«Преобразования и собственные состояния матрицы плотности виртуальных калибровочных бозонов»

Студент 209М группы ФЭЧ МГУ:
Световидов Валентин Александрович
Научный руководитель:
Профессор, д.ф.-м.н Теряев Олег Валерианович

Введение

Цель диссертации:

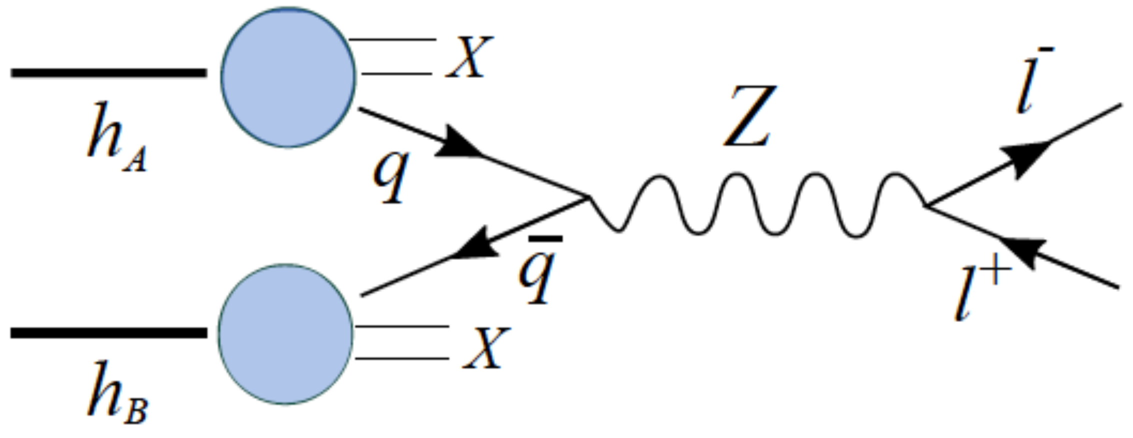
1) изучение спиновых свойств кварк-глюонной и адронной сред, образующейся при столкновениях адронов и тяжелых ионов;
2) Пробники среды – поляризация виртуальных калибровочных бозонов (γ , W, Z);
3) Поляризация проявляется в угловом распределении конечных лептонов;
4) Угловое распределение удобно измерять в системе покоя, совпадающей с системой покоя бозона, в которой и проявляются спиновые свойства;

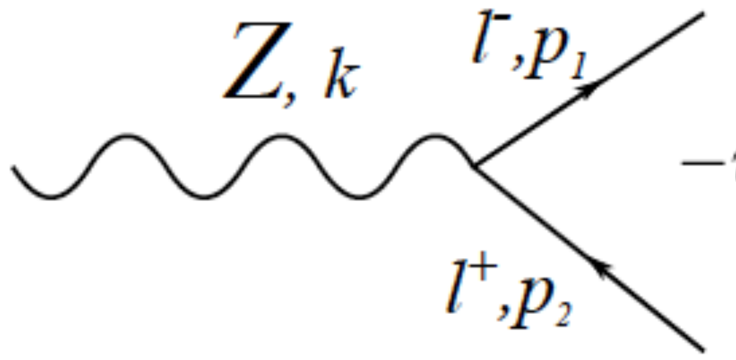
Введение

5) Выбор осей в данной системе является произвольным (при этом, в коллайдерных экспериментах, как правило, используется система Коллинза-Сопера);
6) При этом, существуют инвариантны, выраженные через спиновые наблюдаемые, непосредственно связанные с матрицей плотности;
7) Основная задача: Получение и исследование общего закона преобразования угловых коэффициентов, а также матрицы плотности при переходе из одной системы к другой.

Введение

Процесс Дрелла-Яна-Матвеева -Мурадяна-Тавхелидзе





$$-i\frac{g}{2\cos\theta_W}\gamma_\mu(c_v - c_a\gamma_5)$$

Эксперименты

CMS

pp **- столкновения**

$\sqrt{s} = 8TeV$

$A_0 - A_4$

ATLAS

pp **- столкновения**

$\sqrt{s} = 8TeV$

$A_0 - A_7$

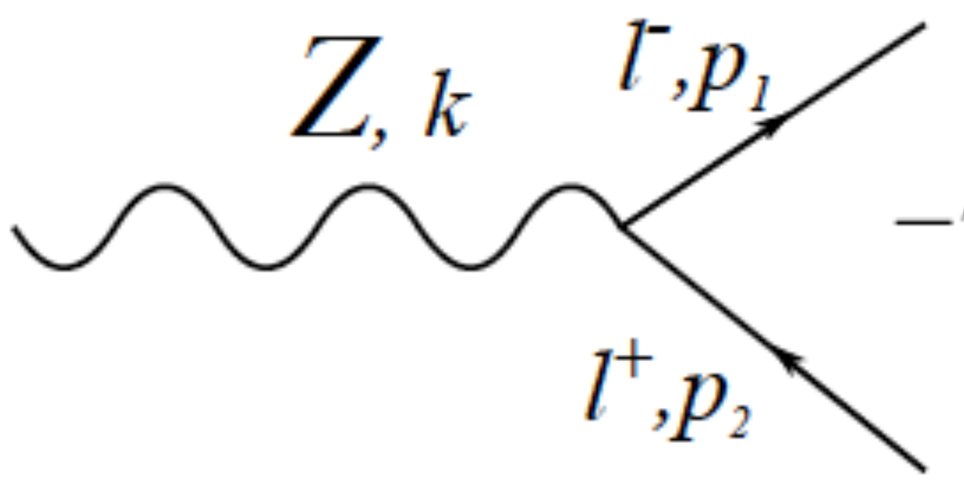
MPD, SPD(NICA)

pp, AA **- столкновения**

$\sqrt{s} = 4 - 26GeV$

$A_0 - A_7$

Введение



$$-i\frac{g}{2\cos\theta_W}\gamma_\mu(c_v - c_a\gamma_5)$$

$$\mathcal{L}^{EW}_{\text{inter}} = -i\frac{g}{\cos\theta_\omega}J^{\text{NC}}_\mu Z^\mu = -i\frac{g}{\cos\theta_\omega}\overline{\psi}_f\gamma_\mu\left[\frac{1}{2}(1-\gamma_5)T^3 - Q_f\sin^2\theta_\omega\right]\psi_f Z^\mu \qquad (2.1)$$

$$\mathcal{L}^{EW}_{\text{inter}} = -i\frac{g}{\cos\theta_\omega}\overline{\psi}_f\gamma_\mu\left[c_v - c_a\gamma_5\right]\psi_f Z^\mu \qquad (2.2)$$

$$\mathcal{M} = -i\frac{g}{\cos\theta_\omega}\overline{u}_r(p_1)\gamma_\mu\left[c_v - c_a\gamma_5\right]v_s(p_2)e^\mu_n(k) \qquad (2.3)$$

Учитывая, что сечение рассеяния $\sigma \propto |\mathcal{M}|^2$, а также процесс Дрелла-Яна (ММТ) подразумевает поправку на адронную структуру, то искомое сечение пропорционально свертке:

$$\sigma \propto |\mathcal{M}|^2 \propto W^{\mu\nu} \times L_{\mu\nu} \qquad (2.4)$$

где $W^{\mu\nu}$ - адронный тензор, играющий роль матрицы плотности Z-бозона, который - суть билинейная комбинация кварковых токов [12]:

$$W^{\mu\nu} \propto < p_1p_2|J^\mu_q|X >< X|(J^\nu_q)^\dagger|p_1p_2 > \qquad (2.5)$$

и обладает следующими свойствами:

1) положительноопределенность;

2) эрмитовость;

3) поперечность (как следствие определения и закона сохранения заряда $\partial_\mu J^\mu = 0$) $q_\mu W^{\mu\nu} = q_\nu W^{\mu\nu} = 0$.

Введение

$$\sigma \propto |\mathcal{M}|^2 \propto e_n^\mu(k) e_n^\nu(k) \times L_{\mu\nu} \tag{2.6}$$

$$L_{\mu\nu} = \sum_{r,s} \overline{u}_r(p_1)\gamma_\mu(c_v - c_a\gamma_5)v_s(p_2)\overline{v}_s(p_2)(c_v + c_a\gamma_5)\gamma_\nu u_r(p_1) \tag{2.7}$$

$$L_{\mu\nu} = \mathrm{Tr}\left[\gamma_\mu(c_v - c_a\gamma_5)(\hat{p}_1 - m)(c_v + c_a\gamma_5)\gamma_\nu(\hat{p}_2 + m)\right] \tag{2.8}$$

$$L_{\mu\nu} = 4(-c_a^2 g_{\mu\nu}(p_1, p_2) + m^2 c_a^2 g_{\mu\nu} + c_a^2 p_{1\mu} p_{2\nu} + c_a^2 p_{1\nu} p_{2\mu} + 2i c_a c_v \epsilon_{\mu\nu\sigma\rho} p_{1\sigma} p_{2\rho} - c_v^2 g_{\mu\nu}(p_1, p_2) - \tag{2.9}$$

$$-m^2 c_v^2 g_{\mu\nu} + c_v^2 p_{1\mu} p_{2\nu} + c_v^2 p_{1\nu} p_{2\mu})$$

$$L_{\mu\nu} = 4(-c_a^2 g_{\mu\nu}(p_1, p_2) + p_{1\mu} p_{2\nu}(c_a^2 + c_v^2) + p_{2\mu} p_{1\nu}(c_a^2 + c_v^2) + 2i c_a c_v \epsilon_{\mu\nu\sigma\rho} p_{1\sigma} p_{2\rho} - c_v^2 g_{\mu\nu}(p_1, p_2)). \tag{2.10}$$

Введение

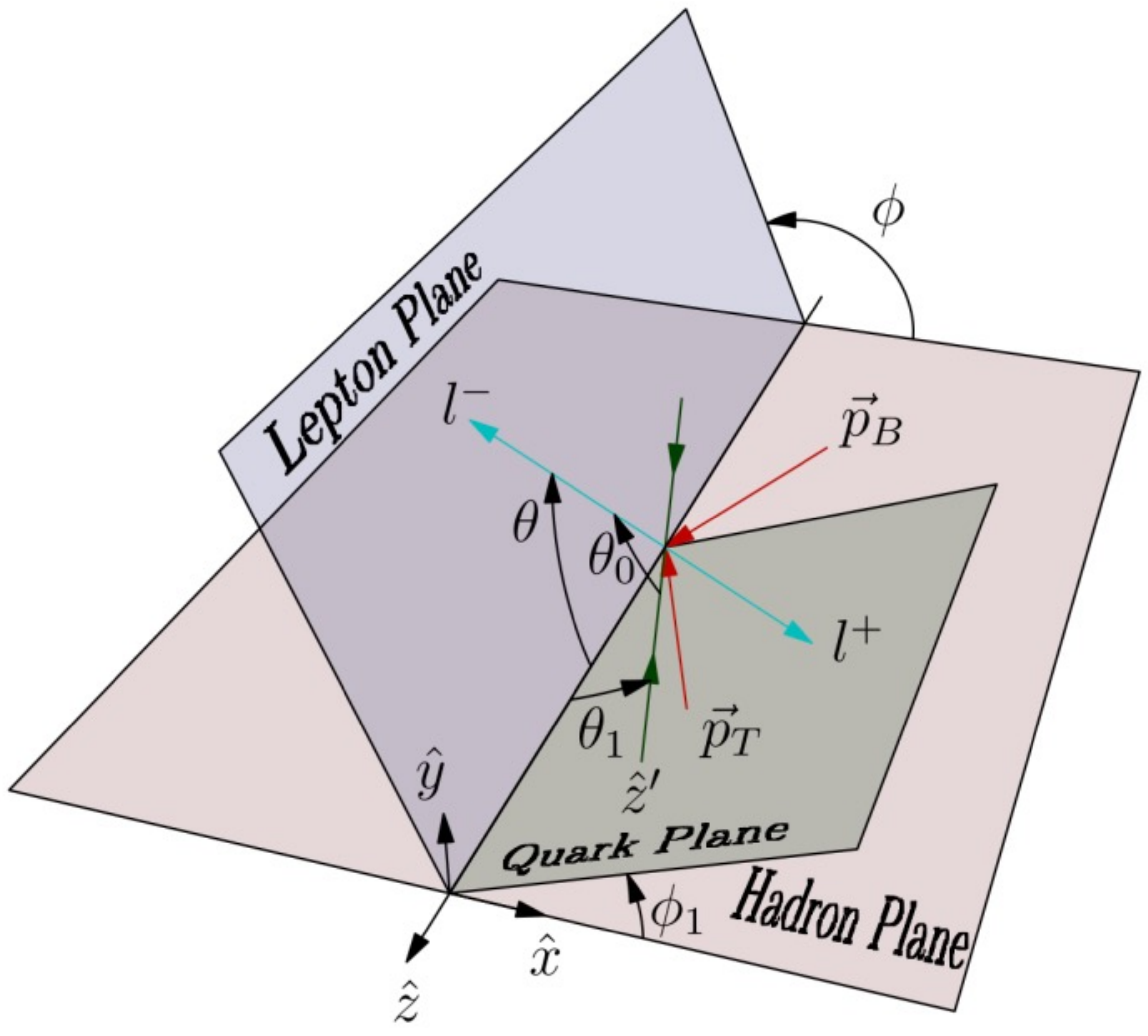


Рис. 3.1. Система Коллинза-Сопера, различные углы и плоскости в ней, в системе покоя Z-бозона [10], [9].

Сделаем замену переменных:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 &= q \\ p_1 - p_2 &= \Delta q \end{cases} \tag{2.11}$$

$$\begin{cases} p_1 &= \frac{1}{2}(q + \Delta q) \\ p_2 &= \frac{1}{2}(q - \Delta q) \end{cases} \tag{2.12}$$

Выберем систему, связанную с центом масс: $p_{1\mu} = (E, \vec{p}), p_{2\mu} = (E, -\vec{p})$, тогда:

$$q^\mu = (2E, \vec{0}) = (q_0, 0, 0, 0), \tag{2.13}$$

$$q^2 = q_0^2 = 4E^2 = 4(m^2 + \vec{p}^2) \approx \vec{q}^2, \tag{2.14}$$

$$\Delta q^\mu = (0, \vec{q}) = (0, q_1, q_2, q_3) = (0, 2\vec{p}), \tag{2.15}$$

$$\Delta q^2 = -\vec{q}^2 = -4\vec{p}^2 \tag{2.16}$$

$$L_{\mu\nu} = -(c_a^2 + c_v^2) g_{\mu\nu}(q^2 - \Delta q^2) + 2(c_a^2 + c_v^2)(q_\mu q_\nu -_\mu \Delta q_\nu) + \tag{2.17}$$

$$+ 2ic_a c_v \epsilon_{\mu\nu\sigma\rho}(q_\sigma q_\rho - \Delta q_\sigma \Delta q_\rho + \Delta q_\sigma q_\rho - q_\sigma \Delta q_\rho) \tag{2.18}$$

$$\epsilon_{ij\sigma\rho}(\Delta q_\sigma q_\rho - q_\sigma \Delta q_\rho) = \epsilon_{ijk0}(\Delta q_k q_0 - q_k \Delta q_0) + \epsilon_{ij0k}(\Delta q_0 q_k - q_0 \Delta q_k) = 2\epsilon_{ijk0} q_0, \tag{2.19}$$

$$L_{ij} = (c_a^2 + c_v^2)(-g_{ij}(q^2 - \Delta q^2) - 2\Delta q_i \Delta q_j) + 2ic_a c_v \epsilon_{ij\sigma\rho}(\Delta q_\sigma q_\rho - q_\sigma \Delta q_\rho) \approx \tag{2.20}$$

$$\approx 2\vec{q}^2 \left[(c_a^2 + c_v^2)(\delta_{ij} - n_i n_j) + 2ic_a c_v \epsilon_{ijk0} n_k\right]$$

$$\sigma \propto W^{ij} L_{ij} = W^{ij} \left[(c_a^2 + c_v^2)(\delta_{ij} - n_i n_j) + 2ic_a c_v \epsilon_{ijk0} n_k\right], \tag{2.21}$$

Угловое распределение

$$n = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \end{pmatrix} \qquad \epsilon_{ijk0}n_k = \begin{pmatrix} 0 & n^3 & -n^2 \\ -n^3 & 0 & n \\ n^2 & -n & 0 \end{pmatrix} \qquad W^{ij} = \begin{pmatrix} \omega_1 & a_1 + ia_2 & b_1 + ib_2 \\ a_1 - ia_2 & \omega_2 & c_1 + ic_2 \\ b_1 - ib_2 & c_1 - ic_2 & \omega_3 \end{pmatrix}$$

$$L_{ij} \propto \begin{pmatrix} 1-\cos^2\theta & -\cos\theta\cos\phi\sin\theta+2i\sin\theta\sin\phi & -\cos\theta\sin\phi\sin\theta-2i\cos\phi\sin\theta \\ -\cos\theta\cos\phi\sin\theta-2iC\sin\theta\sin\phi & 1-\cos^2\phi\sin^2\theta & -\cos\phi\sin^2\theta\sin\phi+2iC\cos\theta \\ -\cos\theta\sin\theta\sin\phi+2iC\cos\phi\sin\theta & -\cos\phi\sin\phi\sin^2\theta-2iC\cos\theta & 1-\sin^2\theta\sin^2\phi \end{pmatrix}$$

$$\sigma \propto W^{ij}L_{ij} = W^{ij}\left[(c_a^2 + c_v^2)(\delta_{ij} - n_i n_j) + 2ic_a c_v \epsilon_{ijk0} n_k\right],$$

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{1}{\sigma}\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{3}{4\pi}\frac{1}{3+\lambda_\theta}(1 + \lambda_\theta\cos^2\theta + \lambda_{\theta\phi}\sin 2\theta\cos\phi + \lambda_\phi\sin^2\theta\cos 2\phi + \\ +\lambda_{\perp\phi}\sin^2\theta\sin 2\phi + \lambda_{\perp\theta\phi}\sin 2\theta\sin\phi + 2A_\theta\cos\theta + 2A_\phi\sin\theta\cos\phi + 2A_{\perp\phi}\sin\theta\sin\phi)\end{aligned}}$$

Угловое распределение и инварианты

$$\frac{1}{\sigma}\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{3}{4\pi}\frac{1}{3+\lambda_\theta}(1+\lambda_\theta\cos^2\theta+\lambda_{\theta\phi}\sin 2\theta\cos\phi+\lambda_\phi\sin^2\theta\cos 2\phi+$$
$$+\lambda_{\perp\phi}\sin^2\theta\sin 2\phi+\lambda_{\perp\theta\phi}\sin 2\theta\sin\phi+2A_\theta\cos\theta+2A_\phi\sin\theta\cos\phi+2A_{\perp\phi}\sin\theta\sin\phi)$$

$$W^{ij} = \begin{pmatrix} \omega_1 & a_1+ia_2 & b_1+ib_2 \\ a_1-ia_2 & \omega_2 & c_1+ic_2 \\ b_1-ib_2 & c_1-ic_2 & \omega_3 \end{pmatrix}$$

$$\frac{2}{3+\lambda_\theta}\begin{pmatrix} \frac{1-\lambda_\theta}{2} & -\lambda_{\theta\phi}-iA_{\perp\phi} & -\lambda_{\perp\theta\phi}+iA_\phi \\ -\lambda_{\theta\phi}+iA_{\perp\phi} & \frac{1+\lambda_\theta-2\lambda_\phi}{2} & -\lambda_{\perp\phi}-iA_\theta \\ -\lambda_{\perp\theta\phi}-iA_\phi & -\lambda_{\perp\phi}+iA_\theta & \frac{1+\lambda_\theta+2\lambda_\phi}{2} \end{pmatrix}$$

$$W = \frac{1}{3}\cdot\mathbb{1}+W_s+iW_a$$

$$W' = S^T W S$$

$$\det\left[F - f\cdot\mathbb{1}\right] = 0$$

!!!ИНВАРИАНТЫ!!!

$$U_1 = \frac{A_\theta^2+A_\phi^2+A_{\perp\theta\phi}^2}{(3+\lambda_\theta)^2}, \qquad U_2 = \frac{\lambda_\theta^2+3\left(\lambda_\phi^2+\lambda_{\theta\phi}^2+\lambda_{\perp\phi}^2+\lambda_{\perp\theta\phi}^2\right)}{(3+\lambda_\theta)^2}$$

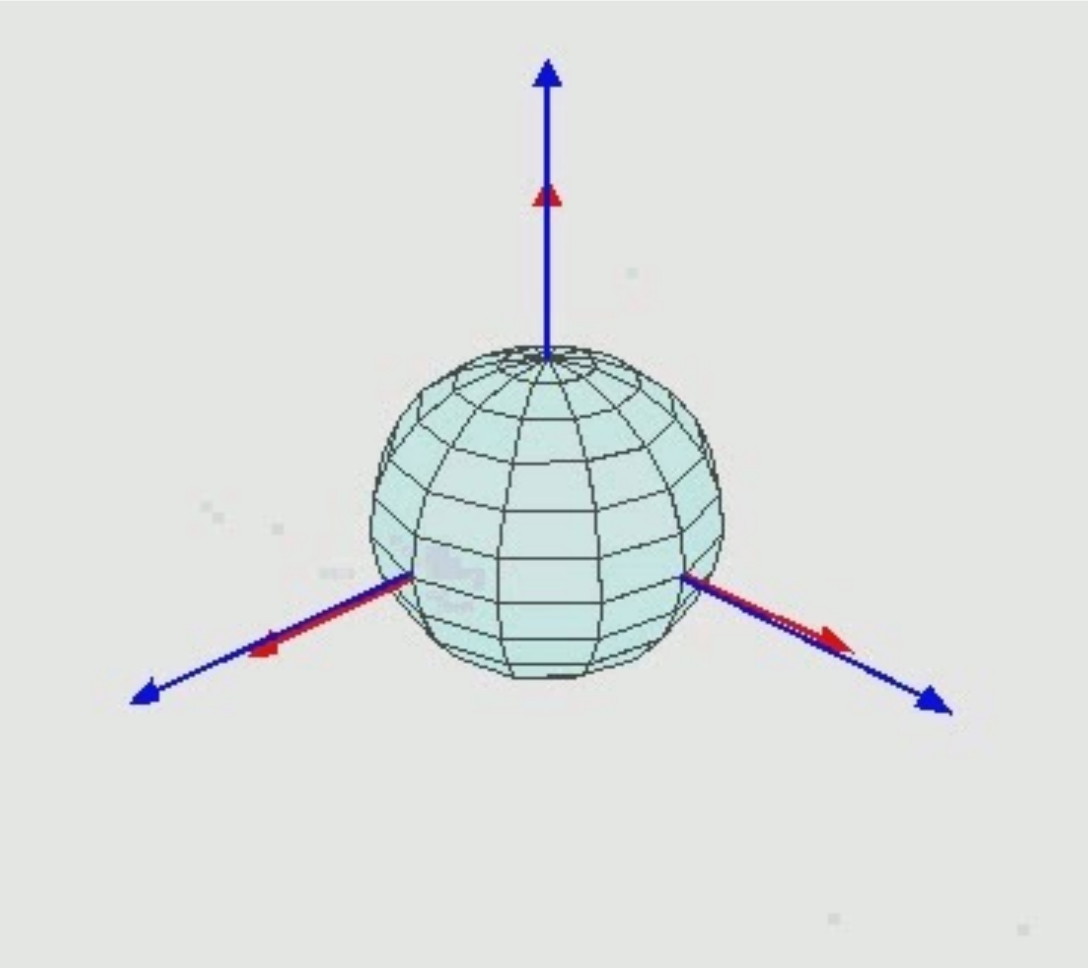
$$T = \frac{(\lambda_\theta+3\lambda_\phi)\left(2\lambda_\theta^2-6\lambda_\theta\lambda_\phi+9\lambda_{\theta\phi}^2\right)+9\left(\lambda_\theta\lambda_{\perp\theta\phi}^2-2\lambda_\theta\lambda_{\perp\phi}^2+6\lambda_{\theta\phi}\lambda_{\perp\theta\phi}\lambda_{\perp\phi}-3\lambda_\phi\lambda_{\perp\theta\phi}^2\right)}{(3+\lambda_\theta)^3}$$

$$R = \frac{1}{(\lambda_\theta+3)^3}\left(54\left(A_\theta A_\phi\lambda_{\theta\phi}+A_\theta A_{\perp\phi}\lambda_{\perp\theta\phi}+A_{\perp\phi}A_\phi\lambda_{\perp\phi}\right)+9\lambda_\theta\left(2A_\theta^2-A_{\perp\phi}^2-A_\phi^2\right)+27\lambda_\phi\left(A_\phi^2-A_{\perp\phi}^2\right)\right)$$

$$M = \frac{1}{(3+\lambda_\theta)^4}\left\{A_\theta^2\left(\lambda_\theta^2-9\lambda_\phi^2-9\lambda_{\perp\phi}^2\right)-A_\phi^2\left(2\lambda_\theta\left(\lambda_\theta+3\lambda_\phi\right)+9\lambda_{\perp\theta\phi}^2\right)+A_{\perp\phi}^2\left(6\lambda_\theta\lambda_\phi-2\lambda_\theta^2-9\lambda_{\theta\phi}^2\right)\right.$$
$$\left.+\,6A_\theta A_{\perp\phi}\left(\lambda_{\perp\theta\phi}\left(\lambda_\theta-3\lambda_\phi\right)+3\lambda_{\theta\phi}\lambda_{\perp\phi}\right)+6A_\phi\left[A_\theta\left(\lambda_{\theta\phi}\left(\lambda_\theta+3\lambda_\phi\right)+3\lambda_{\perp\theta\phi}\lambda_{\perp\phi}\right)+A_{\perp\phi}\left(3\lambda_{\theta\phi}\lambda_{\perp\theta\phi}-2\lambda_\theta\lambda_{\perp\phi}\right)\right]\right\}$$

Преобразование коэффициентов

Совершим преобразование системы отсчета при двух Эйлеровых поворотах



$$R = R_Z(\gamma)\cdot R_X(\beta)\cdot R_Z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha)\cos(\gamma)-\cos(\beta)\sin(\alpha)\sin(\gamma) & -\cos(\gamma)\sin(\alpha)-\cos(\alpha)\cos(\beta)\sin(\gamma) & \sin(\beta)\sin(\gamma) \\ \cos(\beta)\cos(\gamma)\sin(\alpha)+\cos(\alpha)\sin(\gamma) & \cos(\alpha)\cos(\beta)\cos(\gamma)-\sin(\alpha)\sin(\gamma) & -\cos(\gamma)\sin(\beta) \\ \sin(\alpha)\sin(\beta) & \cos(\alpha)\sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}$$

Как же тогда преобразуются коэффициенты УР и сохранятся ли инварианты?!

Выявление общих свойств при характерных преобразованиях…

Как это отразится на частицах в «закрученных состояниях»…

$$U_1 = \frac{A_\theta^2 + A_\phi^2 + A_{\perp\theta\phi}^2}{(3+\lambda_\theta)^2}, \qquad U_2 = \frac{\lambda_\theta^2 + 3\left(\lambda_\phi^2 + \lambda_{\theta\phi}^2 + \lambda_{\perp\phi}^2 + \lambda_{\perp\theta\phi}^2\right)}{(3+\lambda_\theta)^2}$$

$$T = \frac{(\lambda_\theta + 3\lambda_\phi)\left(2\lambda_\theta^2 - 6\lambda_\theta\lambda_\phi + 9\lambda_{\theta\phi}^2\right) + 9\left(\lambda_\theta\lambda_{\perp\theta\phi}^2 - 2\lambda_\theta\lambda_{\perp\phi}^2 + 6\lambda_{\theta\phi}\lambda_{\perp\theta\phi}\lambda_{\perp\phi} - 3\lambda_\phi\lambda_{\perp\theta\phi}^2\right)}{(3+\lambda_\theta)^3}$$

$$R = \frac{1}{(\lambda_\theta+3)^3}\left(54\left(A_\theta A_\phi\lambda_{\theta\phi} + A_\theta A_{\perp\phi}\lambda_{\perp\theta\phi} + A_{\perp\phi}A_\phi\lambda_{\perp\phi}\right) + 9\lambda_\theta\left(2A_\theta^2 - A_{\perp\phi}^2 - A_\phi^2\right) + 27\lambda_\phi\left(A_\phi^2 - A_{\perp\phi}^2\right)\right)$$

$$M = \frac{1}{(3+\lambda_\theta)^4}\left\{A_\theta^2\left(\lambda_\theta^2 - 9\lambda_\phi^2 - 9\lambda_{\perp\phi}^2\right) - A_\phi^2\left(2\lambda_\theta(\lambda_\theta+3\lambda_\phi) + 9\lambda_{\perp\theta\phi}^2\right) + A_{\perp\phi}^2\left(6\lambda_\theta\lambda_\phi - 2\lambda_\theta^2 - 9\lambda_{\theta\phi}^2\right)\right.$$
$$\left. + 6A_\theta A_{\perp\phi}\left(\lambda_{\perp\theta\phi}(\lambda_\theta - 3\lambda_\phi) + 3\lambda_{\theta\phi}\lambda_{\perp\phi}\right) + 6A_\phi\left[A_\theta\left(\lambda_{\theta\phi}(\lambda_\theta+3\lambda_\phi) + 3\lambda_{\perp\theta\phi}\lambda_{\perp\phi}\right) + A_{\perp\phi}\left(3\lambda_{\theta\phi}\lambda_{\perp\theta\phi} - 2\lambda_\theta\lambda_{\perp\phi}\right)\right]\right\}$$

Преобразование коэффициентов при повороте по азимутальному углу ϕ и постоянстве полярного угла θ

$$\frac{1}{\sigma}\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{3}{4\pi}\frac{1}{3+\lambda_0}(1 + \lambda_\theta \cos^2\theta + \lambda_{\theta\phi}\sin 2\theta\cos\phi + \\ + \lambda_\phi \sin^2\theta\cos 2\phi + \lambda_{\perp\phi}\sin^2\theta\sin 2\phi + \lambda_{\perp\theta\phi}\sin 2\theta\sin\phi + 2A_\theta\cos\theta + \\ + 2A_\phi\sin\theta\cos\phi + 2A_{\perp\phi}\sin\theta\sin\phi)$$

$$\begin{pmatrix}\cos\phi' \\ \sin\phi'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\phi_0 & -\sin\phi_0 \\ \sin\phi_0 & \cos\phi_0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\cos\phi \\ \sin\phi\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\sigma}\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{3}{4\pi}\frac{1}{3+\lambda'_\theta}(1 + \lambda'_\theta\cos^2\theta + \lambda'_{\theta\phi}\sin 2\theta(\cos\phi_0\cos\phi - \sin\phi_0\sin\phi) + \tag{4.3}$$

$$+\lambda'_\phi\sin^2\theta(\cos 2\phi_0\cos 2\phi - \sin 2\phi_0\sin 2\phi) + \lambda'_{\perp\phi}\sin^2\theta(\cos 2\phi_0\sin 2\phi + \sin 2\phi_0\cos 2\phi) +$$

$$+\lambda'_{\perp\theta\phi}\sin 2\theta(\cos\phi_0\sin\phi + \sin\phi_0\cos\phi) + 2A'_\theta\cos\theta + 2A'_\phi\sin\theta(\cos\phi_0\cos\phi - \sin\phi_0\sin\phi) +$$

$$+2'_{\perp\phi}\sin\theta(\cos\phi_0\sin\phi + \sin\phi_0\cos\phi))$$

$$\boxed{\begin{aligned}
\lambda_\theta &= \lambda'_\theta \\
\lambda_{\theta\phi} &= \lambda'_{\theta\phi}\cos\phi_0 + \lambda'_{\perp\theta\phi}\sin\phi_0 \\
\lambda_\phi &= \lambda'_\phi\cos 2\phi_0 + \lambda'_{\perp\phi}\sin 2\phi_0 \\
\lambda_{\perp\phi} &= \lambda'_{\perp\phi}\cos 2\phi_0 - \lambda'_\phi\sin 2\phi_0 \\
\lambda_{\perp\theta\phi} &= \lambda'_{\perp\theta\phi}\cos\phi_0 - \lambda'_{\theta\phi}\sin\phi_0 \\
A_\theta &= A'_\theta \\
A_\phi &= A'_\phi\cos\phi_0 + A'_{\perp\phi}\sin\phi_0 \\
A_{\perp\phi} &= A'_{\perp\phi}\cos\phi_0 - A'_\phi\sin\phi_0
\end{aligned}}$$

Преобразование коэффициентов при повороте по азимутальному углу ϕ и постоянстве полярного угла θ

$$U_1 = \frac{A_\theta^2 + A_\phi^2 + A_{\perp\theta\phi}^2}{(3+\lambda_\theta)^2}$$

$$U_2 = \frac{\lambda_\theta^2 + 3(\lambda_\phi^2 + \lambda_{\theta\phi}^2 + \lambda_{\perp\phi}^2 + \lambda_{\perp\theta\phi}^2)}{(3+\lambda_\theta)^2}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_\theta &= \lambda'_\theta && (1.12)\\
\lambda_{\theta\phi} &= \lambda'_{\theta\phi}\cos\phi_0 + \lambda'_{\perp\theta\phi}\sin\phi_0 && (1.13)\\
\lambda_\phi &= \lambda'_\phi\cos 2\phi_0 + \lambda'_{\perp\phi}\sin 2\phi_0 && (1.14)\\
\lambda_{\perp\phi} &= \lambda'_{\perp\phi}\cos 2\phi_0 - \lambda'_\phi\sin 2\phi_0 && (1.15)\\
\lambda_{\perp\theta\phi} &= \lambda'_{\perp\theta\phi}\cos\phi_0 - \lambda'_{\theta\phi}\sin\phi_0 && (1.16)\\
A_\theta &= A'_\theta && (1.17)\\
A_\phi &= A'_\phi\cos\phi_0 + A'_{\perp\phi}\sin\phi_0 && (1.18)\\
A_{\perp\phi} &= A'_{\perp\phi}\cos\phi_0 - A'_\phi\sin\phi_0 && (1.19)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_\theta &= \lambda'_\theta\\
\lambda_\phi^2 &= \lambda'^2_\phi\cos^2 2\phi_0 + \lambda'^2_{\perp\phi}\sin^2 2\phi_0 + \lambda'_\phi\lambda'_{\perp\phi}\sin 4\phi_0\\
\lambda_{\theta\phi}^2 &= \lambda'^2_{\theta\phi}\cos^2\phi_0 + \lambda'^2_{\perp\theta\phi}\sin^2\phi_0 + \lambda'_{\theta\phi}\lambda'_{\perp\theta\phi}\sin 2\phi_0\\
\lambda_{\perp\phi}^2 &= \lambda'^2_{\perp\phi}\cos^2 2\phi_0 + \lambda'^2_\phi\sin^2 2\phi_0 - \lambda'_{\perp\phi}\lambda'_\phi\sin 4\phi_0\\
\lambda_{\perp\theta\phi}^2 &= \lambda'^2_{\perp\theta\phi}\cos^2\phi_0 + \lambda'^2_{\theta\phi}\sin^2\phi_0 - \lambda'_{\perp\theta\phi}\lambda'_{\theta\phi}\sin 2\phi_0
\end{aligned}$$

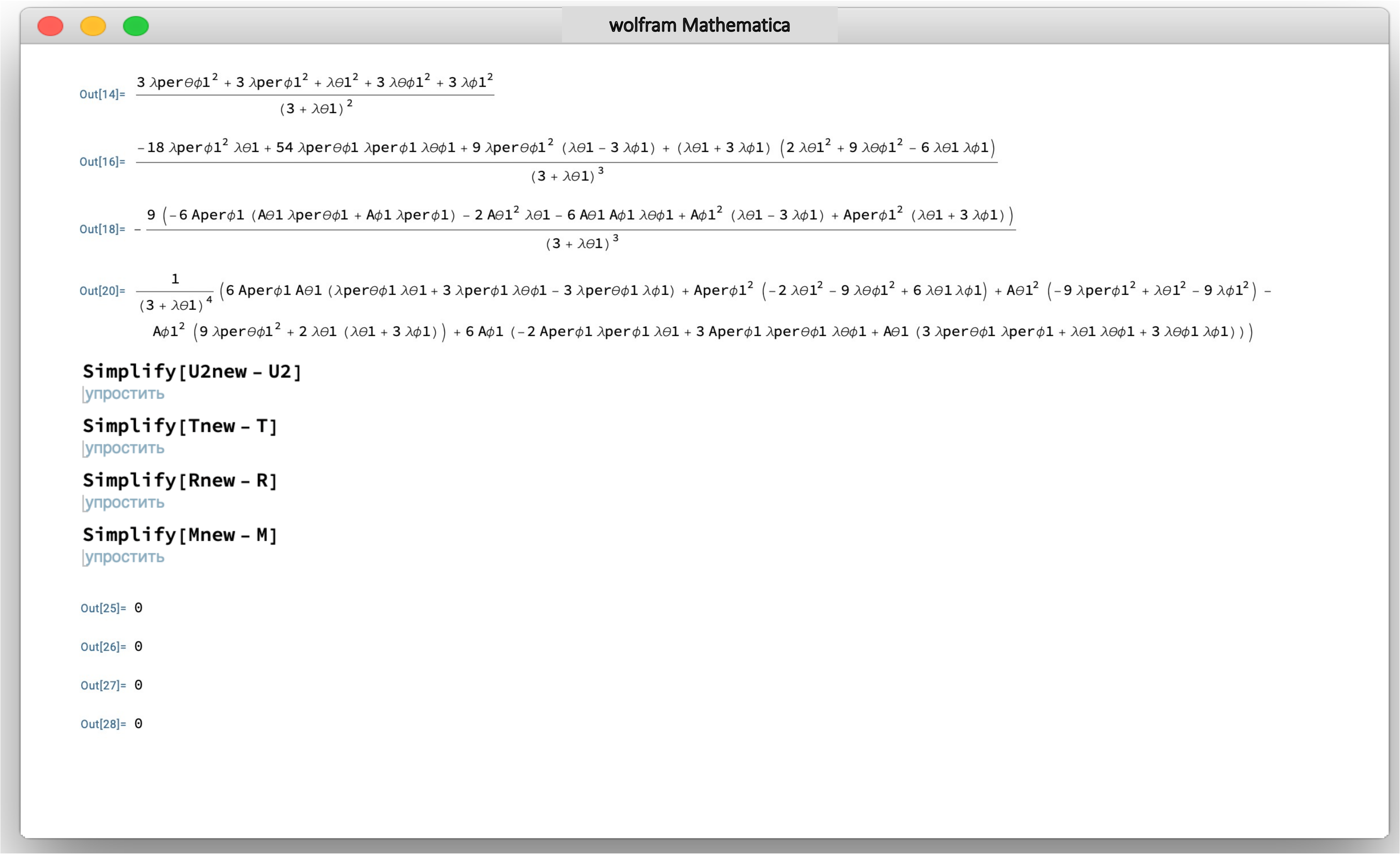
$$\begin{aligned}
(\lambda_\phi^2 + \lambda_{\theta\phi}^2 + \lambda_{\perp\phi}^2 + \lambda_{\perp\theta\phi}^2) &= (\lambda'^2_\phi + \lambda'^2_{\theta\phi} + \lambda'^2_{\perp\phi} + \lambda'^2_{\perp\theta\phi})\\
3+\lambda_\theta &= 3+\lambda'_\theta\\
\Rightarrow U_2 &= U'_2 = inv
\end{aligned}$$

Проверка инвариантов при преобразовании

$$T = \frac{(\lambda_\theta + 3\lambda_\phi)(2\lambda\theta^2 - 6\lambda_\theta\lambda_\phi + 9\lambda_{\theta\phi}^2) + 9(\lambda_\theta\lambda_{\perp\theta\phi}^2 - 2\lambda_\phi\lambda_{\perp\phi}^2 + 6\lambda_{\theta\phi}\lambda_{\perp\theta\phi}\lambda_{\perp\phi} - 3\lambda_\phi\lambda_{\perp\theta\phi})}{(3+\lambda_\theta^3)},$$

$$R = \frac{1}{(\lambda_\theta + 3)^3}\left(54\left(A_\theta A_\phi \lambda_{\theta\phi} + A_\theta A_{\perp\phi}\lambda_{\perp\theta\phi} + A_{\perp\phi}A_\phi\lambda_{\perp\phi}\right) + 9\lambda_\theta\left(2A_\theta^2 - A_{\perp\phi}^2 - A_\phi^2\right) + 27\lambda_\phi\left(A_\phi^2 - A_{\perp\phi}^2\right)\right)$$

$$M = \frac{1}{(3+\lambda_\theta)^4}\{A_\theta^2\left(\lambda_\theta^2 - 9\lambda_\phi^2 - 9\lambda_{\perp\phi}^2\right) - A_\phi^2\left(2\lambda_\theta\left(\lambda_\theta + 3\lambda_\phi\right) + 9\lambda_{\perp\theta\phi}^2\right) + A_{\perp\phi}^2\left(6\lambda_\theta\lambda_\phi - 2\lambda_\theta^2 - 9\lambda_{\theta\phi}^2\right)$$
$$+ 6A_\theta A_{\perp\phi}\left(\lambda_{\perp\theta\phi}\left(\lambda_\theta - 3\lambda_\phi\right) + 3\lambda_{\theta\phi}\lambda_{\perp\phi}\right) + 6A_\phi\left[A_\theta\left(\lambda_{\theta\phi}\left(\lambda_\theta + 3\lambda_\phi\right) + 3\lambda_{\perp\theta\phi}\lambda_{\perp\phi}\right) + A_{\perp\phi}\left(3\lambda_{\theta\phi}\lambda_{\perp\theta\phi} - 2\lambda_\theta\lambda_{\perp\phi}\right)\right]\}$$



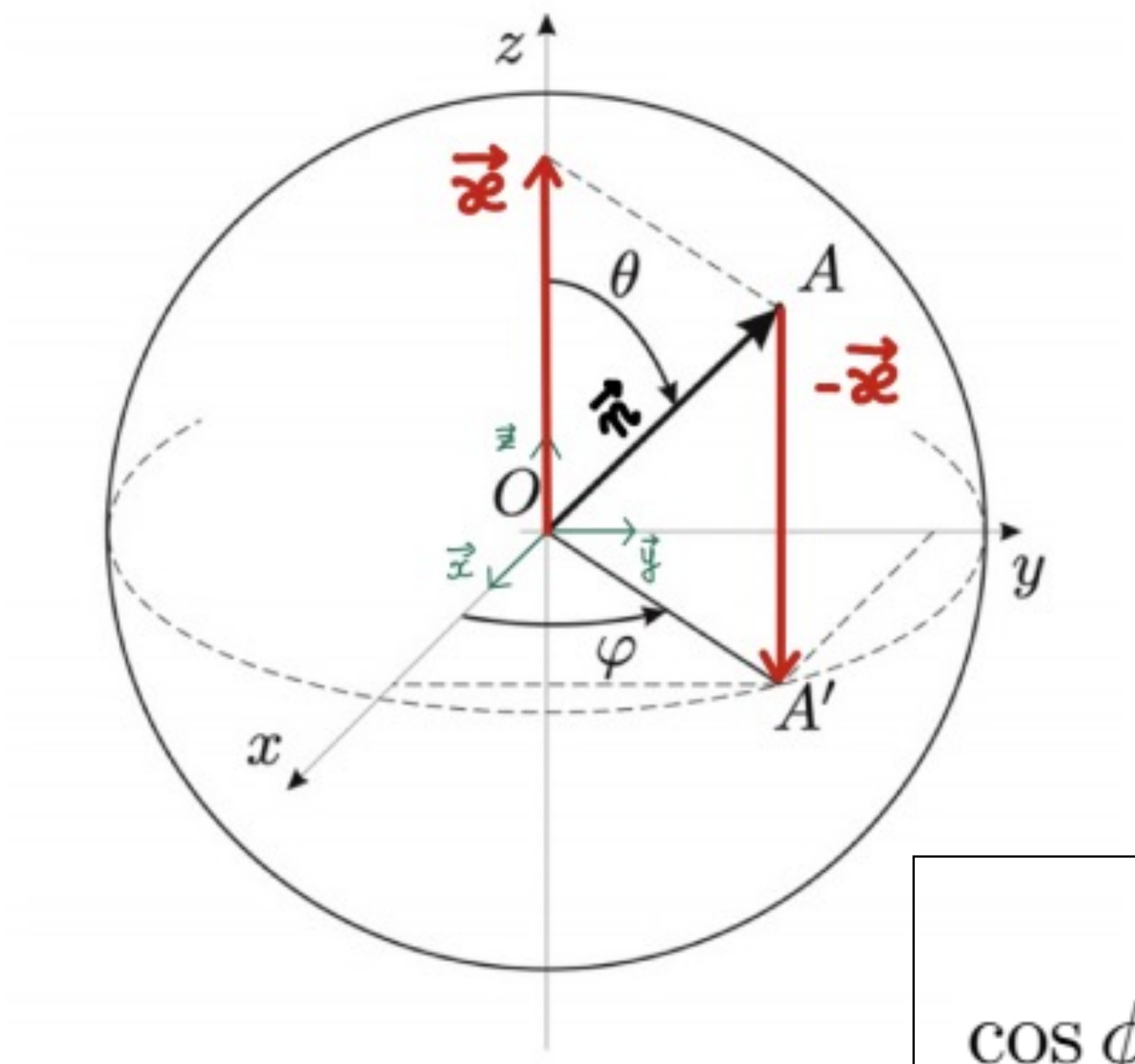
$$U_2 = U_2' = inv$$

$$T = T' = inv$$

$$R = R' = inv$$

$$M = M' = inv$$

Преобразование полярного угла при изменяемом азимутальном угле



$$(\vec{n}, \vec{z}) = \cos\theta.$$

$$\vec{b} = \vec{n} - \vec{\kappa} = \vec{n} - z(\vec{n}, \vec{z}),$$

$$(\vec{x}, \vec{b}) = |\vec{b}| \cos\phi.$$

$$\cos\phi = \frac{\vec{x}(\vec{n} - \vec{z}(\vec{n}, \vec{z}))}{\sqrt{1 - (\vec{n}, \vec{z})^2}}.$$

$$\vec{X}' = (-\sin\theta_0; \cos\theta_0; 0),$$
$$\vec{Z}' = (\cos\theta_0; \sin\theta_0; 0).$$

$$\cos\phi' = \frac{\cos\theta_0 \sin\theta \cos\phi - \sin\theta_0 \cos\theta}{\sqrt{1 - \cos^2\theta'}}$$

$$\cos\theta' = \sin\theta_0 \sin\theta \cos\phi + \cos\theta_0 \cos\theta$$

$$\sin\theta' \sin\phi' = \sin\theta \sin\phi$$

Преобразование коэффициентов при повороте по полярному углу θ

$$\frac{1}{\sigma}\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{3}{4\pi}\frac{1}{3+\lambda_0}(1+\lambda_\theta\cos^2\theta+\lambda_{\theta\phi}\sin 2\theta\cos\phi+ \\ +\lambda_\phi\sin^2\theta\cos 2\phi+\lambda_{\perp\phi}\sin^2\theta\sin 2\phi+\lambda_{\perp\theta\phi}\sin 2\theta\sin\phi+2A_\theta\cos\theta+ \\ +2A_\phi\sin\theta\cos\phi+2A_{\perp\phi}\sin\theta\sin\phi)$$

$$\frac{1}{\sigma}\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{3}{4\pi}\frac{1}{3+\lambda_\theta}(1+\lambda_\theta\cos^2\theta+\lambda_{\theta\phi}\sin 2\theta\cos\phi+\lambda_\phi\sin^2\theta\cos 2\phi)$$

$$\boxed{\begin{aligned}
\lambda'_\theta &= \frac{1}{\gamma}\left(\lambda_\theta\frac{2-3\cos^2\theta_0}{2}-\lambda_{\theta\phi}\frac{3\sin 2\theta_0}{2}+\lambda_\phi\frac{3\sin^2\theta_0}{2}\right),\\
\lambda'_{\theta\phi} &= \frac{1}{\gamma}\left(\lambda_\theta\frac{\sin 2\theta_0}{2}+\lambda_{\theta\phi}\cos 2\theta_0-\lambda_\phi\frac{3\sin 2\theta_0}{2}\right),\\
\lambda'_\phi &= \frac{1}{\gamma}\left(\lambda_\theta\frac{\sin^2\theta_0}{2}+\lambda_{\theta\phi}\frac{\sin 2\theta_0}{2}+\lambda_\phi\frac{2-\sin^2\theta_0}{2}\right),\\
\gamma &= 1+\lambda'_\theta\frac{\sin^2\theta_0}{2}+\lambda'_{\theta\phi}\frac{\sin 2\theta_0}{2}+\lambda'_\phi\left(\frac{-\sin^2\theta_0}{2}\right)
\end{aligned}}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\lambda'_\theta\\ \lambda'_{\theta\phi}\\ \lambda'_\phi\end{pmatrix}}_{\Lambda'} = \frac{1}{\gamma}\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{2-3\cos^2\theta_0}{2} & -\frac{3\sin 2\theta_0}{2} & \frac{3\sin^2\theta_0}{2}\\ \frac{\sin 2\theta_0}{2} & \cos 2\theta_0 & -\frac{3\sin 2\theta_0}{2}\\ \frac{\sin^2\theta_0}{2} & \frac{\sin 2\theta_0}{2} & \frac{2-\sin^2\theta_0}{2}\end{pmatrix}}_{\Gamma}\times\underbrace{\begin{pmatrix}\lambda_\theta\\ \lambda_{\theta\phi}\\ \lambda_\phi\end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

Преобразование коэффициентов при повороте по полярному углу θ

Случай ненулевого λ_ϕ

$$\frac{1}{\sigma}\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{3}{4\pi}\frac{1}{3+\lambda_\theta}\left(1 + \underset{\to 0}{\lambda_\theta}\cos^2\theta + \underset{\to 0}{\lambda_{\theta\phi}}\sin 2\theta\cos\phi + \lambda_\phi \sin^2\theta\cos 2\phi\right)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda'_\theta \\ \lambda'_{\theta\phi} \\ \lambda'_\phi \end{pmatrix}}_{\Lambda'} = \frac{1}{\gamma} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{2-3\cos^2\theta_0}{2} & -\frac{3\sin 2\theta_0}{2} & \frac{3\sin^2\theta_0}{2} \\ \frac{\sin 2\theta_0}{2} & \cos 2\theta_0 & -\frac{3\sin 2\theta_0}{2} \\ \frac{\sin^2\theta_0}{2} & \frac{\sin 2\theta_0}{2} & \frac{2-\sin^2\theta_0}{2} \end{pmatrix}}_{\Gamma} \times \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_\theta \\ \lambda_{\theta\phi} \\ \lambda_\phi \end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_\theta \\ \lambda_{\theta\phi} \\ \lambda_\phi \end{pmatrix} = \frac{1}{\gamma} \begin{pmatrix} \frac{3\cos^2\theta_0-1}{2} & -\frac{3\sin 2\theta_0}{2} & \frac{3\sin^2\theta_0}{2} \\ \frac{\sin 2\theta_0}{2} & \cos 2\theta_0 & -\frac{3\sin 2\theta_0}{2} \\ \frac{\sin^2\theta_0}{2} & \frac{\sin 2\theta_0}{2} & \frac{1+\cos^2\theta_0}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda'_\phi \end{pmatrix},$$

$$\gamma = 1 - \lambda'_\phi \frac{\sin^2\theta_0}{2} = \frac{2-\lambda'_\phi\sin^2\theta_0)}{2}.$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_\theta \\ \lambda_{\theta\phi} \\ \lambda_\phi \end{pmatrix} = \frac{1}{\gamma} \begin{pmatrix} \frac{3\sin^2\theta_0}{2}\lambda'_\phi \\ -\frac{\sin 2\theta_0}{2}\lambda'_\phi \\ \frac{1+\cos^2\theta_0}{2}\lambda'_\phi \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda_\theta &= \frac{3\sin^2\theta_0\lambda'_\phi}{2-\lambda'_\phi\sin^2\theta_0)} \\ \lambda_{\theta\phi} &= \frac{-\sin 2\theta_0\lambda'_\phi}{2-\lambda'_\phi\sin^2\theta_0)} \\ \lambda_\phi &= \frac{(1+\cos^2\theta_0)\lambda'_\phi}{2-\lambda'_\phi\sin^2\theta_0)} \end{aligned}}$$

Преобразование коэффициентов при повороте по полярному углу θ

Случай ненулевого λ_θ

$$\frac{1}{\sigma}\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{3}{4\pi}\frac{1}{3+\lambda_\theta}\left(1 + \lambda_\theta \cos^2\theta + \underbrace{\lambda_{\theta\phi}}_{0} \sin 2\theta \cos\phi + \underbrace{\lambda_\phi}_{0} \sin^2\theta \cos 2\phi\right)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda'_\theta \\ \lambda'_{\theta\phi} \\ \lambda'_\phi \end{pmatrix}}_{\Lambda'} = \frac{1}{\gamma} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{2-3\cos^2\theta_0}{2} & -\frac{3\sin 2\theta_0}{2} & \frac{3\sin^2\theta_0}{2} \\ \frac{\sin 2\theta_0}{2} & \cos 2\theta_0 & -\frac{3\sin 2\theta_0}{2} \\ \frac{\sin^2\theta_0}{2} & \frac{\sin 2\theta_0}{2} & \frac{2-\sin^2\theta_0}{2} \end{pmatrix}}_{\Gamma} \times \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_\theta \\ \lambda_{\theta\phi} \\ \lambda_\phi \end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_\theta \\ \lambda_{\theta\phi} \\ \lambda_\phi \end{pmatrix} = \frac{1}{\gamma} \begin{pmatrix} \frac{3\cos^2\theta_0 - 1}{2} & -\frac{3\sin 2\theta_0}{2} & \frac{3\sin^2\theta_0}{2} \\ \frac{\sin 2\theta_0}{2} & \cos 2\theta_0 & -\frac{3\sin 2\theta_0}{2} \\ \frac{\sin^2\theta_0}{2} & \frac{\sin 2\theta_0}{2} & \frac{1+\cos^2\theta_0}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \lambda'_\theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma = 1 + \lambda'_\theta \frac{\sin^2\theta_0}{2} = \frac{2 + \lambda'_\theta \sin^2\theta_0)}{2}.$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_\theta \\ \lambda_{\theta\phi} \\ \lambda_\phi \end{pmatrix} = \frac{1}{\gamma} \begin{pmatrix} \frac{(2-3\sin^2\theta_0)}{2}\lambda'_\theta \\ -\frac{\sin 2\theta_0}{2}\lambda'_\theta \\ \frac{\sin^2\theta_0}{2}\lambda'_\theta \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda_\theta &= \frac{(2-3\sin^2\theta_0)\lambda'_\theta}{(2+\lambda'_\theta \sin^2\theta_0)} \\ \lambda_{\theta\phi} &= \frac{\sin 2\theta_0 \lambda'_\theta}{(2+\lambda'_\theta \sin^2\theta_0)} \\ \lambda_\phi &= \frac{\sin^2\theta_0 \lambda'_\theta}{(2+\lambda'_\theta \sin^2\theta_0)} \end{aligned}}$$

Преобразование коэффициентов при повороте по полярному углу θ

$$\frac{1}{\sigma}\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{3}{4\pi}\frac{1}{3+\lambda_0}(1+\lambda_\theta\cos^2\theta+\lambda_{\theta\phi}\sin 2\theta\cos\phi+$$
$$+\ \lambda_\phi\sin^2\theta\cos 2\phi+\lambda_{\perp\phi}\sin^2\theta\sin 2\phi+\lambda_{\perp\theta\phi}\sin 2\theta\sin\phi+2A_\theta\cos\theta+$$
$$+\ 2A_\phi\sin\theta\cos\phi+2A_{\perp\phi}\sin\theta\sin\phi)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\lambda'_\theta\\ \lambda'_{\theta\phi}\\ \lambda'_\phi\\ \lambda'_{\perp\phi}\\ \lambda'_{\perp\theta\phi}\\ A'_\theta\\ A'_\phi\\ A'_{\perp\phi}\end{pmatrix}}_{\Lambda'} = \frac{1}{\gamma}\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{2-3\cos^2\theta_0}{2} & -\frac{3\sin 2\theta_0}{2} & \frac{3\sin^2\theta_0}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \frac{\sin 2\theta_0}{2} & \cos 2\theta_0 & -\frac{3\sin 2\theta_0}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \frac{\sin^2\theta_0}{2} & \frac{\sin 2\theta_0}{2} & \frac{2-\sin^2\theta_0}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta_0 & \sin\theta_0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta_0 & \cos\theta_0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\theta_0 & -\sin\theta_0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\theta_0 & \cos\theta_0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}_{\Gamma} \times \underbrace{\begin{pmatrix}\lambda_\theta\\ \lambda_{\theta\phi}\\ \lambda_\phi\\ \lambda_{\perp\phi}\\ \lambda_{\perp\theta\phi}\\ A_\theta\\ A_\phi\\ A_{\perp\phi}\end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

$$(\det\Gamma = 1)\ ,\ \text{тогда}\ \exists\Gamma^{-1} : \Gamma^{-1}\times\Gamma = \Gamma\times\Gamma^{-1} = \mathcal{I}_{3\times 3}:$$

Проверка инвариантов при преобразовании

$$U_1 = \frac{A_\theta^2 + A_\phi^2 + A_{\perp\theta\phi}^2}{(3+\lambda_\theta)^2} \qquad U_2 = \frac{\lambda_\theta^2 + 3(\lambda_\phi^2 + \lambda_{\theta\phi}^2 + \lambda_{\perp\phi}^2 + \lambda_{\perp\theta\phi}^2)}{(3+\lambda_\theta)^2}$$

$$T = \frac{(\lambda_\theta + 3\lambda_\phi)(2\lambda\theta^2 - 6\lambda_\theta\lambda_\phi + 9\lambda_{\theta\phi}^2) + 9(\lambda_\theta\lambda_{\perp\theta\phi}^2 - 2\lambda_\phi\lambda_{\perp\phi}^2 + 6\lambda_{\theta\phi}\lambda_{\perp\theta\phi}\lambda_{\perp\phi} - 3\lambda_\phi\lambda_{\perp\theta\phi})}{(3+\lambda_\theta^3)},$$

$$R = \frac{1}{(\lambda_\theta+3)^3}\left(54\left(A_\theta A_\phi \lambda_{\theta\phi} + A_\theta A_{\perp\phi}\lambda_{\perp\theta\phi} + A_{\perp\phi}A_\phi\lambda_{\perp\phi}\right) + 9\lambda_\theta\left(2A_\theta^2 - A_{\perp\phi}^2 - A_\phi^2\right) + 27\lambda_\phi\left(A_\phi^2 - A_{\perp\phi}^2\right)\right)$$

$$M = \frac{1}{(3+\lambda_\theta)^4}\left\{A_\theta^2\left(\lambda_\theta^2 - 9\lambda_\phi^2 - 9\lambda_{\perp\phi}^2\right) - A_\phi^2\left(2\lambda_\theta\left(\lambda_\theta + 3\lambda_\phi\right) + 9\lambda_{\perp\theta\phi}^2\right) + A_{\perp\phi}^2\left(6\lambda_\theta\lambda_\phi - 2\lambda_\theta^2 - 9\lambda_{\theta\phi}^2\right)\right.$$
$$\left. + 6A_\theta A_{\perp\phi}\left(\lambda_{\perp\theta\phi}\left(\lambda_\theta - 3\lambda_\phi\right) + 3\lambda_{\theta\phi}\lambda_{\perp\phi}\right) + 6A_\phi\left[A_\theta\left(\lambda_{\theta\phi}\left(\lambda_\theta + 3\lambda_\phi\right) + 3\lambda_{\perp\theta\phi}\lambda_{\perp\phi}\right) + A_{\perp\phi}\left(3\lambda_{\theta\phi}\lambda_{\perp\theta\phi} - 2\lambda_\theta\lambda_{\perp\phi}\right)\right]\right\}$$

wolfram Mathematica

```
Out[49]= (Aperϕ1^2 + Aθ1^2 + Aϕ1^2) / (3 + λθ1)^2

Out[51]= (3 λperθϕ1^2 + 3 λperϕ1^2 + λθ1^2 + 3 λθϕ1^2 + 3 λϕ1^2) / (3 + λθ1)^2

Out[53]= (-18 λperϕ1^2 λθ1 + 54 λperθϕ1 λperϕ1 λθϕ1 + 9 λperθϕ1^2 (λθ1 - 3 λϕ1) + (λθ1 + 3 λϕ1) (2 λθ1^2 + 9 λθϕ1^2 - 6 λθ1 λϕ1)) / (3 + λθ1)^3

Out[55]= -(9 (-6 Aperϕ1 (Aθ1 λperθϕ1 + Aϕ1 λperϕ1) - 2 Aθ1^2 λθ1 - 6 Aθ1 Aϕ1 λθϕ1 + Aϕ1^2 (λθ1 - 3 λϕ1) + Aperϕ1^2 (λθ1 + 3 λϕ1))) / (3 + λθ1)^3

Out[57]= 1/(3 + λθ1)^4 (6 Aperϕ1 Aθ1 (λperθϕ1 λθ1 + 3 λperϕ1 λθϕ1 - 3 λperθϕ1 λϕ1) + Aperϕ1^2 (-2 λθ1^2 - 9 λθϕ1^2 + 6 λθ1 λϕ1) + Aθ1^2 (-9 λperϕ1^2 + λθ1^2 - 9 λϕ1^2) -
   Aϕ1^2 (9 λperθϕ1^2 + 2 λθ1 (λθ1 + 3 λϕ1)) + 6 Aϕ1 (-2 Aperϕ1 λperϕ1 λθ1 + 3 Aperϕ1 λperθϕ1 λθϕ1 + Aθ1 (3 λperθϕ1 λperϕ1 + λθ1 λθϕ1 + 3 λθϕ1 λϕ1)))

In[63]:= U11new = (Aperϕ1^2 + Aθ1^2 + Aϕ1^2) / (3 + λθ1)^2;

U22new = (3 λperθϕ1^2 + 3 λperϕ1^2 + λθ1^2 + 3 λθϕ1^2 + 3 λϕ1^2) / (3 + λθ1)^2;

T1new = (-18 λperϕ1^2 λθ1 + 54 λperθϕ1 λperϕ1 λθϕ1 + 9 λperθϕ1^2 (λθ1 - 3 λϕ1) + (λθ1 + 3 λϕ1) (2 λθ1^2 + 9 λθϕ1^2 - 6 λθ1 λϕ1)) / (3 + λθ1)^3;

R1new = -(9 (-6 Aperϕ1 (Aθ1 λperθϕ1 + Aϕ1 λperϕ1) - 2 Aθ1^2 λθ1 - 6 Aθ1 Aϕ1 λθϕ1 + Aϕ1^2 (λθ1 - 3 λϕ1) + Aperϕ1^2 (λθ1 + 3 λϕ1))) / (3 + λθ1)^3;

M1new =
  1/(3 + λθ1)^4 (6 Aperϕ1 Aθ1 (λperθϕ1 λθ1 + 3 λperϕ1 λθϕ1 - 3 λperθϕ1 λϕ1) + Aperϕ1^2 (-2 λθ1^2 - 9 λθϕ1^2 + 6 λθ1 λϕ1) + Aθ1^2 (-9 λperϕ1^2 + λθ1^2 - 9 λϕ1^2) -
   Aϕ1^2 (9 λperθϕ1^2 + 2 λθ1 (λθ1 + 3 λϕ1)) + 6 Aϕ1 (-2 Aperϕ1 λperϕ1 λθ1 + 3 Aperϕ1 λperθϕ1 λθϕ1 + Aθ1 (3 λperθϕ1 λperϕ1 + λθ1 λθϕ1 + 3 λθϕ1 λϕ1)));

In[68]:= Simplify[U11new - U1]        Out[68]= 0
         упростить
         Simplify[U22new - U2]        Out[69]= 0
         упростить
         Simplify[T1new - T]          Out[70]= 0
         упростить
         Simplify[R1new - R]          Out[71]= 0
         упростить
         Simplify[M1new - M]          Out[72]= 0
         упростить
```

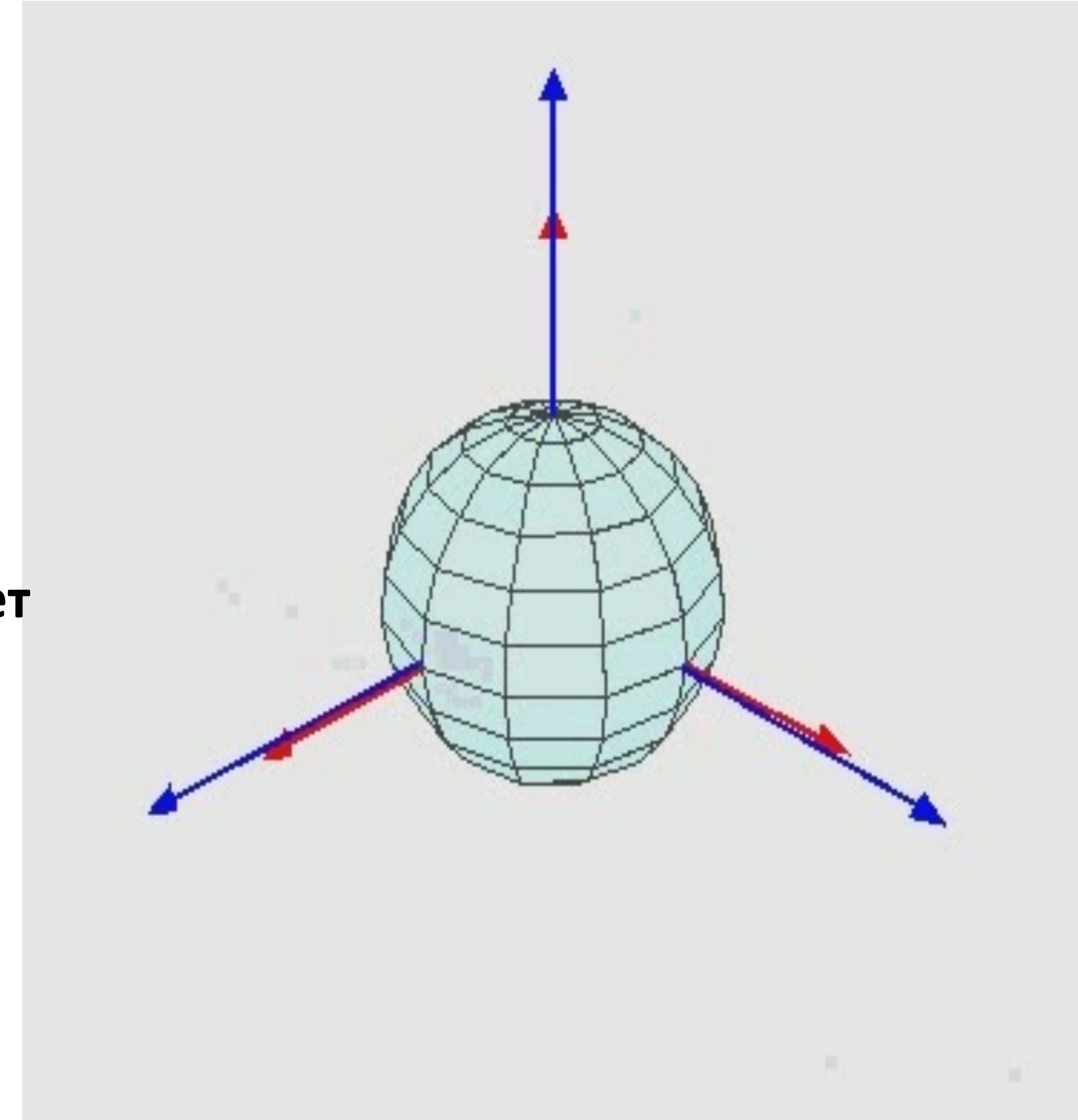
$$U_1 = U_1' = inv,$$
$$U_2 = U_2' = inv,$$
$$T = T' = inv,$$
$$R = R' = inv,$$
$$M = M' = inv.$$

Преобразования, осуществляемые за счет Эйлеровых поворотов (второй способ)

Эйлеровы повороты вектора относительного импульса мезонов.
Угловые распределения связаны с матрицей плотности бозона через свертку с лептонным током $\rho^{ij} L_{ij}$

$$L_{ij} \propto \delta_{ij} - n_i n_j + ig\epsilon_{ijk} n^k.$$

n – единичный вектор, направленный по относительному импульсу лептонов в СЦМ, преобразующийся под действием матриц Поворота. Преобразование вектора определяет преобразование матрицы плотности и, как следствие, угловых коэффициентов



$$\Gamma_1(\phi_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi_0 & -\sin\phi_0 \\ 0 & \sin\phi_0 & \cos\phi_0 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_2(\theta_0) = \begin{pmatrix} \cos\theta_0 & \sin\theta_0 & 0 \\ -\sin\theta_0 & \cos\theta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица плотности

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} & \rho_{xz} \\ \rho_{yx} & \rho_{yy} & \rho_{yz} \\ \rho_{zx} & \rho_{zy} & \rho_{zz} \end{pmatrix}.$$

$$L_{ij} \propto \delta_{ij} - n_i n_j + ig\epsilon_{ijk} n^k.$$

$$L_{ij} \propto \delta_{ij} - n_i n_j.$$

Помимо рассмотренного ранее подхода описания преобразования угловых коэффициентов в угловом распределении (3.1), полученном как свертку пространственных частей адронного и лептонного тензоров $W^{\mu\nu} L_{\mu\nu}$, а также его инвариантов (3.2) - (3.4), можно осуществить более общий случай преобразования, результатом которого будет нахождение законов преобразования матричных элементов матрицы плотности, а также их выражение через спиновые наблюдаемые, присутствующие в распределении (3.1), при совершении, в частном случае, отдельных Эйлеровых поворотов по ϕ и θ, а также, общего поворота системы отсчета, как суперпозиции трех Эйлеровых поворотов (так называемый, произвольный поворот). В этом случае, мы будем осуществлять вращение именно базисного вектора n, переходя к новому базису и, как следствие, получать преобразованное выражение лептонного тензора (2.21) в повернутой системе, а вместе с ним формулы преобразования матричных элементов.

Преобразования, осуществляемые за счет Эйлеровых поворотов

$$n' = \Gamma_1(\phi_0) \times n \qquad n' = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta\cos\phi\cos\phi_0 - \sin\theta\sin\phi\sin\phi_0 \\ \sin\theta\sin\phi\cos\phi_0 + \sin\theta\cos\phi\sin\phi_0 \end{pmatrix}$$

$$n'' = \Gamma_2(\theta_0) \times n \qquad n'' = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\theta_0 + \cos\phi\sin\theta\sin\theta_0 \\ \cos\theta_0\cos\phi\sin\theta - \cos\theta\sin\theta_0 \\ \sin\theta\sin\phi \end{pmatrix}$$

$$n''' = \Gamma_2(\theta_0) \times \Gamma_1(\phi_0) \times n \qquad n''' = \begin{pmatrix} \sin\theta\sin\theta_0\cos\phi + \cos\theta\cos\theta_0 \\ \sin\theta\cos\theta_0\cos\phi\cos\phi_0 - \cos\theta\sin\theta_0\cos\phi_0 - \sin\theta\sin\phi\sin\phi_0 \\ \sin\theta\cos\theta_0\cos\phi\sin\phi_0 - \cos\theta\sin\theta_0\sin\phi_0 + \sin\theta\sin\phi\cos\phi_0 \end{pmatrix}$$

Лептонный тензор и его преобразование

$$L_{ij} \propto \delta_{ij} - n_i n_j + ig\epsilon_{ijk} n^k.$$

$$L_{ij} \propto \delta_{ij} - n_i n_j.$$

$$n = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \end{pmatrix}$$

$$n' = \Gamma_1(\phi_0) \times n$$

$$n'' = \Gamma_2(\theta_0) \times n$$

$$n''' = \Gamma_2(\theta_0) \times \Gamma_1(\phi_0) \times n$$

Лептонный тензор при преобразованиях

wolfram Mathematica

$$\theta_0 = 0, \phi_0 = 0$$

Out[ ]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 - \mathrm{Cos}[\theta]^2 & -\mathrm{Cos}[\theta]\,\mathrm{Cos}[\phi]\,\mathrm{Sin}[\theta] & -\mathrm{Cos}[\theta]\,\mathrm{Sin}[\theta]\,\mathrm{Sin}[\phi] \\ -\mathrm{Cos}[\theta]\,\mathrm{Cos}[\phi]\,\mathrm{Sin}[\theta] & 1 - \mathrm{Cos}[\phi]^2\,\mathrm{Sin}[\theta]^2 & -\mathrm{Cos}[\phi]\,\mathrm{Sin}[\theta]^2\,\mathrm{Sin}[\phi] \\ -\mathrm{Cos}[\theta]\,\mathrm{Sin}[\theta]\,\mathrm{Sin}[\phi] & -\mathrm{Cos}[\phi]\,\mathrm{Sin}[\theta]^2\,\mathrm{Sin}[\phi] & 1 - \mathrm{Sin}[\theta]^2\,\mathrm{Sin}[\phi]^2 \end{pmatrix}$$

Лептонный тензор при преобразованиях

wolfram Mathematica

$$\theta_0 = 0, \phi_0 \neq 0$$

Out[ ]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix}
1 - \mathrm{Cos}[\theta]^2 & -\mathrm{Cos}[\theta]\,(\mathrm{Cos}[\phi]\,\mathrm{Cos}[\phi 0]\,\mathrm{Sin}[\theta] - \mathrm{Sin}[\theta]\,\mathrm{Sin}[\phi]\,\mathrm{Sin}[\phi 0]) & -\mathrm{Cos}[\theta]\,(\mathrm{Cos}[\phi 0]\,\mathrm{Sin}[\theta]\,\mathrm{Sin}[\phi] + \mathrm{Cos}[\phi]\,\mathrm{Sin}[\theta]\,\mathrm{Sin}[\phi 0]) \\
-\mathrm{Cos}[\theta]\,(\mathrm{Cos}[\phi]\,\mathrm{Cos}[\phi 0]\,\mathrm{Sin}[\theta] - \mathrm{Sin}[\theta]\,\mathrm{Sin}[\phi]\,\mathrm{Sin}[\phi 0]) & 1 - (\mathrm{Cos}[\phi]\,\mathrm{Cos}[\phi 0]\,\mathrm{Sin}[\theta] - \mathrm{Sin}[\theta]\,\mathrm{Sin}[\phi]\,\mathrm{Sin}[\phi 0])^2 & -((\mathrm{Cos}[\phi 0]\,\mathrm{Sin}[\theta]\,\mathrm{Sin}[\phi] + \mathrm{Cos}[\phi]\,\mathrm{Sin}[\theta]\,\mathrm{Sin}[\phi 0])\,(\mathrm{Cos}[\phi]\,\mathrm{Cos}[\phi 0]\,\mathrm{Sin}[\theta] - \mathrm{Sin}[\theta]\,\mathrm{Sin}[\phi]\,\mathrm{Sin}[\phi 0])) \\
-\mathrm{Cos}[\theta]\,(\mathrm{Cos}[\phi 0]\,\mathrm{Sin}[\theta]\,\mathrm{Sin}[\phi] + \mathrm{Cos}[\phi]\,\mathrm{Sin}[\theta]\,\mathrm{Sin}[\phi 0]) & -((\mathrm{Cos}[\phi 0]\,\mathrm{Sin}[\theta]\,\mathrm{Sin}[\phi] + \mathrm{Cos}[\phi]\,\mathrm{Sin}[\theta]\,\mathrm{Sin}[\phi 0])\,(\mathrm{Cos}[\phi]\,\mathrm{Cos}[\phi 0]\,\mathrm{Sin}[\theta] - \mathrm{Sin}[\theta]\,\mathrm{Sin}[\phi]\,\mathrm{Sin}[\phi 0])) & 1 - (\mathrm{Cos}[\phi 0]\,\mathrm{Sin}[\theta]\,\mathrm{Sin}[\phi] + \mathrm{Cos}[\phi]\,\mathrm{Sin}[\theta]\,\mathrm{Sin}[\phi 0])^2
\end{pmatrix}$$

Лептонный тензор при преобразованиях

wolfram Mathematica

$$\theta_0 \neq 0, \phi_0 = 0$$

Out[ ]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix}
1-(\mathrm{Cos}[\theta]\,\mathrm{Cos}[\theta 0]+\mathrm{Cos}[\phi]\,\mathrm{Sin}[\theta]\,\mathrm{Sin}[\theta 0])^2 & -((\mathrm{Cos}[\theta 0]\,\mathrm{Cos}[\phi]\,\mathrm{Sin}[\theta]-\mathrm{Cos}[\theta]\,\mathrm{Sin}[\theta 0])\,(\mathrm{Cos}[\theta]\,\mathrm{Cos}[\theta 0]+\mathrm{Cos}[\phi]\,\mathrm{Sin}[\theta]\,\mathrm{Sin}[\theta 0])) & -\mathrm{Sin}[\theta]\,(\mathrm{Cos}[\theta]\,\mathrm{Cos}[\theta 0]+\mathrm{Cos}[\phi]\,\mathrm{Sin}[\theta]\,\mathrm{Sin}[\theta 0])\,\mathrm{Sin}[\phi] \\
-((\mathrm{Cos}[\theta 0]\,\mathrm{Cos}[\phi]\,\mathrm{Sin}[\theta]-\mathrm{Cos}[\theta]\,\mathrm{Sin}[\theta 0])\,(\mathrm{Cos}[\theta]\,\mathrm{Cos}[\theta 0]+\mathrm{Cos}[\phi]\,\mathrm{Sin}[\theta]\,\mathrm{Sin}[\theta 0])) & 1-(\mathrm{Cos}[\theta 0]\,\mathrm{Cos}[\phi]\,\mathrm{Sin}[\theta]-\mathrm{Cos}[\theta]\,\mathrm{Sin}[\theta 0])^2 & -\mathrm{Sin}[\theta]\,(\mathrm{Cos}[\theta 0]\,\mathrm{Cos}[\phi]\,\mathrm{Sin}[\theta]-\mathrm{Cos}[\theta]\,\mathrm{Sin}[\theta 0])\,\mathrm{Sin}[\phi] \\
-\mathrm{Sin}[\theta]\,(\mathrm{Cos}[\theta]\,\mathrm{Cos}[\theta 0]+\mathrm{Cos}[\phi]\,\mathrm{Sin}[\theta]\,\mathrm{Sin}[\theta 0])\,\mathrm{Sin}[\phi] & -\mathrm{Sin}[\theta]\,(\mathrm{Cos}[\theta 0]\,\mathrm{Cos}[\phi]\,\mathrm{Sin}[\theta]-\mathrm{Cos}[\theta]\,\mathrm{Sin}[\theta 0])\,\mathrm{Sin}[\phi] & 1-\mathrm{Sin}[\theta]^2\,\mathrm{Sin}[\phi]^2
\end{pmatrix}$$

Лептонный тензор при преобразованиях

wolfram Mathematica

$$\theta_0 \neq 0, \phi_0 \neq 0$$

Out[•]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix}
1 - (\mathrm{Cos}[\theta]\ \mathrm{Cos}[\theta0] + \mathrm{Cos}[\phi]\ \mathrm{Sin}[\theta]\ \mathrm{Sin}[\theta0])^2 \\
-((\mathrm{Cos}[\theta]\ \mathrm{Cos}[\theta0] + \mathrm{Cos}[\phi]\ \mathrm{Sin}[\theta]\ \mathrm{Sin}[\theta0])\ (\mathrm{Cos}[\theta0]\ \mathrm{Cos}[\phi]\ \mathrm{Cos}[\phi0]\ \mathrm{Sin}[\theta] - \mathrm{Cos}[\theta]\ \mathrm{Cos}[\phi0]\ \mathrm{Sin}[\theta0] - \mathrm{Sin}[\theta]\ \mathrm{Sin}[\phi]\ \mathrm{Sin}[\phi0])) \\
-((\mathrm{Cos}[\theta]\ \mathrm{Cos}[\theta0] + \mathrm{Cos}[\phi]\ \mathrm{Sin}[\theta]\ \mathrm{Sin}[\theta0])\ (\mathrm{Cos}[\phi0]\ \mathrm{Sin}[\theta]\ \mathrm{Sin}[\phi] + \mathrm{Cos}[\theta0]\ \mathrm{Cos}[\phi]\ \mathrm{Sin}[\theta]\ \mathrm{Sin}[\phi0] - \mathrm{Cos}[\theta]\ \mathrm{Sin}[\theta0]\ \mathrm{Sin}[\phi0])) \\
\\
-((\mathrm{Cos}[\theta]\ \mathrm{Cos}[\theta0] + \mathrm{Cos}[\phi]\ \mathrm{Sin}[\theta]\ \mathrm{Sin}[\theta0])\ (\mathrm{Cos}[\theta0]\ \mathrm{Cos}[\phi]\ \mathrm{Cos}[\phi0]\ \mathrm{Sin}[\theta] - \mathrm{Cos}[\theta]\ \mathrm{Cos}[\phi0]\ \mathrm{Sin}[\theta0] - \mathrm{Sin}[\theta]\ \mathrm{Sin}[\phi]\ \mathrm{Sin}[\phi0])) \\
1 - (\mathrm{Cos}[\theta0]\ \mathrm{Cos}[\phi]\ \mathrm{Cos}[\phi0]\ \mathrm{Sin}[\theta] - \mathrm{Cos}[\theta]\ \mathrm{Cos}[\phi0]\ \mathrm{Sin}[\theta0] - \mathrm{Sin}[\theta]\ \mathrm{Sin}[\phi]\ \mathrm{Sin}[\phi0])^2 \\
-((\mathrm{Cos}[\phi0]\ \mathrm{Sin}[\theta]\ \mathrm{Sin}[\phi] + \mathrm{Cos}[\theta0]\ \mathrm{Cos}[\phi]\ \mathrm{Sin}[\theta]\ \mathrm{Sin}[\phi0] - \mathrm{Cos}[\theta]\ \mathrm{Sin}[\theta0]\ \mathrm{Sin}[\phi0])\ (\mathrm{Cos}[\theta0]\ \mathrm{Cos}[\phi]\ \mathrm{Cos}[\phi0]\ \mathrm{Sin}[\theta] - \mathrm{Cos}[\theta]\ \mathrm{Cos}[\phi0]\ \mathrm{Sin}[\theta0] - \mathrm{Sin}[\theta]\ \mathrm{Sin}[\phi]\ \mathrm{Sin}[\phi0])) \\
\\
-((\mathrm{Cos}[\theta]\ \mathrm{Cos}[\theta0] + \mathrm{Cos}[\phi]\ \mathrm{Sin}[\theta]\ \mathrm{Sin}[\theta0])\ (\mathrm{Cos}[\phi0]\ \mathrm{Sin}[\theta]\ \mathrm{Sin}[\phi] + \mathrm{Cos}[\theta0]\ \mathrm{Cos}[\phi]\ \mathrm{Sin}[\theta]\ \mathrm{Sin}[\phi0] - \mathrm{Cos}[\theta]\ \mathrm{Sin}[\theta0]\ \mathrm{Sin}[\phi0])) \\
-((\mathrm{Cos}[\phi0]\ \mathrm{Sin}[\theta]\ \mathrm{Sin}[\phi] + \mathrm{Cos}[\theta0]\ \mathrm{Cos}[\phi]\ \mathrm{Sin}[\theta]\ \mathrm{Sin}[\phi0] - \mathrm{Cos}[\theta]\ \mathrm{Sin}[\theta0]\ \mathrm{Sin}[\phi0])\ (\mathrm{Cos}[\theta0]\ \mathrm{Cos}[\phi]\ \mathrm{Cos}[\phi0]\ \mathrm{Sin}[\theta] - \mathrm{Cos}[\theta]\ \mathrm{Cos}[\phi0]\ \mathrm{Sin}[\theta0] - \mathrm{Sin}[\theta]\ \mathrm{Sin}[\phi]\ \mathrm{Sin}[\phi0])) \\
1 - (\mathrm{Cos}[\phi0]\ \mathrm{Sin}[\theta]\ \mathrm{Sin}[\phi] + \mathrm{Cos}[\theta0]\ \mathrm{Cos}[\phi]\ \mathrm{Sin}[\theta]\ \mathrm{Sin}[\phi0] - \mathrm{Cos}[\theta]\ \mathrm{Sin}[\theta0]\ \mathrm{Sin}[\phi0])^2
\end{pmatrix}$$

Матрица плотности

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} & \rho_{xz} \\ \rho_{yx} & \rho_{yy} & \rho_{yz} \\ \rho_{zx} & \rho_{zy} & \rho_{zz} \end{pmatrix} \qquad L_{ij} \propto \delta_{ij} - n_i n_j.$$

$$\boxed{\begin{aligned} Tr(\rho_{ij} L^T_{jk}) = \rho_{xx} + \frac{\rho_{xy}}{2} + \frac{\rho_{zz}}{2} + (\frac{\rho_{zz}}{2} + \frac{\rho_{yy} - \rho_{xx}}{2}) \cos^2\theta - \rho_{xy} \sin 2\theta \cos\phi - \\ \rho_{xz} \sin 2\theta \cos\phi - \rho_{yz} \sin^2\theta \sin 2\phi + (\frac{\rho_{zz} - \rho_{yy}}{2}) \sin^2\theta \cos 2\phi \end{aligned}}$$

Первый Эйлеров поворот. Преобразование по углу $\boldsymbol{\phi}$

$$Tr(\rho_{ij}L_{jk}^T) = \rho_{xx} + \frac{\rho_{xy}}{2} + \frac{\rho_{zz}}{2} + (\frac{\rho_{zz}}{2} + \frac{\rho_{yy} - \rho_{xx}}{2})\cos^2\theta - \rho_{xy}\sin 2\theta\cos\phi - \rho_{xz}\sin 2\theta\cos\phi - \rho_{yz}\sin^2\theta\sin 2\phi + (\frac{\rho_{zz} - \rho_{yy}}{2})\sin^2\theta\cos 2\phi$$

$$\begin{aligned} Tr(\rho_{ij}L_{jk}^T) = {} & (\rho_{xx} + \frac{\rho_{yy}}{2} + \frac{\rho_{zz}}{2}) + (-\rho_{xx} + \frac{\rho_{yy}}{2} + \frac{\rho_{zz}}{2})\cos^2\theta + (-\rho_{xy}\cos\phi_0 - \rho_{xz}\sin\phi_0)\sin 2\theta\cos\phi + (\frac{\rho_{zz}\cos 2\phi_0}{2} - \frac{\rho_{yy}\cos 2\phi_0}{2} - \rho_{yz}\sin 2\phi_0)\sin^2\theta\cos 2\phi + \\ & + (\frac{\rho_{yy}\sin 2\phi_0}{2} - \frac{\rho_{zz}\sin 2\phi_0}{2} - \rho_{yz}\cos 2\phi_0)\sin^2\theta\sin 2\phi + (\rho_{xy}\sin\phi_0 - \rho_{xz}\cos\phi_0)\sin 2\theta\sin\phi \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \rho'_{xx} + \frac{\rho'_{yy}}{2} + \frac{\rho'_{zz}}{2} = \rho_{xx} + \frac{\rho_{yy}}{2} + \frac{\rho_{zz}}{2}, \\ -\rho'_{xx} + \frac{\rho'_{yy}}{2} + \frac{\rho'_{zz}}{2} = -\rho_{xx} + \frac{\rho_{yy}}{2} + \frac{\rho_{zz}}{2}, \\ \frac{\rho'_{zz} - \rho'_{yy}}{2} = \frac{\rho_{yy}\sin 2\phi_0}{2} - \frac{\rho_{zz}\sin 2\phi_0}{2} - \rho_{yz}\cos 2\phi_0, \\ \rho'_{xy} = \rho_{xy}\cos\phi_0 + \rho_{xz}\sin\phi_0, \\ \rho'_{xz} = -\rho_{xy}\sin\phi_0 + \rho_{xz}\cos\phi_0, \\ \rho'_{yz} = -\frac{\rho_{yy}\sin 2\phi_0}{2} + \frac{\rho_{zz}\sin 2\phi_0}{2} + \rho_{yz}\cos 2\phi_0, \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \rho'_{xx} \\ \rho'_{yy} \\ \rho'_{zz} \\ \rho'_{xy} \\ \rho'_{xz} \\ \rho'_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2\phi_0 & \sin^2\phi_0 & 0 & 0 & -\sin 2\phi_0 \\ 0 & \cos^2\phi_0 & \cos^2\phi_0 & 0 & 0 & \sin 2\phi_0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\phi_0 & \sin\phi_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\phi_0 & \cos\phi_0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sin 2\phi_0}{2} & \frac{\sin 2\phi_0}{2} & 0 & 0 & \cos 2\phi_0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \rho_{xx} \\ \rho_{yy} \\ \rho_{zz} \\ \rho_{xy} \\ \rho_{xz} \\ \rho_{yz} \end{pmatrix}$$

Проверка инвариантов при преобразовании

$$U_2 = \frac{\lambda_\theta^2 + 3(\lambda_\phi^2 + \lambda_{\theta\phi}^2 + \lambda_{\perp\phi}^2 + \lambda_{\perp\theta\phi}^2)}{(3+\lambda_\theta^2)}, \qquad T = \frac{(\lambda_\theta + 3\lambda_\phi)(2\lambda\theta^2 - 6\lambda_\theta\lambda_\phi + 9\lambda_{\theta\phi}^2) + 9(\lambda_\theta\lambda_{\perp\theta\phi}^2 - 2\lambda_\phi\lambda_{\perp\phi}^2 + 6\lambda_{\theta\phi}\lambda_{\perp\theta\phi}\lambda_{\perp\phi} - 3\lambda_\phi\lambda_{\perp\theta\phi})}{(3+\lambda_\theta^3)},$$

wolfram Mathematica

Out[•]= $\dfrac{4\left(\rho xx^2 + 3\,\rho xy^2 + 3\,\rho xz^2 + \rho yy^2 + 3\,\rho yz^2 - \rho yy\,\rho zz + \rho zz^2 - \rho xx\,(\rho yy + \rho zz)\right)}{(6 - 2\,\rho xx + \rho yy + \rho zz)^2}$

Out[•]= $-\dfrac{1}{(6 - 2\,\rho xx + \rho yy + \rho zz)^3}\, 8\left(2\,\rho xx^3 - 18\,\rho xz^2\,\rho yy + 2\,\rho yy^3 + 54\,\rho xy\,\rho xz\,\rho yz + 9\,\rho yy\,\rho yz^2 + 9\,\rho xy^2\,(\rho yy - 2\,\rho zz) + 9\,\rho xz^2\,\rho zz - 3\,\rho yy^2\,\rho zz + 9\,\rho yz^2\,\rho zz - 3\,\rho yy\,\rho zz^2 + 2\,\rho zz^3 - 3\,\rho xx^2\,(\rho yy + \rho zz) + 3\,\rho xx\left(3\,\rho xy^2 + 3\,\rho xz^2 - \rho yy^2 - 6\,\rho yz^2 + 4\,\rho yy\,\rho zz - \rho zz^2\right)\right)$

Out[•]= $\dfrac{4\left(\rho xx^2 + 3\,\rho xy^2 + 3\,\rho xz^2 + \rho yy^2 + 3\,\rho yz^2 - \rho yy\,\rho zz + \rho zz^2 - \rho xx\,(\rho yy + \rho zz)\right)}{(6 - 2\,\rho xx + \rho yy + \rho zz)^2}$

Out[•]= $-\dfrac{1}{(6 - 2\,\rho xx + \rho yy + \rho zz)^3}\, 8\left(2\,\rho xx^3 - 18\,\rho xz^2\,\rho yy + 2\,\rho yy^3 + 54\,\rho xy\,\rho xz\,\rho yz + 9\,\rho yy\,\rho yz^2 + 9\,\rho xy^2\,(\rho yy - 2\,\rho zz) + 9\,\rho xz^2\,\rho zz - 3\,\rho yy^2\,\rho zz + 9\,\rho yz^2\,\rho zz - 3\,\rho yy\,\rho zz^2 + 2\,\rho zz^3 - 3\,\rho xx^2\,(\rho yy + \rho zz) + 3\,\rho xx\left(3\,\rho xy^2 + 3\,\rho xz^2 - \rho yy^2 - 6\,\rho yz^2 + 4\,\rho yy\,\rho zz - \rho zz^2\right)\right)$

In[•]:= `Simplify[U2new - U2]`
упростить

Out[•]= 0

In[•]:= `Simplify[Tnew - T]`
упростить

Out[•]= 0

$$U_2 = U_2' = inv$$

$$T = T' = inv$$

Первый Эйлеров поворот. Преобразование по углу $\boldsymbol{\phi}$

$$\frac{1}{\sigma}\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{3}{4\pi}\frac{1}{3+\lambda_\theta}(1 + \lambda_\theta\cos^2\theta + \lambda_{\theta\phi}\sin 2\theta\cos\phi + \lambda_\phi\sin^2\theta\cos 2\phi +$$
$$+\lambda_{\perp\phi}\sin^2\theta\sin 2\phi + \lambda_{\perp\theta\phi}\sin 2\theta\sin\phi + 2A_\theta\cos\theta + 2A_\phi\sin\theta\cos\phi + 2A_{\perp\phi}\sin\theta\sin\phi)$$

$$Tr(\rho_{ij}L^T_{jk}) = (\rho_{xx} + \frac{\rho_{yy}}{2} + \frac{\rho_{zz}}{2}) + (-\rho_{xx} + \frac{\rho_{yy}}{2} + \frac{\rho_{zz}}{2})\cos^2\theta + (-\rho_{xy}\cos\phi_0 - \rho_{xz}\sin\phi_0)\sin 2\theta\cos\phi + (\frac{\rho_{zz}\cos 2\phi_0}{2} - \frac{\rho_{yy}\cos 2\phi_0}{2} - \rho_{yz}\sin 2\phi_0)\sin^2\theta\cos 2\phi +$$
$$+(\frac{\rho_{yy}\sin 2\phi_0}{2} - \frac{\rho_{zz}\sin 2\phi_0}{2} - \rho_{yz}\cos 2\phi_0)\sin^2\theta\sin 2\phi + (\rho_{xy}\sin\phi_0 - \rho_{xz}\cos\phi_0)\sin 2\theta\sin\phi$$

$$\begin{aligned}
\gamma &= \rho_{xx} + \frac{\rho_{yy}}{2} + \frac{\rho_{zz}}{2},\\
\lambda_\theta &= -\rho_{xx} + \frac{\rho_{yy}}{2} + \frac{\rho_{zz}}{2},\\
\lambda_{\theta\phi} &= -\rho_{xy}\cos\phi_0 - \rho_{xz}\sin\phi_0,\\
\lambda_\phi &= \frac{\rho_{zz}\cos 2\phi_0}{2} - \frac{\rho_{yy}\cos 2\phi_0}{2} - \rho_{yz}\sin 2\phi_0,\\
\lambda_{\perp\phi} &= \frac{\rho_{yy}\sin 2\phi_0}{2} - \frac{\rho_{zz}\sin 2\phi_0}{2} - \rho_{yz}\cos 2\phi_0,\\
\lambda_{\perp\theta\phi} &= \rho_{xy}\sin\phi_0 - \rho_{xz}\cos\phi_0
\end{aligned}$$

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{1-\lambda_\theta}{2} & -\lambda_{\theta\phi}\cos\phi_0 + \lambda_{\theta\phi}\sin\phi_0 & -(\lambda_{\theta\phi} + \lambda_{\perp\theta\phi})\cot\phi_0\sin\phi_0 \\ -\lambda_{\theta\phi}\cos\phi_0 + \lambda_{\theta\phi}\sin\phi_0 & \frac{1+\lambda_\theta - 2\lambda_\phi\cos 2\phi_0 + 2\lambda_{\perp\phi}\sin 2\phi_0}{2} & -(\lambda_\phi + \lambda_{\perp\phi})\cot 2\phi_0)\sin 2\phi_0 \\ -(\lambda_{\theta\phi} + \lambda_{\perp\theta\phi})\cot\phi_0\sin\phi_0 & -(\lambda_\phi + \lambda_{\perp\phi})\cot 2\phi_0\sin 2\phi_0 & \frac{1+\lambda_\theta + 2\lambda_\phi\cos 2\phi_0 - 2\lambda_{\perp\phi}\sin 2\phi_0}{2}. \end{pmatrix}$$

Первый Эйлеров поворот. Преобразование по углу $\boldsymbol{\phi}$

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{1-\lambda_\theta}{2} & -\lambda_{\theta\phi}\cos\phi_0 + \lambda_{\theta\phi}\sin\phi_0 & -(\lambda_{\theta\phi} + \lambda_{\perp\theta\phi})\cot\phi_0\sin\phi_0 \\ -\lambda_{\theta\phi}\cos\phi_0 + \lambda_{\theta\phi}\sin\phi_0 & \frac{1+\lambda_\theta - 2\lambda_\phi\cos 2\phi_0 + 2\lambda_{\perp\phi}\sin 2\phi_0}{2} & -(\lambda_\phi + \lambda_{\perp\phi})\cot 2\phi_0)\sin 2\phi_0 \\ -(\lambda_{\theta\phi} + \lambda_{\perp\theta\phi})\cot\phi_0\sin\phi_0 & -(\lambda_\phi + \lambda_{\perp\phi})\cot 2\phi_0\sin 2\phi_0 & \frac{1+\lambda_\theta + 2\lambda_\phi\cos 2\phi_0 - 2\lambda_{\perp\phi}\sin 2\phi_0}{2}. \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Tr}\rho = \rho'_{xx} + \rho'_{yy} + \rho'_{zz} =$$

$$= \rho_{xx} + (-\rho_{yz}\sin 2\phi_0 + (\rho_{yy} + \rho_{zz})\sin^2\phi_0) + \rho_{yz}\sin 2\phi_0 + (\rho_{yy} + \rho_{zz})\cos^2\phi_0 =$$

$$= \rho_{xx} + \rho_{yy} + \rho_{zz} = \frac{1-\lambda_\theta}{2} + \frac{1+\lambda_\theta - 2\lambda_\phi\cos 2\phi_0 + 2\lambda_{\perp\phi}\sin 2\phi_0}{2}$$

$$+ \frac{1+\lambda_\theta + 2\lambda_\phi\cos 2\phi_0 - 2\lambda_{\perp\phi}\sin 2\phi_0}{2} =$$

$$= \frac{3+\lambda_\theta}{2} = \mathrm{const}$$

Первый Эйлеров поворот. Преобразование по углу $\boldsymbol{\phi}$

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{1-\lambda_\theta}{2} & -\lambda_{\theta\phi}\cos\phi_0 + \lambda_{\theta\phi}\sin\phi_0 & -(\lambda_{\theta\phi}+\lambda_{\perp\theta\phi})\cot\phi_0\sin\phi_0 \\ -\lambda_{\theta\phi}\cos\phi_0 + \lambda_{\theta\phi}\sin\phi_0 & \frac{1+\lambda_\theta-2\lambda_\phi\cos2\phi_0+2\lambda_{\perp\phi}\sin2\phi_0}{2} & -(\lambda_\phi+\lambda_{\perp\phi})\cot2\phi_0)\sin2\phi_0 \\ -(\lambda_{\theta\phi}+\lambda_{\perp\theta\phi})\cot\phi_0\sin\phi_0 & -(\lambda_\phi+\lambda_{\perp\phi})\cot2\phi_0\sin2\phi_0 & \frac{1+\lambda_\theta+2\lambda_\phi\cos2\phi_0-2\lambda_{\perp\phi}\sin2\phi_0}{2}. \end{pmatrix}$$

$$\frac{2}{3+\lambda_\theta}\begin{pmatrix} \frac{1-\lambda_\theta}{2} & -\lambda_{\theta\phi} & -\lambda_{\perp\theta\phi} \\ -\lambda_{\theta\phi} & \frac{1+\lambda_\theta-2\lambda_\phi}{2} & -\lambda_{\perp\phi} \\ -\lambda_{\perp\theta\phi} & -\lambda_{\perp\phi} & \frac{1+\lambda_\theta+2\lambda_\phi}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{1-\lambda_\theta}{2} = \frac{1-\lambda'_\theta}{2}, \\ \frac{1+\lambda_\theta-2\lambda_\phi\cos2\phi_0+2\lambda_{\perp\phi}\sin2\phi_0}{2} = \frac{1+\lambda'_\theta-2\lambda'_\phi}{2}, \\ \frac{1+\lambda_\theta+2\lambda_\phi\cos2\phi_0-2\lambda_{\perp\phi}\sin2\phi_0}{2} = \frac{1+\lambda'_\theta+2\lambda'_\phi}{2}, \\ -\lambda_{\theta\phi}\cos\phi_0 + \lambda_{\theta\phi}\sin\phi_0 = -\lambda'_{\theta\phi}, \\ \lambda_{\theta\phi}\sin\phi_0 + \lambda_{\perp\theta\phi}\cos\phi_0 = -\lambda'_{\perp\theta\phi}, \\ -\lambda_\phi\sin2\phi_0 + \lambda_{\perp\phi}\cos2\phi_0 = \lambda'_{\perp\phi}, \end{cases}$$

$$\rightarrow$$

$$\begin{aligned} \lambda'_\theta &= \lambda_\theta, \\ \lambda'_\phi &= \lambda_\phi\cos2\phi_0 + \lambda_{\perp\phi}\sin2\phi_0, \\ \lambda'_{\theta\phi} &= \lambda_{\perp\theta\phi}\sin\phi_0 - \lambda_{\theta\phi}\cos\phi_0, \\ \lambda'_{\perp\theta\phi} &= \lambda_{\theta\phi}\sin\phi_0 - \lambda_{\perp\theta\phi}\cos\phi_0, \\ \lambda'_{\perp\phi} &= \lambda_{\perp\phi}\cos2\phi_0 - \lambda_\phi\sin2\phi_0, \end{aligned}$$

Второй Эйлеров поворот. Преобразование по углу $\boldsymbol{\theta}$

$$Tr(\rho_{ij}L^T_{jk}) = \rho_{xx} + \frac{\rho_{xy}}{2} + \frac{\rho_{zz}}{2} + (\frac{\rho_{zz}}{2} + \frac{\rho_{yy} - \rho_{xx}}{2})\cos^2\theta - \rho_{xy}\sin 2\theta\cos\phi - \rho_{xz}\sin 2\theta\cos\phi - \rho_{yz}\sin^2\theta\sin 2\phi + (\frac{\rho_{zz} - \rho_{yy}}{2})\sin^2\theta\cos 2\phi$$

$$Tr(\rho_{ij}L^T_{jk}) = \left(\rho_{xx}\frac{2-\sin^2\theta_0}{2} + \frac{\rho_{zz}}{2} + \rho_{yy}\frac{2-\cos^2\theta_0}{2} - \frac{\rho_{xy}\sin 2\theta_0}{2}\right) + \left(\rho_{xx}\frac{1-3\cos^2\theta_0}{2} + \frac{\rho_{zz}}{2} + \frac{3\rho_{xy}\sin 2\theta_0}{2} + \rho_{yy}\frac{1-3\sin^2\theta_0}{2}\right)\cos^2\theta$$
$$+ (\rho_{yz}\sin\theta_0 - \rho_{xz}\cos\theta_0)\sin 2\theta\sin\phi + (-\rho_{yz}\cos\theta_0 - \rho_{xz}\sin\theta_0)\sin^2\theta\sin 2\phi + \left(\frac{\rho_{yy}\sin 2\theta_0}{2} - \rho_{xy}\cos 2\theta_0 - \frac{\rho_{xx}\sin 2\theta_0}{2}\right)\sin 2\theta\cos\phi$$
$$+ \left(-\frac{\rho_{yy}\cos^2\theta_0}{2} - \frac{\rho_{xx}\sin^2\theta_0}{2} - \frac{\rho_{xy}\sin 2\theta_0}{2} + \frac{\rho_{zz}}{2}\right)\sin^2\theta\cos 2\phi$$

$$\begin{cases} \rho'_{xx} + \frac{\rho'_{yy}}{2} + \frac{\rho'_{zz}}{2} = \rho_{xx}\frac{2-\sin^2\theta_0}{2} + \frac{\rho_{zz}}{2} + \rho_{yy}\frac{2-\cos^2\theta_0}{2} - \frac{\rho_{xy}\sin 2\theta_0}{2}, \\ -\rho'_{xx} + \frac{\rho'_{yy}}{2} + \frac{\rho'_{zz}}{2} = \rho_{xx}\frac{1-3\cos^2\theta_0}{2} + \frac{\rho_{zz}}{2} + \frac{3\rho_{xy}\sin 2\theta_0}{2} + \rho_{yy}\frac{1-3\sin^2\theta_0}{2}, \\ \frac{\rho'_{zz}-\rho'_{yy}}{2} = -\frac{\rho_{yy}\cos^2\theta_0}{2} - \frac{\rho_{xx}\sin^2\theta_0}{2} - \frac{\rho_{xy}\sin 2\theta_0}{2} + \frac{\rho_{zz}}{2}, \\ \rho'_{xy} = -\frac{\rho_{yy}\sin 2\theta_0}{2} + \rho_{xy}\cos 2\theta_0 + \frac{\rho_{xx}\sin 2\theta_0}{2}, \\ \rho'_{xz} = -\rho_{yz}\sin\theta_0 + \rho_{xz}\cos\theta_0, \\ \rho'_{yz} = \rho_{yz}\cos\theta_0 + \rho_{xz}\sin\theta_0, \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \rho'_{xx} \\ \rho'_{yy} \\ \rho'_{zz} \\ \rho'_{xy} \\ \rho'_{xz} \\ \rho'_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+\cos 2\theta_0}{2} & \frac{1-\cos 2\theta_0}{2} & 0 & -\sin 2\theta_0 & 0 & 0 \\ \frac{1-\cos 2\theta_0}{2} & \frac{1+\cos 2\theta_0}{2} & 0 & \sin 2\theta_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sin 2\theta_0}{2} & -\frac{\sin 2\theta_0}{2} & 0 & \cos 2\theta_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\theta_0 & -\sin\theta_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\theta_0 & \cos\theta_0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \rho_{xx} \\ \rho_{yy} \\ \rho_{zz} \\ \rho_{xy} \\ \rho_{xz} \\ \rho_{yz} \end{pmatrix}$$

Проверка инвариантов при преобразовании

$$U_2 = \frac{\lambda_\theta^2 + 3(\lambda_\phi^2 + \lambda_{\theta\phi}^2 + \lambda_{\perp\phi}^2 + \lambda_{\perp\theta\phi}^2)}{(3+\lambda_\theta^2)}, \qquad T = \frac{(\lambda_\theta + 3\lambda_\phi)(2\lambda\theta^2 - 6\lambda_\theta\lambda_\phi + 9\lambda_{\theta\phi}^2) + 9(\lambda_\theta\lambda_{\perp\theta\phi}^2 - 2\lambda_\phi\lambda_{\perp\phi}^2 + 6\lambda_{\theta\phi}\lambda_{\perp\theta\phi}\lambda_{\perp\phi} - 3\lambda_\phi\lambda_{\perp\theta\phi})}{(3+\lambda_\theta^3)},$$

wolfram Mathematica

Out[ ]= $\dfrac{\rho xx^2 + 3\,\rho xy^2 + 3\,\rho xz^2 + \rho yy^2 + 3\,\rho yz^2 - \rho yy\,\rho zz + \rho zz^2 - \rho xx\,(\rho yy + \rho zz)}{4\,(\rho xx + \rho yy + \rho zz)^2}$

Out[ ]= $-\dfrac{1}{8\,(\rho xx + \rho yy + \rho zz)^3}\Big(2\,\rho xx^3 - 18\,\rho xz^2\,\rho yy + 2\,\rho yy^3 + 54\,\rho xy\,\rho xz\,\rho yz + 9\,\rho yy\,\rho yz^2 + 9\,\rho xy^2\,(\rho yy - 2\,\rho zz) + 9\,\rho xz^2\,\rho zz - 3\,\rho yy^2\,\rho zz + 9\,\rho yz^2\,\rho zz - 3\,\rho yy\,\rho zz^2 + 2\,\rho zz^3 - 3\,\rho xx^2\,(\rho yy + \rho zz) + 3\,\rho xx\,(3\,\rho xy^2 + 3\,\rho xz^2 - \rho yy^2 - 6\,\rho yz^2 + 4\,\rho yy\,\rho zz - \rho zz^2)\Big)$

Out[ ]= $\dfrac{4\,(\rho xx^2 + 3\,\rho xy^2 + 3\,\rho xz^2 + \rho yy^2 + 3\,\rho yz^2 - \rho yy\,\rho zz + \rho zz^2 - \rho xx\,(\rho yy + \rho zz))}{(6 - 2\,\rho xx + \rho yy + \rho zz)^2}$

Out[ ]= $-\dfrac{1}{(6 - 2\,\rho xx + \rho yy + \rho zz)^3}\,8\,\Big(2\,\rho xx^3 - 18\,\rho xz^2\,\rho yy + 2\,\rho yy^3 + 54\,\rho xy\,\rho xz\,\rho yz + 9\,\rho yy\,\rho yz^2 + 9\,\rho xy^2\,(\rho yy - 2\,\rho zz) + 9\,\rho xz^2\,\rho zz - 3\,\rho yy^2\,\rho zz + 9\,\rho yz^2\,\rho zz - 3\,\rho yy\,\rho zz^2 + 2\,\rho zz^3 - 3\,\rho xx^2\,(\rho yy + \rho zz) + 3\,\rho xx\,(3\,\rho xy^2 + 3\,\rho xz^2 - \rho yy^2 - 6\,\rho yz^2 + 4\,\rho yy\,\rho zz - \rho zz^2)\Big)$

```
In[ ]:= Simplify[U2new - U2]
        упростить
Out[ ]= 0

In[ ]:= Simplify[Tnew - T]
        упростить
Out[ ]= 0
```

$$U_2 = U_2' = inv$$

$$T = T' = inv$$

Второй Эйлеров поворот. Преобразование по углу $\boldsymbol{\theta}$

$$\frac{1}{\sigma}\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{3}{4\pi}\frac{1}{3+\lambda_\theta}(1+\lambda_\theta\cos^2\theta+\lambda_{\theta\phi}\sin 2\theta\cos\phi+\lambda_\phi\sin^2\theta\cos 2\phi+$$
$$+\lambda_{\perp\phi}\sin^2\theta\sin 2\phi+\lambda_{\perp\theta\phi}\sin 2\theta\sin\phi+2A_\theta\cos\theta+2A_\phi\sin\theta\cos\phi+2A_{\perp\phi}\sin\theta\sin\phi)$$

$$Tr(\rho_{ij}L^T_{jk}) = \left(\rho_{xx}\frac{2-\sin^2\theta_0}{2}+\frac{\rho_{zz}}{2}+\rho_{yy}\frac{2-\cos^2\theta_0}{2}-\frac{\rho_{xy}\sin 2\theta_0}{2}\right)+\left(\rho_{xx}\frac{1-3\cos^2\theta_0}{2}+\frac{\rho_{zz}}{2}+\frac{3\rho_{xy}\sin 2\theta_0}{2}+\rho_{yy}\frac{1-3\sin^2\theta_0}{2}\right)\cos^2\theta$$
$$+(\rho_{yz}\sin\theta_0-\rho_{xz}\cos\theta_0)\sin 2\theta\sin\phi+(-\rho_{yz}\cos\theta_0-\rho_{xz}\sin\theta_0)\sin^2\theta\sin 2\phi+\left(\frac{\rho_{yy}\sin 2\theta_0}{2}-\rho_{xy}\cos 2\theta_0-\frac{\rho_{xx}\sin 2\theta_0}{2}\right)\sin 2\theta\cos\phi$$
$$+\left(-\frac{\rho_{yy}\cos^2\theta_0}{2}-\frac{\rho_{xx}\sin^2\theta_0}{2}-\frac{\rho_{xy}\sin 2\theta_0}{2}+\frac{\rho_{zz}}{2}\right)\sin^2\theta\cos 2\phi$$

$$\begin{aligned}
\gamma &= \rho_{xx}\frac{2-\sin^2\theta_0}{2}+\frac{\rho_{zz}}{2}+\rho_{yy}\frac{1+\sin^2\theta_0}{2}-\frac{\rho_{xy}\sin 2\theta_0}{2},\\
\lambda_\theta &= \rho_{xx}\frac{1-3\cos^2\theta_0}{2}+\frac{\rho_{zz}}{2}+\frac{3\rho_{xy}\sin 2\theta_0}{2}+\rho_{yy}\frac{3\sin^2\theta_0-2}{2},\\
\lambda_{\theta\phi} &= \frac{\rho_{yy}\sin 2\theta_0}{2}-\rho_{xy}\cos 2\theta_0-\frac{\rho_{xx}\sin 2\theta_0}{2},\\
\lambda_\phi &= \frac{\rho_{yy}(\sin^2\theta_0-1)}{2}-\frac{\rho_{xx}\sin^2\theta_0}{2}-\frac{\rho_{xy}\sin 2\theta_0}{2}+\frac{\rho_{zz}}{2},\\
\lambda_{\perp\phi} &= -\rho_{yz}\cos\theta_0-\rho_{xz}\sin\theta_0,\\
\lambda_{\perp\theta\phi} &= \rho_{yz}\sin\theta_0-\rho_{xz}\cos\theta_0
\end{aligned}$$

$$\rho = \begin{pmatrix}
\frac{1-\lambda_\phi+(\lambda_\phi-\lambda_\theta)\cos 2\theta_0-2\lambda_{\theta\phi}\sin 2\theta_0}{2} & -\lambda_{\theta\phi}\cos 2\theta_0+\frac{(\lambda_\theta-\lambda_\phi)\sin 2\theta_0}{2} & -\lambda_{\perp\theta\phi}\cos\theta_0-\lambda_{\perp\phi}\sin\theta_0\\
-\lambda_{\theta\phi}\cos 2\theta_0+\frac{(\lambda_\theta-\lambda_\phi)\sin 2\theta_0}{2} & \frac{1-\lambda_\phi+(\lambda_\theta-\lambda_\phi)\cos 2\theta_0+2\lambda_{\theta\phi}\sin 2\theta_0}{2} & -\lambda_{\perp\phi}\cos\theta_0+\lambda_{\perp\theta\phi}\sin\theta_0\\
-\lambda_{\perp\theta\phi}\cos\theta_0-\lambda_{\perp\phi}\sin\theta_0 & -\lambda_{\perp\phi}\cos\theta_0+\lambda_{\perp\theta\phi}\sin\theta_0 & \frac{1+\lambda_\theta+2\lambda_\phi}{2}
\end{pmatrix}$$

Второй Эйлеров поворот. Преобразование по углу $\boldsymbol{\theta}$

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{1-\lambda_\phi+(\lambda_\phi-\lambda_\theta)\cos 2\theta_0-2\lambda_{\theta\phi}\sin 2\theta_0}{2} & -\lambda_{\theta\phi}\cos 2\theta_0 + \frac{(\lambda_\theta-\lambda_\phi)\sin 2\theta_0}{2} & -\lambda_{\perp\theta\phi}\cos\theta_0 - \lambda_{\perp\phi}\sin\theta_0 \\ -\lambda_{\theta\phi}\cos 2\theta_0 + \frac{(\lambda_\theta-\lambda_\phi)\sin 2\theta_0}{2} & \frac{1-\lambda_\phi+(\lambda_\theta-\lambda_\phi)\cos 2\theta_0+2\lambda_{\theta\phi}\sin 2\theta_0}{2} & -\lambda_{\perp\phi}\cos\theta_0 + \lambda_{\perp\theta\phi}\sin\theta_0 \\ -\lambda_{\perp\theta\phi}\cos\theta_0 - \lambda_{\perp\phi}\sin\theta_0 & -\lambda_{\perp\phi}\cos\theta_0 + \lambda_{\perp\theta\phi}\sin\theta_0 & \frac{1+\lambda_\theta+2\lambda_\phi}{2} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Tr}\rho = \rho'_{xx} + \rho'_{yy} + \rho'_{zz} =$$

$$\frac{1-\lambda_\phi+(\lambda_\phi-\lambda_\theta)\cos 2\theta_0-2\lambda_{\theta\phi}\sin 2\theta_0}{2} +$$

$$+\frac{1-\lambda_\phi+(\lambda_\theta-\lambda_\phi)\cos 2\theta_0+2\lambda_{\theta\phi}\sin 2\theta_0}{2} + \frac{1+\lambda_\theta+2\lambda_\phi}{2} = \frac{3+\lambda_\theta}{2} = \mathrm{const}$$

Второй Эйлеров поворот. Преобразование по углу $\boldsymbol{\theta}$

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{1-\lambda_\phi+(\lambda_\phi-\lambda_\theta)\cos 2\theta_0-2\lambda_{\theta\phi}\sin 2\theta_0}{2} & -\lambda_{\theta\phi}\cos 2\theta_0+\frac{(\lambda_\theta-\lambda_\phi)\sin 2\theta_0}{2} & -\lambda_{\perp\theta\phi}\cos\theta_0-\lambda_{\perp\phi}\sin\theta_0 \\ -\lambda_{\theta\phi}\cos 2\theta_0+\frac{(\lambda_\theta-\lambda_\phi)\sin 2\theta_0}{2} & \frac{1-\lambda_\phi+(\lambda_\theta-\lambda_\phi)\cos 2\theta_0+2\lambda_{\theta\phi}\sin 2\theta_0}{2} & -\lambda_{\perp\phi}\cos\theta_0+\lambda_{\perp\theta\phi}\sin\theta_0 \\ -\lambda_{\perp\theta\phi}\cos\theta_0-\lambda_{\perp\phi}\sin\theta_0 & -\lambda_{\perp\phi}\cos\theta_0+\lambda_{\perp\theta\phi}\sin\theta_0 & \frac{1+\lambda_\theta+2\lambda_\phi}{2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{2}{3+\lambda_\theta}\begin{pmatrix} \frac{1-\lambda_\theta}{2} & -\lambda_{\theta\phi} & -\lambda_{\perp\theta\phi} \\ -\lambda_{\theta\phi} & \frac{1+\lambda_\theta-2\lambda_\phi}{2} & -\lambda_{\perp\phi} \\ -\lambda_{\perp\theta\phi} & -\lambda_{\perp\phi} & \frac{1+\lambda_\theta+2\lambda_\phi}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{1-\lambda_\phi+(\lambda_\phi-\lambda_\theta)\cos 2\theta_0-2\lambda_{\theta\phi}\sin 2\theta_0}{2} = \frac{1-\lambda'_\theta}{2}, \\ \frac{1-\lambda_\phi+(\lambda_\theta-\lambda_\phi)\cos 2\theta_0+2\lambda_{\theta\phi}\sin 2\theta_0}{2} = \frac{1+\lambda'_\theta-2\lambda'_\phi}{2}, \\ \frac{1+\lambda_\theta+2\lambda_\phi}{2} = \frac{1+\lambda'_\theta+2\lambda'_\phi}{2}, \\ \frac{1-\lambda_\phi+(\lambda_\theta-\lambda_\phi)\cos 2\theta_0+2\lambda_{\theta\phi}\sin 2\theta_0}{2} = -\lambda'_{\theta\phi}, \\ -\lambda_{\perp\theta\phi}\cos\theta_0-\lambda_{\perp\phi}\sin\theta_0 = -\lambda'_{\perp\theta\phi}, \\ -\lambda_{\perp\phi}\cos\theta_0+\lambda_{\perp\theta\phi}\sin\theta_0 = -\lambda'_{\perp\phi}, \end{cases}$$

$$\rightarrow$$

$$\begin{aligned} \lambda'_\theta &= (\lambda_\theta\frac{2-3\cos^2\theta_0}{2}-\lambda_{\theta\phi}\frac{3\sin 2\theta_0}{2}+\lambda_\phi\frac{3\sin^2\theta_0}{2}), \\ \lambda'_{\theta\phi} &= (\lambda_\theta\frac{\sin 2\theta_0}{2}+\lambda_{\theta\phi}\cos 2\theta_0-\lambda_\phi\frac{3\sin 2\theta_0}{2}), \\ \lambda'_\phi &= (\lambda_\theta\frac{\sin^2\theta_0}{2}+\lambda_{\theta\phi}\frac{\sin 2\theta_0}{2}+\lambda_\phi\frac{2-\sin^2\theta_0}{2}), \\ \lambda'_{\perp\theta\phi} &= \lambda_{\perp\theta\phi}\cos\theta_0+\lambda_{\perp\phi}\sin\theta_0, \\ \lambda'_{\perp\phi} &= \lambda_{\perp\phi}\cos\theta_0-\lambda_{\perp\theta\phi}\sin\theta_0, \end{aligned}$$

Комбинация Эйлеровых поворотов. Преобразование по углам $\boldsymbol{\theta\phi}$

$$Tr(\rho_{ij}L^T_{jk}) = \rho_{xx} + \frac{\rho_{xy}}{2} + \frac{\rho_{zz}}{2} + (\frac{\rho_{zz}}{2} + \frac{\rho_{yy} - \rho_{xx}}{2})\cos^2\theta - \rho_{xy}\sin 2\theta\cos\phi - \rho_{xz}\sin 2\theta\cos\phi - \rho_{yz}\sin^2\theta\sin 2\phi + (\frac{\rho_{zz} - \rho_{yy}}{2})\sin^2\theta\cos 2\phi$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{Tr(\rho_{ij}L^T_{jk})} = &\Big(\rho_{xx}\frac{2-\sin^2\theta_0}{2} + \rho_{yy}\frac{1+\cos^2\theta_0\cos^2\phi_0}{2} + \rho_{zz}\frac{1+\sin^2\theta_0\sin^2\phi_0}{2} + \frac{\rho_{yz}\sin^2\theta_0\sin 2\phi_0}{2} - \frac{\rho_{xy}\sin 2\theta_0\cos\phi_0}{2} - \frac{\rho_{xz}\sin 2\theta_0\sin\phi_0}{2}\Big) + \\
&+ (-\rho_{xx}\frac{1-3\cos^2\theta_0}{2} + \rho_{yy}\frac{1-3\sin^2\theta_0\cos^2\phi_0}{2} + \rho_{zz}\frac{1-3\sin^2\theta_0\sin^2\phi_0}{2} + \rho_{xy}\frac{3\sin 2\theta_0\cos\phi_0}{2} + \rho_{xz}\frac{3\sin 2\theta_0\sin\phi_0}{2} - \rho_{yz}\frac{3\sin^2\theta_0\sin 2\phi_0}{2})\cos^2\theta + \\
&+(-\rho_{xx}\frac{\sin 2\theta_0}{2} + \rho_{yy}\frac{\sin 2\theta_0\cos^2\phi_0}{2} + \rho_{zz}\frac{\sin 2\theta_0\sin^2\phi_0}{2} + \rho_{yz}\frac{\sin 2\theta_0\sin 2\phi_0}{2} - \rho_{xy}\cos\phi_0\cos 2\theta_0)\sin 2\theta\cos\phi \\
&+ (-\rho_{yz}\cos\theta_0\cos^2\phi_0 - \rho_{xz}\sin\theta_0\cos\phi_0 + \frac{\rho_{yy}\cos\theta_0\sin 2\phi_0}{2} - \frac{\rho_{zz}\cos\theta_0\sin 2\phi_0}{2} + \rho_{xy}\sin\theta_0\sin\phi_0 + \rho_{yz}\cos\theta_0\sin^2\phi_0)\sin^2\theta\sin 2\phi \\
&+ (\frac{\rho_{zz}\sin\theta_0\sin 2\phi_0}{2} - \frac{\rho_{yy}\sin\theta_0\sin 2\phi_0}{2} + \rho_{xy}\cos\theta_0\sin\phi_0 - \rho_{xz}\cos\theta_0\cos\phi_0 + \rho_{yz}\sin\theta_0)\sin 2\theta\sin\phi \\
&+ (-\frac{\rho_{xx}\sin^2\theta_0}{2} + \frac{\rho_{yy}(\sin^2\theta_0\cos^2\phi_0 - \cos 2\phi_0)}{2} + \frac{\rho_{zz}\sin^2\theta_0\sin^2\phi_0 + \cos 2\phi_0)}{2} - \frac{\rho_{xz}\sin 2\theta_0\sin\phi_0}{2} - \frac{\rho_{xy}\sin 2\theta_0\cos\phi_0}{2} - \frac{\rho_{yz}\sin 2\phi_0(1+\cos^2\theta_0)}{2})\sin^2\theta\cos 2\phi
\end{aligned}$$

Комбинация Эйлеровых поворотов. Преобразование по углам $\theta\phi$

$$\gamma = \rho_{xx}\frac{2-\sin^2\theta_0}{2} + \rho_{yy}\frac{1+\cos^2\theta_0\cos^2\phi_0}{2} + \rho_{zz}\frac{1+\sin^2\theta_0\sin^2\phi_0}{2} + \frac{\rho_{yz}\sin^2\theta_0\sin 2\phi_0}{2} - \frac{\rho_{xy}\sin 2\theta_0\cos\phi_0}{2} - \frac{\rho_{xz}\sin 2\theta_0\sin\phi_0}{2},$$

$$\lambda_\theta = -\rho_{xx}\frac{1-3\cos^2\theta_0}{2} + \rho_{yy}\frac{1-3\sin^2\theta_0\cos^2\phi_0}{2} + \rho_{zz}\frac{1-3\sin^2\theta_0\sin^2\phi_0}{2} + \rho_{xy}\frac{3\sin 2\theta_0\cos\phi_0}{2} + \rho_{xz}\frac{3\sin 2\theta_0\sin\phi_0}{2} - \rho_{yz}\frac{3\sin^2\theta_0\sin 2\phi_0}{2},$$

$$\lambda_{\theta\phi} = -\rho_{xx}\frac{\sin 2\theta_0}{2} + \rho_{yy}\frac{\sin 2\theta_0\cos^2\phi_0}{2} + \rho_{zz}\frac{\sin 2\theta_0\sin^2\phi_0}{2} + \rho_{yz}\frac{\sin 2\theta_0\sin 2\phi_0}{2} - \rho_{xy}\cos\phi_0\cos 2\theta_0,$$

$$\lambda_\phi = -\frac{\rho_{xx}\sin^2\theta_0}{2} + \frac{\rho_{yy}(\sin^2\theta_0\cos^2\phi_0 - \cos 2\phi_0)}{2} + \frac{\rho_{zz}\sin^2\theta_0\sin^2\phi_0 + \cos 2\phi_0}{2} - \frac{\rho_{xz}\sin 2\theta_0\sin\phi_0}{2} - \frac{\rho_{xy}\sin 2\theta_0\cos\phi_0}{2} - \frac{\rho_{yz}\sin 2\phi_0(1+\cos^2\theta_0)}{2},$$

$$\lambda_{\perp\phi} = -\rho_{yz}\cos\theta_0\cos^2\phi_0 - \rho_{xz}\sin\theta_0\cos\phi_0 + \frac{\rho_{yy}\cos\theta_0\sin 2\phi_0}{2} - \frac{\rho_{zz}\cos\theta_0\sin 2\phi_0}{2} + \rho_{xy}\sin\theta_0\sin\phi_0 + \rho_{yz}\cos\theta_0\sin^2\phi_0,$$

$$\lambda_{\perp\theta\phi} = \frac{\rho_{zz}\sin\theta_0\sin 2\phi_0}{2} - \frac{\rho_{yy}\sin\theta_0\sin 2\phi_0}{2} + \rho_{xy}\cos\theta_0\sin\phi_0 - \rho_{xz}\cos\theta_0\cos\phi_0 + \rho_{yz}\sin\theta_0$$

Выводы

1)Получен общий закон преобразования коэффициентов углового распределения двумя способами
2)Произведена проверка сохранности ранее полученных инвариантов при данных преобразованиях
3)Написаны коды для преобразования угловых коэффициентов на Wolfram Mathematica, которые могут быть в последствие включены в моделирование процессов на MPD, SPD
4)Планируется использование формализма для угловых распределений закрученных состояний

Заключение

Формулы , представленные в настоящей работе, существенным образом могут быть применимы к описанию и анализу состояний с большим орбитальным моментом, закрученным состояниям [13], [14], [15] , приложениям квантовой хромодинамики [19], частицам со спином $S = 2$(гравитонам) в теории сильной гравитации. Также еще одной важной задачей, которая может быть представлена к решению с использованием формул преобразования коэффициентов распределения,а также законов преобразования элементов матрицы плотности, связанных с ними, служит задача о поиске преобразований для угла некомланарности [20], возникающего в дилептонных распадах. Несмотря на рассмотрение только симметричного случая, отвечающего отсутствию нарушения симметрии, в качестве результата, получен мощный инструмент - отдельные преобразования коэффициентов, законы преобразования элементов матрицы плотности - необходимые как теоретикам, так и экспериментаторам в физике высоких энергий. По большому счету, в работе была установлена связь между релятивисткой кинематикой и группой вращений Лоренца, что побуждает к созданию универсального «рецепта» поиска инвариантов для разного рода исследуемых процессов, в особенности, при изучении закрученных состояний [15]. В частности, развитие данной работы может послужить хорошим основанием для рассмотрения углового распределения аннигиляции закрученных кварков [21], а полученные решения задач применимы к изучению фундаментальных квантовых свойств кутритов, возникающих в квантовом компьютинге [22].

Список литературы:

1. T. Aaltonen, B. A. Gonzalez, S. Amerio, D. Amidei, A. Anastassov, A. Annovi, J. Antos, G. Apollinari, J. Appel, A. Apresyan, et al., Physical review letters 106, 241801 (2011).
2. C. collaboration et al., Physics Letters B 750, 154 (2015).
3. G. Aad, B. Abbott, J. Abdallah, O. Abdinov, B. Abeloos, R. Aben, O. AbouZeid, N. Abraham, H. Abramowicz, H. Abreu, et al., Journal of High Energy Physics 2016, 159 (2016).
4. P. Faccioli, C. Lourenco, and J. Seixas, Physical review letters 105, 061601 (2010).
5. P. Faccioli, C. Lourenco, J. Seixas, and H. K. Wohri, Physical Review D 82, 096002 (2010).
6. S. Palestini, Physical Review D 83, 031503 (2011).
7. P. Faccioli, C. Lourenco, J. Seixas, and H. K. Wohri, Physical Review D 83, 056008 (2011).
8. Y.-Q. Ma, J.-W. Qiu, and H. Zhang, arXiv preprint arXiv:1703.04752 (2017).
9. J. C. Collins and D. E. Soper, Angular distribution of dileptons in high-energy hadron collisions, Phys. Rev. D 16 (Oct, 1977) 2219–2225.
10. Jen-Chieh Peng, Wen-Chen Chang, Randall Evan McClellan, Oleg Teryaev, Lepton angular distribution of Z boson production and jet discrimination, July 25, 2019, https://arxiv.org/abs/1708.05807

Список литературы:

11. Ì. Gavrilova, O.Teryaev. Rotation-invariant observables as Density Matrix invariants. arXiv:1901.04018v1 [hep-ph], 13 Jan 2019.
12. O. V.Teryaev, KINEMATIC AZIMUTHAL ASYMMETRIES AND LAMTUNG RELATION, arXiv:2012.11720v1 [hep-ph] 21 Dec 2020
13. Mircea Baznat, Konstantin Gudima, Alexander Sorin, Oleg Teryaev, Helicity separation in Heavy-Ion Collisions, arXiv:1301.7003v1 [nucl-th] 29 Jan 2013
14. M. Baznat, K. Gudima, A. Sorin, O. Teryaev, Chaotic vortical flows and their manifestations,EPJ Web of Conferences 126, 02030 (2016) DOI: 10.1051/epjconf/201612602030 ICNFP 2015
15. Konstantin Y. Bliokh, Aleksandr Y. Bekshaev, Franco Nori, Extraordinary momentum and spin in evanescent waves.
16. Б. А. Князев, В. Г. Сербо, Пучки фотонов с ненулевой проекцией орби- таль- ного момента импульса: новые результаты. УФН, Том 188 №5, Май 2018
17. CMS collaboration и др. «Angular coefficients of Z bosons produced in pp collisions at and decaying to + as a function of transverse momentum and rapidityk. В: Physics Letters B 750 (2015), с. 154—175.
18. Georges Aad и др. «Measurement of the angular coefficients in Z-boson events using electron and muon pairsfrom data taken at s= 8 TeV with the ATLAS detectork. В: Journal of High Energy Physics 2016.8 (2016), с. 159.
19. Wen-Chen Chang, Randall Evan McClellan, Jen-Chieh Peng, Oleg Teryaev, QCD effects in lepton angular distributions of Drell-Yan production and jet discrimination, arXiv:2101.11160v1 [hep-ph] 27 Jan 2021

Список литературы:

20. Yang Lyu, Wen-Chen Chang, Randall Evan McClellan, Jen-Chieh Peng, Oleg Teryaev, Lepton angular distribution of W boson productions, arXiv:2010.01826v2 [hep-ph] 16 Feb 2021
21. Nikolai Korchagin, Studying time-like proton form factors using vortex state pp annihilation.
arXiv:2403.08949v1 [hep-ph] 13 Mar 2024
22. Kayman J. Gon¸calves,Giorgio Torrieri, Spin alignment of vector mesons as a probe of spin hydrodynamics and freeze-out.
arXiv:2104.12941v4 [nucl-th] 17 Mar 2022

Используемый пакет программ:

1. Wolfram Mathematica
2. FeynCalc for Wolfram Mathematica


Спасибо за внимание!!!