любую сферически симметричную модель вещества.

6.2 Вычисление вероятности осцилляции атмосферных нейтрино

Реализованный алгоритм решает уравнение нейтринных осцилляций в веществе, применяя разложение Магнуса из раздела 5.2 приближенным методом М4. В качестве входных параметров программа принимает ароматы нейтрино в начальном и конечном состояниях, массивы энергий нейтрино и косинусов зенитных углов. Также имеется возможность менять параметры нейтринных осцилляций, включая иерархию масс нейтрино, по умолчанию используются зна-

чения из таблицы 1 с фазой $\delta_{\text{CP}} = 0$. Результатом работы программы является массив вероятностей осцилляций для заданных значений входных параметров.

Для оценки точности алгоритма проведено качественное сравнение результатов его работы с графиками, построенными с помощью пакета nuCraft, предназначенного для вычисления вероятностей осцилляций нейтрино в Земле [60]. Результаты сравнения представлены на рисунках 11, 12, 13, 14, 15, 16.

Пакет nuCraft полностью реализован на Python, уравнение нейтринных осцилляций в веществе решается с помощью численного метода решения обыкновенных дифференциальных уравнений ZVODE [61] из пакета scipy. В nuCraft так же, как в данной работе, используется динамический шаг интегрирования и распределение плотности из модели Земли PREM, приближенную квадратичной функцией. Вероятности рассчитываются с учётом вакуумных осцилляций нейтрино в атмосфере Земли.

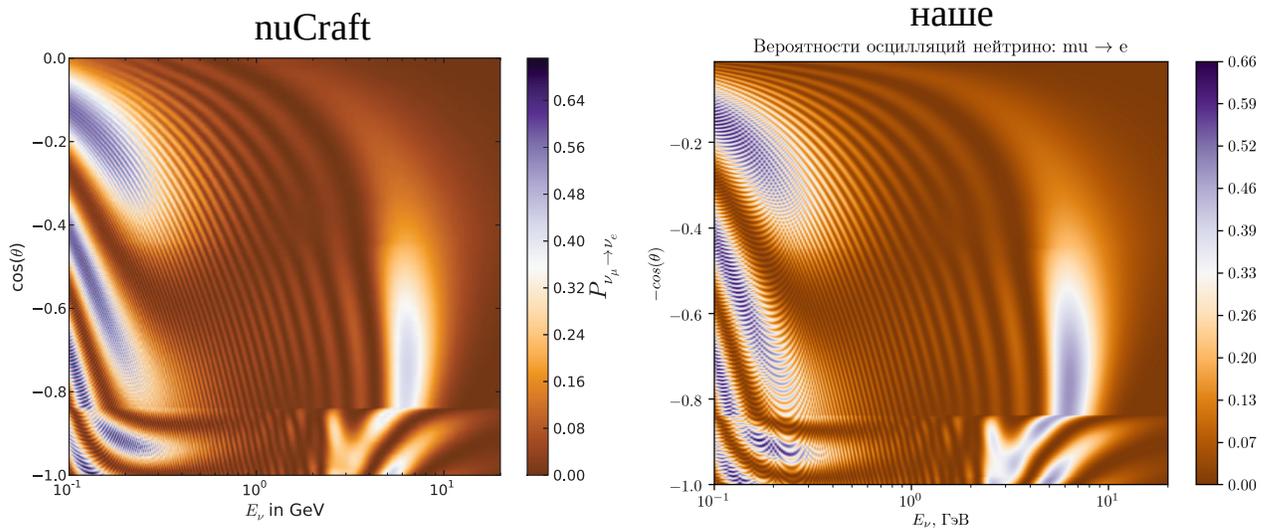


Рис. 11: Вероятность осцилляций нейтрино в Земле в канале $P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e)$ в зависимости от энергии нейтрино и косинуса зенитного угла. Слева — значения nuCraft, справа — результат работы нашего алгоритма.

Результаты применения nuCraft взяты из [62]. Они построены в гипотезе нормального порядка масс нейтрино и с нулевой фазой CP-нарушения. Из-за разницы определения зенитного угла у nuCraft и в нашем случае, соответствующие косинусы углов различаются знаком.

Наблюдается хорошее качественное согласие со всеми рассмотренными слу-

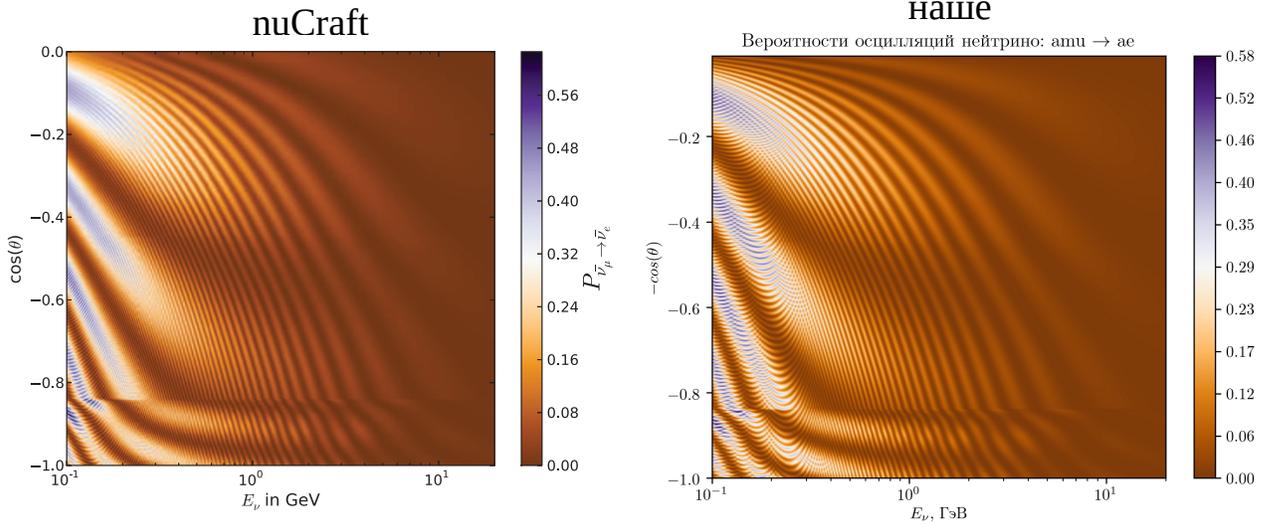


Рис. 12: Вероятность осцилляций нейтрино в Земле в канале $P(\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e)$ в зависимости от энергии нейтрино и косинуса зенитного угла. Слева — значения nuCraft, справа — результат работы нашего алгоритма.

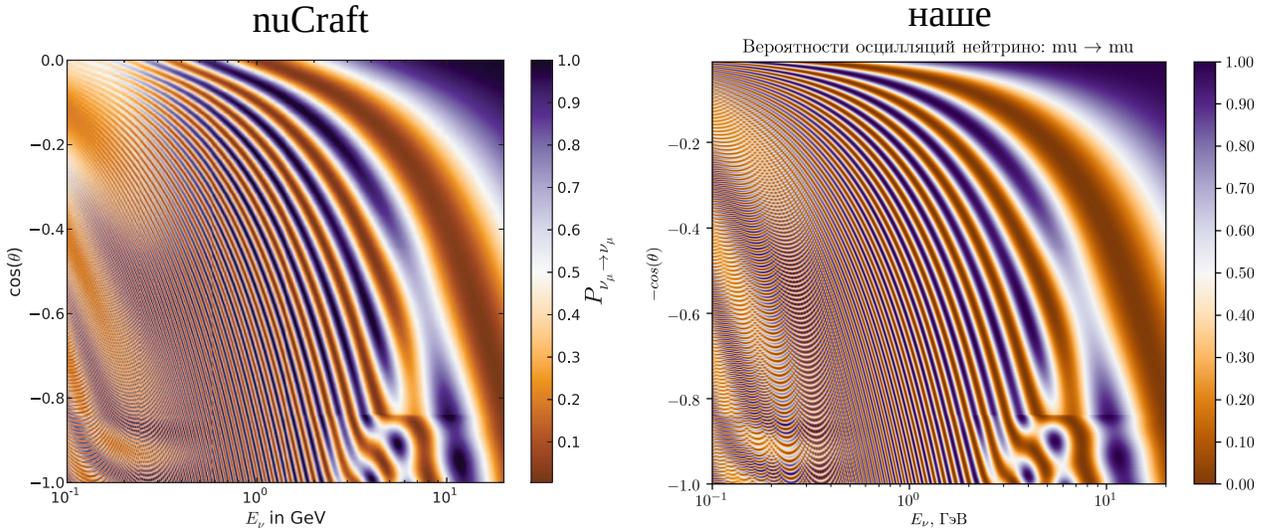


Рис. 13: Вероятность осцилляций нейтрино в Земле в канале $P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu)$ в зависимости от энергии нейтрино и косинуса зенитного угла. Слева — значения nuCraft, справа — результат работы нашего алгоритма.

чаями, повторяется форма и особенности.

На представленных графиках отчетливо видно влияние вещества, особенно в зоне, где плотность самая высокая — в ядре Земли. Происходит резкое усиление осцилляций согласно эффекту МСВ.

Траектория нейтрино проходит сквозь внешнее ядро при $\cos \theta \gtrsim 0.8$, что

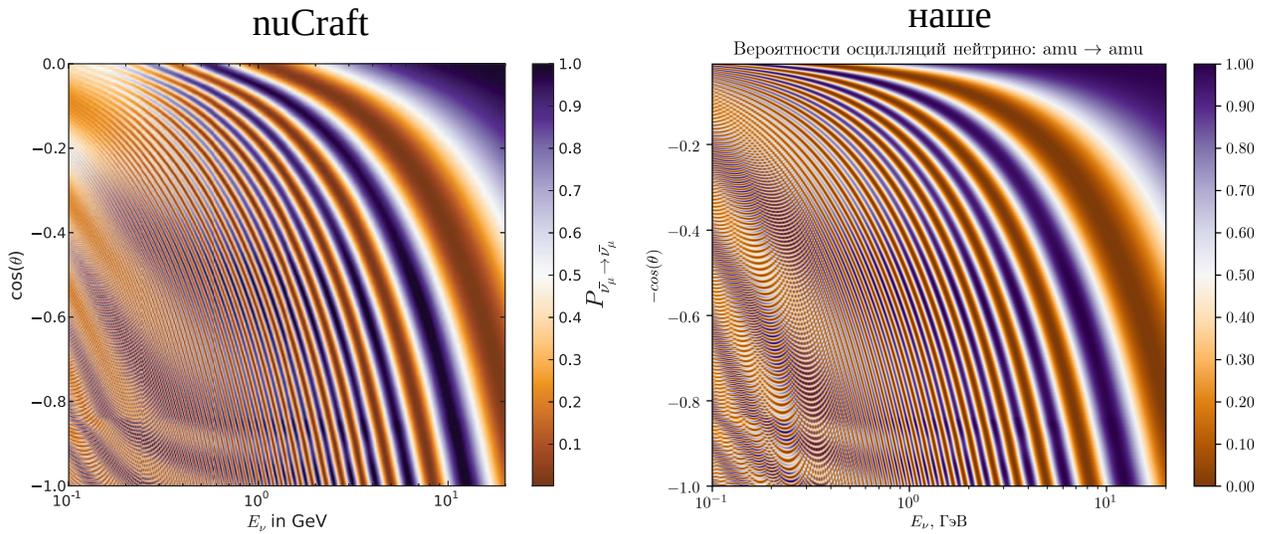


Рис. 14: Вероятность осцилляций нейтрино в Земле в канале $P(\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_\mu)$ в зависимости от энергии нейтрино и косинуса зенитного угла. Слева — значения nuCraft, справа — результат работы нашего алгоритма.

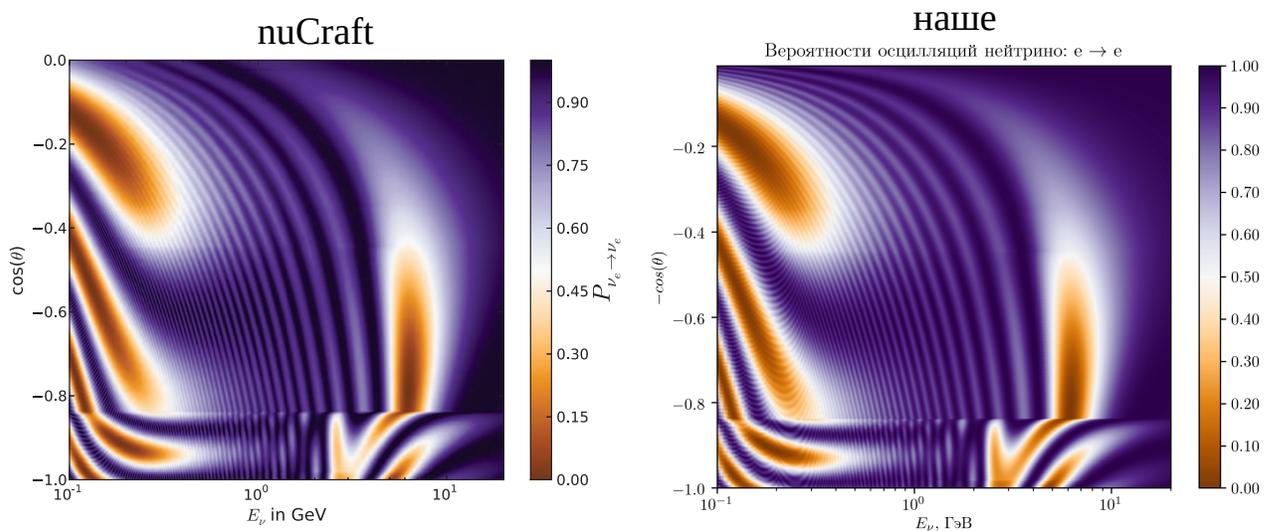


Рис. 15: Вероятность осцилляций нейтрино в Земле в канале $P(\nu_e \rightarrow \nu_e)$ в зависимости от энергии нейтрино и косинуса зенитного угла. Слева — значения nuCraft, справа — результат работы нашего алгоритма.

также видно на зависимости массовой плотности от пройденного пути нейтрино вдоль траектории при определённых значениях косинусов на рис 10.

Имеются резкие переходы между областями по вертикальной оси, они являются следствием кусочно-заданного вида распределения электронной плотности.

Для оценки быстродействия алгоритма измерено среднее время вычисления

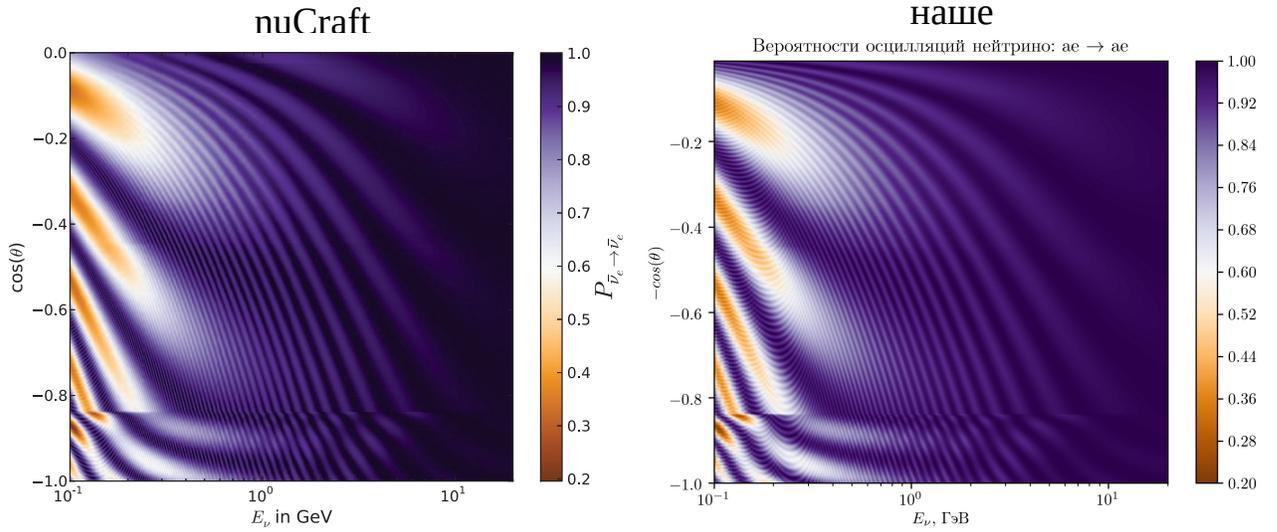


Рис. 16: Вероятность осцилляций нейтрино в Земле в канале $P(\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_e)$ в зависимости от энергии нейтрино и косинуса зенитного угла. Слева — значения nuCraft, справа — результат работы нашего алгоритма.

вероятности осцилляции для разных диапазонов энергии нейтрино:

- 1) $E = 0.1 - 1$ ГэВ, $t \approx 160$ мкс;
- 2) $E = 1 - 10$ ГэВ, $t \approx 70$ мкс;
- 3) $E = 10 - 100$ ГэВ, $t \approx 60$ мкс.

Можно сделать вывод о хорошей скорости счёта.

6.3 Постоянная плотность вещества: кора Земли

В качестве самопроверки в пакете GNA был также написан алгоритм для расчёта вероятностей перехода нейтрино в среде с постоянной плотностью. Произведено количественное сравнение с моделью ускорительного эксперимента NOvA [63]. Результаты представлены на графиках ниже 17, 18, 19, 20.

В этом эксперименте нейтрино также проходят сквозь Землю, но лишь через её верхнюю часть — кору. Эффективное значение постоянной плотности в данном эксперименте составляет $\rho = 2.75$ г/см³, а расстояние между дальним детектором и местом рождения ускорительных нейтрино $L = 810$ км.

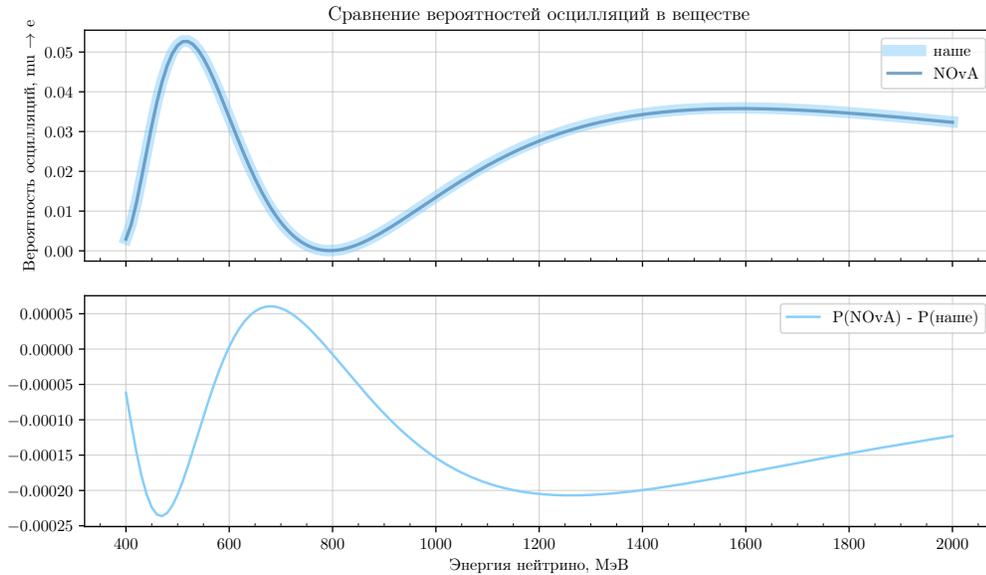


Рис. 17: Верхний график: $P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e)$ как функция энергии нейтрино. Тонкая синяя полоса соответствует оценкам NOvA. Широкая голубая полоса — вычисления нашего алгоритма. Нижний график: абсолютная разница соответствующих вероятностей.

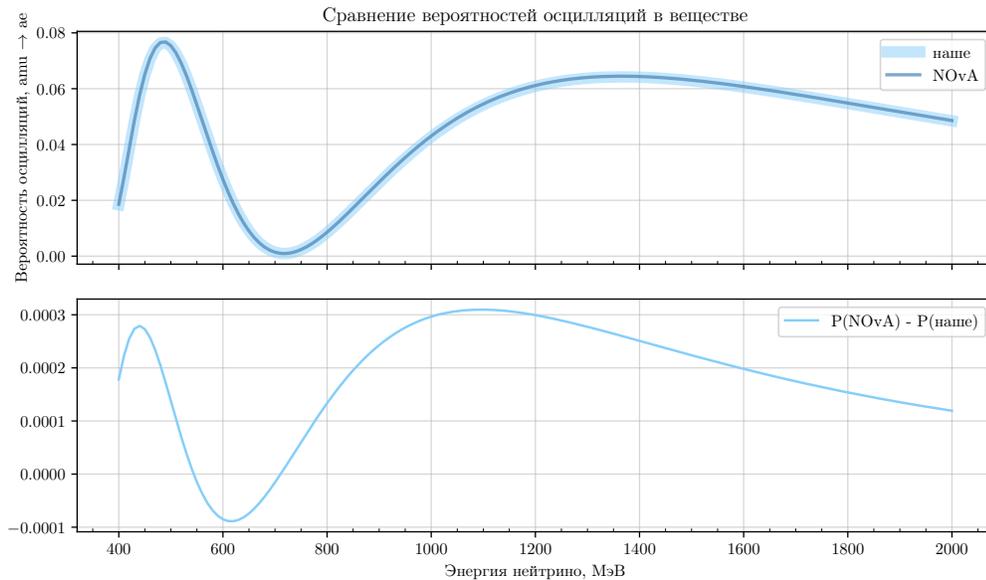


Рис. 18: Верхний график: $P(\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e)$ как функция энергии нейтрино. Тонкая синяя полоса соответствует оценкам NOvA. Широкая голубая полоса — вычисления нашего алгоритма. Нижний график: абсолютная разница соответствующих вероятностей.

В представленных зависимостях предполагается нормальный порядок масс нейтрино и фаза $\delta_{CP} = 0$.

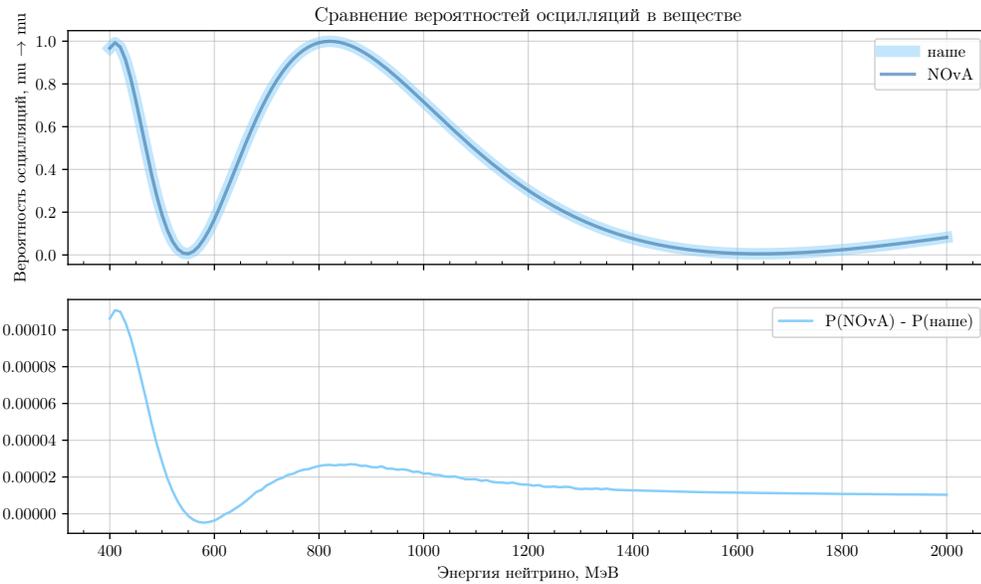


Рис. 19: Верхний график: $P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu)$ как функция энергии нейтрино. Тонкая синяя полоса соответствует оценкам NOvA. Широкая голубая полоса — вычисления нашего алгоритма. Нижний график: абсолютная разница соответствующих вероятностей.

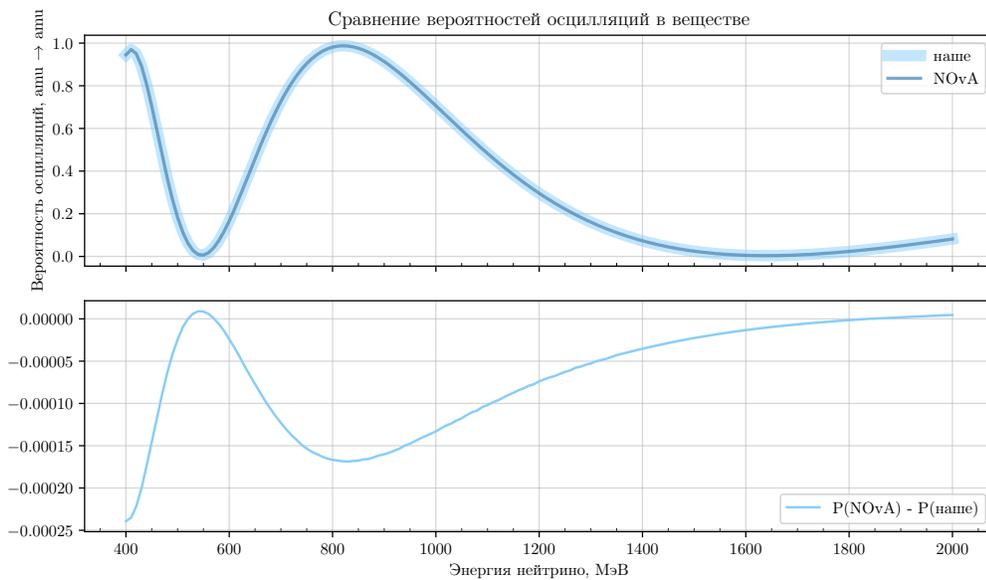


Рис. 20: Верхний график: $P(\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_\mu)$ как функция энергии нейтрино. Тонкая синяя полоса соответствует оценкам NOvA. Широкая голубая полоса — вычисления нашего алгоритма. Нижний график: абсолютная разница соответствующих вероятностей.

Наблюдается хорошее соответствие: максимальное отличие вероятностей

возникает лишь в четвёртом знаке после запятой.

6.4 Выводы

Работа программ по вычислению вероятностей нейтрино в веществе Земли соответствует работам других авторов, это показывает сравнение с другими программными пакетами: nuCraft, NOvA.

Это говорит о применимости подхода, основанного на разложении Магнуса, к задаче расчёта вероятности осцилляций нейтрино в веществе с переменной плотностью.

Скорость расчёта достаточно высокая, чтобы использовать данный алгоритм в осцилляционном анализе атмосферных нейтрино.

Модуль расчёта распределения электронов вдоль пути нейтрино даёт ожидаемые результаты, соответствующие теории. Так как он работает с различными моделями вещества, то может быть использован в исследованиях, связанных с нейтринной томографией [64].

Заключение

В пакете GNA был реализован алгоритм вычисления вероятностей нейтрино методом Магнуса при прохождении нейтрино сквозь Землю. Продемонстрирована корректность метода и согласие с опубликованными ранее результатами. Продемонстрирована хорошая вычислительная производительность метода. Данный метод будет использован для осцилляционного анализа с атмосферными нейтрино в эксперименте JUNO.

В пакете GNA реализован алгоритм вычисления вероятностей осцилляций нейтрино в среде постоянной плотностью. Для случая ускорительного эксперимента NOvA продемонстрировано согласие с официальным моделированием эксперимента.

Этот алгоритм теперь используется в пакете GNA для моделирования ускорительных экспериментов NOvA, DUNE.

В будущем планируется провести более детальное сравнение рассмотренного метода с другими существующими подходами к вычислению вероятности осцилляций атмосферных нейтрино.

Список литературы

1. *Magnus W.* On the exponential solution of differential equations for a linear operator // *Commun. Pure Appl. Math.* — 1954. — Т. 7. — С. 649—673. — DOI: 10.1002/cpa.3160070404.
2. *Brown L. M.* The idea of the neutrino // *Phys. Today.* — 1978. — Т. 31N9. — С. 23—28. — DOI: 10.1063/1.2995181.
3. *Chadwick J.* Possible Existence of a Neutron // *Nature.* — 1932. — Т. 129. — С. 312. — DOI: 10.1038/129312a0.
4. *Fermi E.* An attempt of a theory of beta radiation. 1. // *Z. Phys.* — 1934. — Т. 88. — С. 161—177. — DOI: 10.1007/BF01351864.
5. *Bethe H., Peierls R.* The 'neutrino' // *Nature.* — 1934. — Т. 133. — С. 532. — DOI: 10.1038/133532a0.
6. Detection of the free neutrino: A Confirmation / C. L. Cowan [и др.] // *Science.* — 1956. — Т. 124. — С. 103—104. — DOI: 10.1126/science.124.3212.103.
7. *Reines F., Cowan C. L.* A Proposed experiment to detect the free neutrino // *Phys. Rev.* — 1953. — Т. 90. — С. 492—493. — DOI: 10.1103/PhysRev.90.492.
8. Observation of High-Energy Neutrino Reactions and the Existence of Two Kinds of Neutrinos / G. Danby [и др.] // *Phys. Rev. Lett.* — 1962. — Т. 9. — С. 36—44. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.9.36.
9. *Rameika R.* The DONUT experiment: First direct evidence of ν/τ // *Proceedings, 28th SLAC Summer Institute on Particle Physics: Neutrinos from the Lab, the Sun, and the Cosmos (SSI 2000): Stanford, USA, August 14-25, 2000.* — 2000. — С. 16. — URL: <http://www.slac.stanford.edu/gen/meeting/ssi/2000b/writeups/rameika/rameika.ps.gz>.

10. *Lee T. D., Yang C.-N.* Parity Nonconservation and a Two Component Theory of the Neutrino // *Phys. Rev.* / под ред. G. Feinberg. — 1957. — Т. 105. — С. 1671—1675. — DOI: 10.1103/PhysRev.105.1671.
11. *Salam A.* On parity conservation and neutrino mass // *Nuovo Cim.* — 1957. — Т. 5. — С. 299—301. — DOI: 10.1007/BF02812841.
12. *Goldhaber M., Grodzins L., Sunyar A. W.* Helicity of Neutrinos // *Physical Review.* — 1958. — Февр. — Т. 109, № 3. — С. 1015—1017. — DOI: 10.1103/PhysRev.109.1015.
13. *Majorana E.* Teoria simmetrica dell'elettrone e del positrone // *Nuovo Cim.* — 1937. — Т. 14. — С. 171—184. — DOI: 10.1007/BF02961314.
14. *Davis Jr. R., Harmer D. S., Hoffman K. C.* Search for neutrinos from the sun // *Phys. Rev. Lett.* — 1968. — Т. 20. — С. 1205—1209. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.20.1205.
15. *Gell-Mann M., Pais A.* Behavior of neutral particles under charge conjugation // *Phys. Rev.* — 1955. — Т. 97. — С. 1387—1389. — DOI: 10.1103/PhysRev.97.1387.
16. *Pontecorvo B.* Mesonium and anti-mesonium // *Sov. Phys. JETP.* — 1957. — Т. 6. — С. 429. — [*Zh. Eksp. Teor. Fiz.*33,549(1957)].
17. *Pontecorvo B.* Inverse beta processes and nonconservation of lepton charge // *Sov. Phys. JETP.* — 1958. — Т. 7. — С. 172—173. — [*Zh. Eksp. Teor. Fiz.*34,247(1957)].
18. *Maki Z., Nakagawa M., Sakata S.* Remarks on the unified model of elementary particles // *High-energy physics. Proceedings, 11th International Conference, ICHEP'62, Geneva, Switzerland, Jul 4-11, 1962.* — 1962. — С. 663—666.
19. Possible existence of a neutrino with mass and partial conservation of muon charge / *M. Nakagawa [и др.]* // *Prog. Theor. Phys.* — 1963. — Т. 30. — С. 727—729. — DOI: 10.1143/PTP.30.727. — [,45(1963)].

20. *Wolfenstein L.* Effects of Matter on Neutrino Oscillations // AIP Conf. Proc. — 1978. — Т. 52. — С. 108—112. — DOI: 10.1063/1.31797.
21. *Mikheyev S. P., Smirnov A. Y.* Resonance enhancement of oscillations in matter and solar neutrino spectroscopy // *Yadernaya Fizika.* — 1985. — ЯНВ. — Т. 42. — С. 1441—1448.
22. *Mikheev S. P., Smirnov A. Y.* Neutrino oscillations in matter // 12th International Conference on Neutrino Physics and Astrophysics (Neutrino 86) Sendai, Japan, June 3–8, 1986. — 1986. — С. 177—193.
23. *Mikheev S. P., Smirnov A. Y.* Resonance Oscillations of Neutrinos in Matter // *Sov. Phys. Usp.* — 1987. — Т. 30. — С. 759—790. — DOI: 10.1070/PU1987v030n09ABEH002961. — [Usp. Fiz. Nauk153,3(1987)].
24. Evidence for oscillation of atmospheric neutrinos / Y. Fukuda [и др.] // *Phys. Rev. Lett.* — 1998. — Т. 81. — С. 1562—1567. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.81.1562. — arXiv: hep-ex/9807003 [hep-ex].
25. Measurement of the rate of $\nu_e + d \rightarrow p + p + e^-$ interactions produced by ${}^8\text{B}$ solar neutrinos at the Sudbury Neutrino Observatory / Q. R. Ahmad [и др.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2001. — Т. 87. — С. 071301. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.87.071301. — arXiv: nucl-ex/0106015 [nucl-ex].
26. Evidence for neutrino oscillations from the observation of $\bar{\nu}_e$ appearance in a $\bar{\nu}_\mu$ beam / A. Aguilar [и др.] // *Phys. Rev. D.* — 2001. — Т. 64, вып. 11. — С. 112007. — DOI: 10.1103/PhysRevD.64.112007. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.64.112007>.
27. Event Excess in the MiniBooNE Search for $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ Oscillations / A. A. Aguilar-Arevalo [и др.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2010. — Т. 105, вып. 18. — С. 181801. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.105.181801. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.105.181801>.

28. Reactor antineutrino anomaly / G. Mention [и др.] // Phys. Rev. D. — 2011. — Т. 83, вып. 7. — С. 073006. — DOI: 10.1103/PhysRevD.83.073006. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.83.073006>.
29. *Giunti C., Laveder M.* Statistical significance of the gallium anomaly // Phys. Rev. C. — 2011. — Т. 83, вып. 6. — С. 065504. — DOI: 10.1103/PhysRevC.83.065504. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.83.065504>.
30. *Asaka T., Shaposhnikov M.* The ν MSM, dark matter and baryon asymmetry of the universe // Physics Letters B. — 2005. — Т. 620, № 1. — С. 17—26. — ISSN 0370-2693. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2005.06.020>. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269305008087>.
31. Precision electroweak measurements on the Z resonance / ALEPH Collaboration [и др.] // Physics Reports. — 2006. — Т. 427, № 5/6. — С. 257—454. — ISSN 0370-1573. — DOI: 10.1016/j.physrep.2005.12.006. — Publisher Copyright: © 2006 Elsevier B.V. All rights reserved. Copyright: Copyright 2018 Elsevier B.V., All rights reserved.
32. *Guzzo M. M., Masiero A., Petcov S. T.* On the MSW effect with massless neutrinos and no mixing in the vacuum // Phys. Lett. B. — 1991. — Т. 260. — С. 154—160. — DOI: 10.1016/0370-2693(91)90984-X.
33. *Beuthe M.* Towards a unique formula for neutrino oscillations in vacuum // Physical Review D. — 2002. — Июль. — Т. 66, № 1. — ISSN 1089-4918. — DOI: 10.1103/physrevd.66.013003. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.66.013003>.
34. *Grimus W., Stockinger P.* Real oscillations of virtual neutrinos // Physical Review D. — 1996. — Сент. — Т. 54, № 5. — С. 3414—3419. — ISSN 1089-4918. — DOI: 10.1103/physrevd.54.3414. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.54.3414>.

35. *Naumov D. V., Naumov V. A.* Quantum Field Theory of Neutrino Oscillations // Phys. Part. Nucl. — 2020. — Т. 51, № 1. — С. 1—106. — DOI: 10.1134/S1063779620010050.
36. *Pantaleone J.* Dirac neutrinos in dense matter // Phys. Rev. D. — 1992. — Т. 46, вып. 2. — С. 510—523. — DOI: 10.1103/PhysRevD.46.510. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.46.510>.
37. *Giunti C., Kim C. W.* Fundamentals of Neutrino Physics and Astrophysics //. — 2007.
38. *Balantekin A. B.* Exact solutions for matter enhanced neutrino oscillations // Phys. Rev. D. — 1998. — Т. 58. — С. 013001. — DOI: 10.1103/PhysRevD.58.013001. — arXiv: hep-ph/9712304 [hep-ph].
39. *Wolfenstein L.* Neutrino oscillations in matter // Phys. Rev. D. — 1978. — Май. — Т. 17, вып. 9. — С. 2369—2374. — DOI: 10.1103/PhysRevD.17.2369. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.17.2369>.
40. *Герштейн С. С.* Загадки солнечных нейтрино // Соросовский образовательный журнал. — 1997. — Т. 8. — С. 79—85.
41. Matter effects on three-neutrino oscillations / V. Barger [и др.] // Phys. Rev. D. — 1980. — Т. 22, вып. 11. — С. 2718—2726. — DOI: 10.1103/PhysRevD.22.2718. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.22.2718>.
42. Review of Particle Physics / P. A. Zyla [и др.] // PTEP. — 2020. — Т. 2020, № 8. — С. 083C01. — DOI: 10.1093/ptep/ptaa104.
43. *Kajita T.* Atmospheric neutrinos // Adv. High Energy Phys. — 2012. — Т. 2012. — С. 504715. — DOI: 10.1155/2012/504715.
44. *Formaggio J. A., Zeller G. P.* From eV to EeV: Neutrino cross sections across energy scales // Reviews of Modern Physics. — 2012. — Сент. — Т. 84, № 3. — С. 1307—1341. — ISSN 1539-0756. — DOI: 10.1103/revmodphys.84.

1307. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.84.1307>.
45. *Dziewonski A. M., Anderson D. L.* Preliminary reference earth model // *Phys. Earth Planet. Interiors.* — 1981. — T. 25. — С. 297—356. — DOI: [10.1016/0031-9201\(81\)90046-7](https://doi.org/10.1016/0031-9201(81)90046-7).
46. *Typinski D.* Earth Gravity. — URL: <http://www.typnet.net/Essays/EarthGrav.htm>.
47. *Boley C., Wilfing L., Siebert P.* Grundlagen der Geologie // *Handbuch Geotechnik: Grundlagen – Anwendungen – Praxiserfahrungen / под ред. C. Boley.* — Wiesbaden : Springer Fachmedien Wiesbaden, 2019. — С. 1—12. — ISBN 978-3-658-03055-1. — DOI: [10.1007/978-3-658-03055-1_1](https://doi.org/10.1007/978-3-658-03055-1_1). — URL: https://doi.org/10.1007/978-3-658-03055-1_1.
48. A pedagogical approach to the Magnus expansion / S. Blanes [и др.] // *European Journal of Physics.* — 2010. — T. 31, № 4. — С. 907—918. — DOI: [10.1088/0143-0807/31/4/020](https://doi.org/10.1088/0143-0807/31/4/020). — URL: <https://doi.org/10.1088/0143-0807/31/4/020>.
49. *Quesada N., Sipe J. E.* Time-Ordering Effects in the Generation of Entangled Photons Using Nonlinear Optical Processes // *Phys. Rev. Lett.* — 2015. — T. 114, вып. 9. — С. 093903. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.114.093903](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.114.093903). — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.114.093903>.
50. *Wilcox R. M.* Exponential Operators and Parameter Differentiation in Quantum Physics // *Journal of Mathematical Physics.* — 1967. — T. 8, № 4. — С. 962—982. — DOI: [10.1063/1.1705306](https://doi.org/10.1063/1.1705306). — URL: <https://doi.org/10.1063/1.1705306>.
51. *Klarsfeld S., Oteo A.* The Baker-Campbell-Hausdorff formula and the convergence of the Magnus expansion // *Journal of Physics A: Mathematical and General.* — 1999. — T. 22. — С. 4565. — DOI: [10.1088/0305-4470/22/21/018](https://doi.org/10.1088/0305-4470/22/21/018).

52. Lie Group Methods / A. Iserles [и др.] // Acta Numerica. — 2000. — Т. 9. — С. 215—365. — DOI: 10.1017/S0962492900002154.
53. Skeel R. Numerical Hamiltonian Problems (J. M. Sanz-Serna and M. P. Calvo) // Siam Review - SIAM REV. — 1995. — Т. 37. — С. 272—274. — DOI: 10.1137/1037075.
54. Putzer E. Avoiding the Jordan Canonical Form in the Discussion of Linear Systems with Constant Coefficients // American Mathematical Monthly. — 1966. — Т. 73. — С. 2—7. — DOI: 10.2307/2313914.
55. Moler C., Van Loan C. Nineteen Dubious Ways to Compute the Exponential of a Matrix, Twenty-Five Years Later // Society for Industrial and Applied Mathematics. — 2003. — Т. 45. — С. 3—49. — DOI: 10.1137/S00361445024180.
56. Brezinski C. Extrapolation algorithms and Padé approximations: a historical survey // Applied Numerical Mathematics. — 1996. — Т. 20, № 3. — С. 299—318. — ISSN 0168-9274. — DOI: [https://doi.org/10.1016/0168-9274\(95\)00110-7](https://doi.org/10.1016/0168-9274(95)00110-7). — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0168927495001107>.
57. Missa A., Youssfi C. The Cubic Equation Made Simple. — 2021. — arXiv: 2010.05299 [math.HO].
58. GNA: new framework for statistical data analysis / Fatkina, Anna [и др.] // EPJ Web Conf. — 2019. — Т. 214. — С. 05024. — DOI: 10.1051/epjconf/201921405024. — URL: <https://doi.org/10.1051/epjconf/201921405024>.
59. CUDA Support in GNA Data Analysis Framework / A. Fatkina [et al.]. — 2018. — arXiv: 1804.07682 [cs.DC].
60. Wallraff M., Wiebusch C. Calculation of oscillation probabilities of atmospheric neutrinos using nuCraft // Computer Physics Communications. — 2015. — Дек. — Т. 197. — С. 185—189. — ISSN 0010-4655. — DOI: 10.1016/

j.cpc.2015.07.010. — URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cpc.2015.07.010>.

61. *Brown P., Byrne G. D., Hindmarsh A.* VODE: a variable-coefficient ODE solver // *Siam Journal on Scientific and Statistical Computing*. — 1989. — Т. 10. — С. 1038—1051.
62. Neutrino physics with JUNO / F. An [и др.] // *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*. — 2016. — Февр. — Т. 43, № 3. — С. 030401. — ISSN 1361-6471. — DOI: 10.1088/0954-3899/43/3/030401. — URL: <http://dx.doi.org/10.1088/0954-3899/43/3/030401>.
63. *Kolupaeva L.* Recent three-flavor neutrino oscillation results from the NOvA experiment // *J. Phys. Conf. Ser.* / под ред. P. Teterin. — 2020. — Т. 1690, № 1. — С. 012172. — DOI: 10.1088/1742-6596/1690/1/012172.
64. *Winter W.* Neutrino Tomography – Learning About The Earth’s Interior Using The Propagation Of Neutrinos // *Earth, Moon, and Planets*. — 2006. — Июль. — Т. 99, № 1—4. — С. 285—307. — ISSN 1573-0794. — DOI: 10.1007/s11038-006-9101-y. — URL: <http://dx.doi.org/10.1007/s11038-006-9101-y>.