

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ
"МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА"

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ФИЗИКИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

КУРСОВАЯ РАБОТА

"Физика адронов. Решеточные методы квантовой хромодинамики"

Выполнил студент 2 курса 213 группы
Световидов Валентин Александрович

Научный руководитель
д.ф-м.н., профессор
Теряев Олег Валерианович

Москва
2019 г.

Содержание

1. Введение	2
2. Принимаемые соглашения и необходимые математические определения	3
2.1. Метрический тензор.	3
2.2. Матрицы Дирака.	3
2.3. Группа и алгебра Ли.	4
2.4. Матрицы Гелл-Манна.	4
3. Основные положения	5
3.1. Квантовая хромодинамика- теория сильных взаимодействий.	5
3.2. Основные определения КХД на решетке.	9
4. Применение методов КХД	11
4.1. Фаза <i>confinement</i>	11
4.2. Адронная спектроскопия.	13
4.2.1. Оператор рождения мезона.	13
4.2.2. Корреляционная функция оператора рождения мезона.	16
5. Расчет массы K_0^*-мезона посредством методов решеточной КХД.	18
5.1. Постановка задачи.	18
5.2. Результаты.	19
Список литературы	23

1. Введение

Аналитические расчеты в квантовой хромодинамике согласованы в ультрафиолетовой области в рамках теории возмущений, а другие задачи, такие как - разработка теории невылетания цвета, расчет спектров масс адронов и другие непертурбативные проблемы не имеют аналитического решения, полученного непосредственно из лагранжиана КХД. Масса в КХД зависит от затравочного заряда при малых g как $M \propto \exp(-\frac{const}{g^2})$ [3], причем, в силу неаналитичности этой зависимости, возможность вычисления, к примеру, масс адронов сводится к численному приближению. Эти методы, применяемые к исследованию решеточной КХД – одно из самых наиболее развивающихся направлений, которое достаточно сформировалось и имеет хорошее согласование с экспериментальными результатами. Задачи, которые ставятся на данный момент перед КХД, и, возможно, в ближайшее время найдут свое решение:

- 1) вычисление спектра масс адронов;
- 2) оценка константы связи сильного взаимодействия;
- 3) предсказание масс экзотических состояний, глюоболов;
- 4) получение фазовой диаграммы кварк-глюонной материи в плоскости $\mu - T$.

2. Принимаемые соглашения и необходимые математические определения

В работе используется система единиц, в которой $c = \hbar = 1$.

2.1. Метрический тензор.

Совершая преобразование времен $x_0 \mapsto it$, тем самым переходя из пространства Минковского в Евклидово пространство, происходит соответствующее изменение метрического тензора:

$$g_{\mu\nu}^{Mink} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mapsto g_{\mu\nu}^{Euclid} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.2. Матрицы Дирака.

Для построения интерполяторов (4.6) используют Γ – матрицы Дирака [2] (Табл. 4.4), имеющие следующий вид:

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\gamma^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где γ^5 получается следующим образом: $\gamma^5 = i\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4$. Эти матрицы удовлетворяют антикоммутационным соотношениям:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\delta^{\mu\nu}$$

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$$

А также справедливо: $\gamma_\mu^2 = \gamma_5^2 = 1$, для $\mu = \overline{1, 4}$.

2.3. Группа и алгебра Ли.

Группа – множество G , в котором определена операция умножения, обладающая следующими свойствами:

(Ассоциативность) $\forall a, b, c \in G \Rightarrow (ab)c = a(bc)$;

(Существование единичного элемента) $\forall a \in G \exists e \in G : \Rightarrow ae = ea = a$;

(Существование обратного элемента) $\forall a \in G \exists a^{-1} \in G \Rightarrow a^{-1}a = aa^{-1} = e$

Еще одним важным свойством умножения является – **Коммутативность**: Говорят, что, если $\forall a, b \in G$ коммутируют, то есть $ab = ba$, то группа G – абелева, в противном же случае – неабелева.

Если существует набор непрерывных r -параметрических преобразований вида [5] $q = f(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_r) \mapsto q' = f(x_1, \dots, x_n; a_1 + \zeta_1, \dots, a_r + \zeta_r), i = \overline{1, n}$ (удовлетворяющих условию инфинитизимальности и определению группы), то говорят, что задана r -параметрическая группа преобразований Ли.

Пусть r -параметрической группе Ли отвечает вещественное r -мерное векторное пространство величин $\sum_{\rho} a_{\rho} X_{\rho}$, замкнутое относительно умножения [5]: $[X_i, X_j] = iC_{ijk}X_k$, где $C_{ijk} \in Re$ - структурные константы, то задана Алгебра Ли.

Значения C_{ijk} - структурных констант зависят от выбора базисных элементов – генераторов группы.

2.4. Матрицы Гелл-Манна.

Для описания переносчиков сильного взаимодействия исходя из свойств симметрии, применимо представление группы $SU(3)$ эрмитовых матриц с нулевым следом. Эта группа является группой Ли, а над множеством преобразований определена алгебра Ли. В качестве генераторов этой группы $X_i = \frac{1}{2}\lambda_i, i = \overline{1, 8}$ выступают матрицы Гелл-Манна [6] λ_i размером 3×3 , имеющие следующий вид:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}; \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}; \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

3. Основные положения

3.1. Квантовая хромодинамика- теория сильных взаимодействий.

В настоящее время считается, что квантовая хромодинамика(КХД) - единственная теория, которая в должной мере может описать физику сильных взаимодействий. Сильное взаимодействие связывает такую микроструктуру, как атомное ядро, а энергии, порождаемые в такой конфигурации снабжают такие макрообъекты, как звезды. КХД - неабелева калибровочная теория над кварками, взаимодействие между которыми переносится посредством векторных частиц - калибровочных бозонов(глюонов). Теория основана на экспериментально полученных данных, у истоков которой стояли Гелл-Манн и Нееман. Они обнаружили, что адроны обладают внутренней симметрией $SU_F(3)$, а, при добавлении еще группы спиновых вращений $SU(2)$ частицы образовывали бы представление группы $SU(6)$ [4]. Однако экспериментально эти группы не наблюдались, и Гелл-Манн совместно с Цвейгом предложили модель, которая описывает сильно взаимодействующие частицы. Они постулировали, что существует три вида кварков: (u)- up(верхний), (d)- down(нижний), (s)- strange(странный), впоследствии были открыты: (t)-top(верхний), (b)- bottom (нижний), (c)- charm(очарованный), которые составляют фундаментальные частицы стандартной модели. Из этого набора и различных комбинаций элементарных частиц строятся мезоны - связанные состояния кварка и антикварка, а также барионы - связанные состояния трех кварков(кварк-

антикварковых комбинаций). Необходимость их введения заключалась в объяснении наличия у наблюдаемых объектов электрического заряда и других квантовых чисел. Отличительной особенностью кварков является наличие дробного электрического заряда: $Q_u = Q_t = Q_c = +\frac{2}{3}$, $Q_d = Q_b = Q_s = -\frac{1}{3}$. На примере протона (связанного состояния uud) видно, что суммарный электрический заряд $Q_p = Q_u + Q_u + Q_d = +\frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = +1$. На Рис.3.1 изображена упрощенная структура протона, окруженного вакуумом КХД.

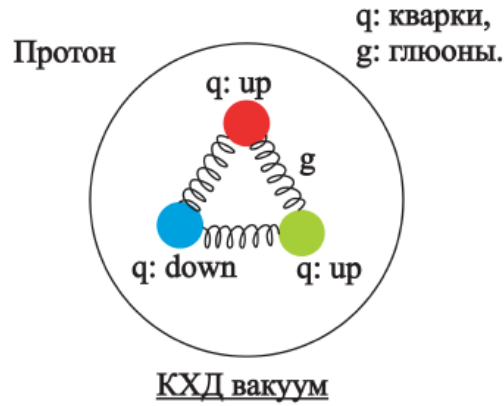


Рис. 3.1. Внутренняя структура протона

Барионы ($B = 1$) – фермионы ($J = (m + \frac{1}{2}), m \in Z$) и мезоны ($B = 0$) – бозоны ($J = m, m \in Z$) формируют важнейший класс объектов - адроны (размер которых ~ 1 Фм). Их класс самый обширный и насчитывает ~ 450 частиц (вместе с их античастицами) [1]. Важнейшее значение для их систематизации имеет правило Накано-Нишиджимы-Гелл-Манна (ННГ) [1]. Было обнаружено, что адроны образуют супермультиплеты, а их характеристики связаны следующим соотношением: $Q = I_3 + \frac{Y}{2}$, где $Y = B + S$ – гиперзаряд [1]. Если положить что заряд $Q = Q(I_3, Y)$ является функцией третьей проекции изоспина I_3 и гиперзаряда Y , то после ее отображения на координатную плоскость $\{Y(S), I_3\}$ получим фигуры высокой степени симметрии. На Рис. 3.2 в вершинах "треугольника" декуплета располагаются частицы $\Delta^- = \{ddd\}$, $\Delta^{++} = \{uuu\}$, $\Omega^- = \{sss\}$, состоящие из трех тождественных фермионов в одних и тех же квантовых состояниях. Согласно принципу Паули, в некотором состоянии может находиться не более одной частицы, и модель Гелл-Манна и Цвейга не могла разрешить эту ситуацию, что являлось ее существенным недостатком. Таким образом эти частицы не должны

Кварковая структура декуплета барионов

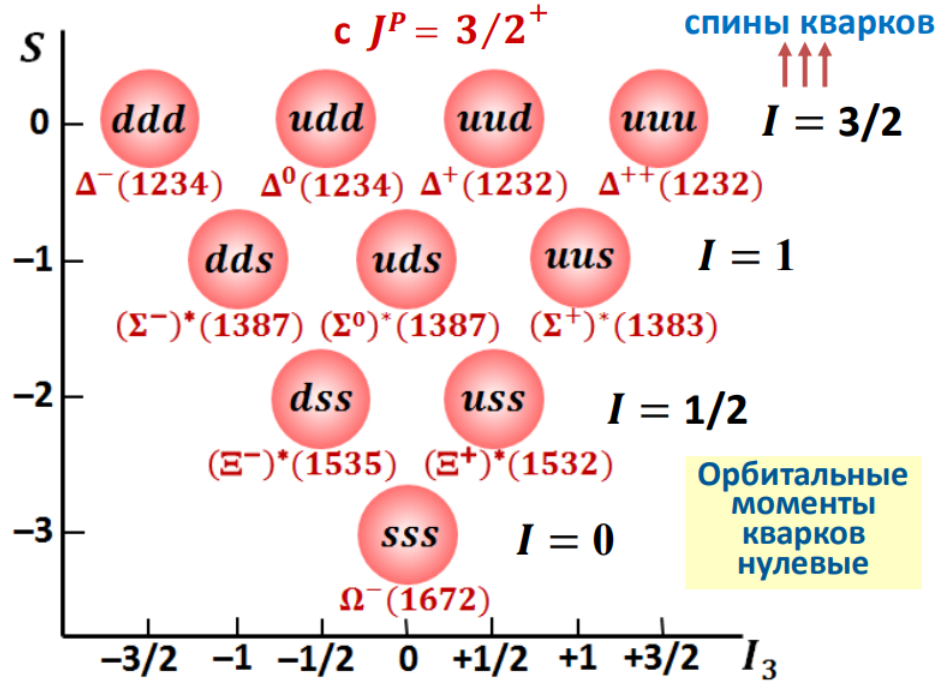


Рис. 3.2. Декуплет барионов с $J^P = \frac{3}{2}^+$ и его кварковый состав

существовать, но они наблюдаются в эксперименте.

В 1964 году Гринберг предположил, что кварки подчиняются статистике, отличной от Ферми-Дирака, а в 1965 г. М.Хан, И.Намбу постулировали существование нового квантового числа (C)- Color(цвет). В новом представлении каждый кварк может находиться в одном из трех цветовых состояний (красный, синий, зеленый), а все физически наблюдаемые адроны – бесцветны, то есть являются цветовыми синглетами по отношению к группе преобразований $SU_c(3)$ цветовой симметрии. Группа $SU_c(3)$ является алгеброй Ли и имеет 8 генераторов, каждый из которых соответствует кванту векторного калибровочного поля - глюону(g). Глюон - безмассовая частица со спином $J = 1$, подчиняющаяся статистике Бозе-Эйнштейна.

Исходя из основных положений стандартной модели, квантовой электродинамики и квантовой хромодинамики можно предположить, что глюоны взаимодействуют с кварковыми полями посредством (f)- Flavour(аромат), однако в этом случае нарушается квантовое число (P)-parity(четность) в стандартной модели. Ванберг положил, что глюоны взаимодействуют только с цветовыми полями, а кварки взаимодействуют через их цветовой заряд за счет обмена глюонами, кото-

рые в свою очередь имеют тоже цвет.

Квантовая хромодинамика определяется действием [2]:

$$S_{QHD} = \int d^4x \mathcal{L} = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a(x) F^{a\mu\nu}(x) + \sum_q \hat{\psi}_q^i(x) (i\gamma_\mu \mathcal{D}_\mu(x) - m_q)_{ij} \psi_q^j(x) \right) \quad (3.1)$$

Где $F_{\mu\nu}^a(x)$ в выражении 3.1 определяет тензор напряженности неабелева поля как,

$$F_{\mu\nu}^a(x) = \partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) + g_s f_{abc} A_\mu^b(x) A_\nu^c(x) \quad (3.2)$$

С неабелевой ковариантной производной

$$(\mathcal{D}_\mu(x))_{ij} = \delta_{ij} \partial_\mu - ig_s \sum_a t_{ij}^a A_\mu^a(x) \quad (3.3)$$

где $t_{ij}^a/2$ - генераторы группы $SU_c(3)$, λ_{ij}^a - Матрицы Гелл-Манна, $i, j = 1, 2, 3$ - цветовые индексы, $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$ - лоренцевы индексы g_s - универсальная константа взаимодействия КХД, f_{abc} -антисимметричный тензор, определяющий структурные константы представления цветовой калибровочной группы $SU_c(3)$, для которой, как алгебры Ли, выполняются соотношения [6]:

$$[t^a, t^b] = i \sum_c f^{abc} t^c. \quad (3.4)$$

Таким образом, кварковое поле - поле трех цветов и аромата q . И каждому такому полю отвечает решение уравнения Дирака (3.5) - четырех-компонентный спинор Дирака $\psi_q^j(x)$

$$(p_\mu \gamma^\mu - m) \psi(p) = 0 \quad (3.5)$$

Разлагая в ряд Тейлора плотность Лагранжиана из уравнения (3.1) [2] :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a(x) F^{a\mu\nu}(x) + \sum_q \hat{\psi}_q^i(x) (i\gamma_\mu \mathcal{D}_\mu(x) - m_q)_{ij} \psi_q^j(x) \quad (3.6)$$

получим члены разложения, отвечающие функциям амплитуды распределения релятивистского поля (пропагаторы) для соответствующих: кварк-глюонной,

трех-глюонной, четырех-глюонной вершин Диаграмм Фейнманна (Рис.3.3). Таким образом, важнейшим отличием КХД от КЭД является возможность к так называемому "самовзаимодействию" глюонов друг с другом. Следствием этой особенности является наличие свойства асимптотической свободы. Это означает, что с ростом расстояния – константа связи растет, стало быть, при малых расстояниях она мала, и КХД можно исследовать, исходя из обычных методов расчета диаграмм Фейнманна. Однако при достаточно больших расстояниях этот метод не работает, так как он связан с разложением (3.6) по малой g_{strong} [4]. Для изучения КХД в непертурбативном режиме при малых энергиях применяют методы *Решеточной КХД*.

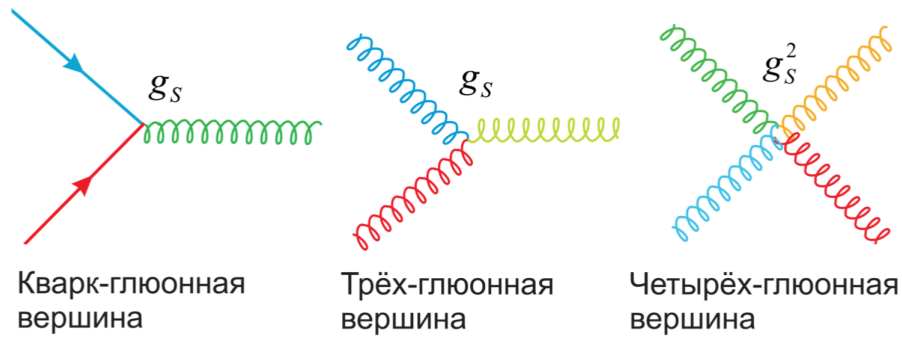


Рис. 3.3. Диаграммы Фейнманна для сильного взаимодействия

3.2. Основные определения КХД на решетке.

Вильсоном был сформулирован подход, описывающий калибровочную теорию моделью пространственно-временной решетки. Основная идея заключалась во введении калибровочного поля, как некоторого фазового множителя, зависящего от пути. Так, дискретизируя четырехмерное кубическое пространство - время и соответствующий ему лагранжиан, мы сможем, используя численное приближение, произвести вычисления и смоделировать поведение системы. В рамках этого подхода используют для генерации глюонных полей метод Монте-Карло с весами $e^{-S_{QCD}}$, соответствующими распределению Больцмана для систем с большим числом степеней свободы, где S_{QCD} - дискретизированная форма действия (3.1) КХД.

Дискретизация подразумевает замену бесконечно-мерного непрерывного пространства - времени дискретным пространством конечного объема (Рис.3.4). Вводя понятие шага решетки a (конечная величина), мы минуем возможность попадания в границы "ультрафиолетовой области". Таким переходом калибровочная инвариантность сохраняется, но нарушается релятивистская, а при $\exists a \rightarrow 0$ она восстанавливается.

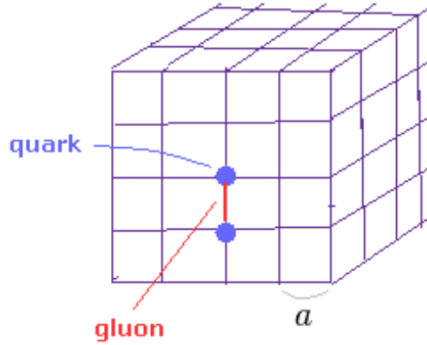


Рис. 3.4. Модель дискретизированного пространства, представляющая собой четырехмерный куб конечного объема.

Для удобства следует совершить переход от пространства-времени Минковского в Евклидово, совершая замену $x_0 \mapsto it$. Теперь введем основные элементы, определяющие КХД на решетке:

1. **Решеточный узел** – точка на решетке, определяемая координатами $x_\mu = an_\mu$, где $n_\mu = \{n_x, n_y, n_z, n_t\}$ - четырех-вектор с соответствующими компонентами. Число узлов в различных пространственных направлениях одинаково. Параметр a – шаг решетки – расстояние между соседними узлами. На изотропных решетках – шаг один и тот же во всех направлениях, в противном случае – он различный.

2. **Линк** – прямолинейный отрезок на решетке, связывающий два соседних узла. Линк задается координатой x_μ его начала и направлением соответствующей оси μ в пространстве. Каждому линку сопоставляется линковая переменная $U_\mu(x)$, которая является матрицей $SU_c(3)$. Линковая переменная необходима для связи решеточных узлов с координатами x и $x + a\hat{\mu}$, где $\hat{\mu}$ – единичный вектор в направлении μ . Когда направление линковой переменной меняется на обратное, то $U_\mu(x) = U_\mu^\dagger(x)$ (Рис. 3.5).

3. **Плакет** – элементарная ячейка, образованная серией из четырех линков (Рис.3.6). Он задается начальной координатой узла, находящегося слева внизу и положительными направлениями $\hat{\mu}$ и $\hat{\nu}$ образующих (соседних) линков.



Рис. 3.5. Вид линка между двумя узлами.

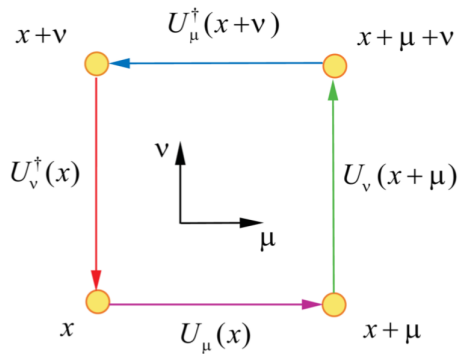


Рис. 3.6. Элементарный плакет, образованный четырьмя линками.

4. Применение методов КХД

4.1. Фаза *confinement*.

Если рассмотреть , для упрощения, мезон, состоящий из бесконечно тяжелой кварк-антикварковой пары, то можно полагать, что каждый из образующих мезон кварков является статическим. Это приводит к тому, что можно изучить свойства такого объекта как *струна* между кварками, приводящая к невылетанию, а именно, к явлению "confinement"(пленение). Для детального изучения характеристик струны, необходимо рассмотреть два случая теории: *полную КДХ*, учитывающую влияние динамических кварков и *SU(3)– глюодинамику*, в которой виртуальные кварки отсутствуют. Для того, чтобы рассчитать потенциал, возникающий

между двумя статическими кварками, необходимо воспользоваться определением *Wilson's Loop (Петли Вильсона)* [2]:

$$W_{\mathcal{L}}[U] = tr \left[\prod_{(k,\mu) \in \mathcal{L}} U_{\mu}(k) \right] \quad (4.1)$$

Где \mathcal{L} - петля (Рис. 4.1)

$$\mathcal{L} : (\vec{m}, n_t) \longrightarrow (\vec{n}, n_t) \longrightarrow (\vec{n}, 0) \longrightarrow (\vec{m}, 0) \longrightarrow (\vec{m}, n_t) \quad (4.2)$$

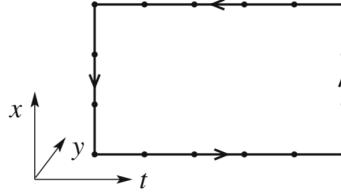


Рис. 4.1. Планиметрическая модель Вильсоновской петли.

При низких энергиях $E = V(r)$, где $r = a | \mathbf{m} - \mathbf{n} |$. Тогда с учетом определения(4.1):

$$\langle W_{\mathcal{L}} \rangle \propto e^{-n_t a V(r)} \left(1 + \mathcal{O}(e^{-n_t a V(r)}) \right) \quad (4.3)$$

Таким образом, статический межкварковый потенциал можно вычислить исходя из Вильсоновской петли. В КХД он имеет вид:

$$V(r) = A + \frac{B}{r} + \sigma r \quad (4.4)$$

где $\sigma \simeq 900[MeV/fm]$ определяет натяжение струны. Задача получения оценки на σ , вообще говоря, довольно сложная и ее решение, опирающееся на методы решеточной КХД, описано в работе [3]. Численный расчет дает следующие результаты(Рис.4.2).

Исходя из анализа графической зависимости, можно заключить, что наличие или отсутствие динамических кварков играет важную роль для количественного значения параметра натяжения цветовой струны:

В случае (Рис. 4.2а), если рассматривается КХД без динамических кварков,

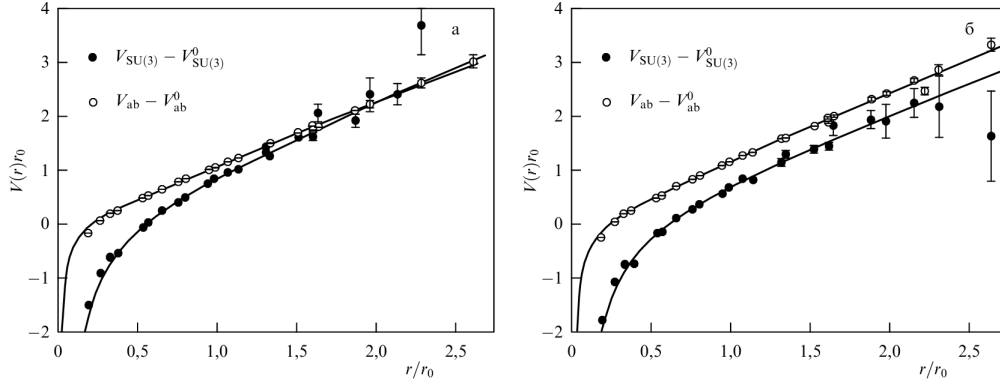


Рис. 4.2. Полный и абелев статический потенциал($\beta = 6.0$): а) в рамках $SU(3)$ -глюодинамики; б) полной КХД.

то струна не рвется, так как нет энергетической возможности создать пару кварк – антикварк, а в случае (Рис. 4.2б) – противоположная ситуация: у струны есть предел прочности, превышая который (из-за наличия динамических кварков становится возможным достигать критических значений энергий) она рвется, и образуется новая кварк-антикварковая пара в силу энергетической выгоды такого процесса.

4.2. Адронная спектроскопия.

Еще одной хорошо согласующейся с теоретическими предсказаниями величиной, рассчитываемой на решетке, является спектр масс адронов. Существование столь большого количества фермионных состояний, как уже обсуждалось, связано с наличием различных комбинаций квантовых чисел(J, F, P, Q , и др.). Поэтому, точное определение их масс – доказательство справедливости применения решеточных методов КХД. Основными инструментами численного спектроскопического анализа являются: *операторы рождения*, а также соответствующие им *корреляционные функции*. Необходимые значения энергий и масс адронов могут извлекаться непосредственно из соответствующих корреляторов.

4.2.1. Оператор рождения мезона.

Для того, чтобы произвести вычисления в адронной спектроскопии, необходимо построить *адронные интерполяторы* \hat{O}, \bar{O} , такие как соответствующие опе-

раторы \hat{O}, \hat{O}^\dagger рождения и уничтожения частицы в данном состоянии в Гильбертовом пространстве. Адронный интерполятор, по сути, является функционалом решеточного поля с набором квантовых чисел заданного квантового состояния. В спектроскопии используются интерполяторы, построенные из кварков и глюонов, образующие калибровочную инвариантность цветового синглета. Как правило, эти операторы включают в себя:

1) Локальные мезонные операторы, состоящие из кварков и антикварков, или барионные операторы из трех кварков, которые дают необходимую информацию о мезонах или барионах, предсказываемых КДХ.

2) Расширенные интерполяторы, включающие адронные пропагаторы.

3) Полевые калибровочные интерполяторы: плакеты, замкнутые петли и глюонные операторы.

Физически разрешенные состояния – наблюдаемые состояния. Они получаются спектральным разложением пропагатора соответствующего интерполятора с учетом дискретизированного пространства и решеточных переменных [2]:

$$\langle O(n_t)\bar{O}(0) \rangle = \sum_k \langle 0 | \hat{O} | k \rangle \langle k | \hat{O}^\dagger | 0 \rangle e^{-n_t a E_k} = A e^{-n_t a E_H} (1 + \mathcal{O}(e^{-n_t a \Delta E})) \quad (4.5)$$

где $A = const$, E_H - энергия, соответствующая наименьшему состоянию $| H \rangle$, причем $\langle 0 | \hat{O} | H \rangle \neq 0$, а ΔE - разница энергий между нулевым состоянием (вакуума) и первым энергетически существующим.

Этот факт является необходимым для построения мезонного интерполятора, который, в общем случае, имеет следующий вид:

$$O_M(n) = \bar{\psi}^{(f1)}(n) \Gamma \psi^{(f2)}(n) \quad (4.6)$$

где f - индекс flavor (Таблица 4.3), отвечающий спинорам $\psi, \bar{\psi}$, а Γ - гамма матрица Дирака, которая меняет свой вид в зависимости от исследуемой системы, характеризуемой квантовым числом J^{PC} . Наиболее часто используемые значения J^{PC} приведены в таблице (4.4). Таким образом, для того, чтобы наблюдать конкретное состояние мезона, необходимо построить интерполятор (оператор рождения) с квантовыми числами этого мезона. Действуя на вакуум, локальный оператор

рождения $O(n)$ создает возбуждение поля с характерными квантовыми числами, локализованное в положении n .

Сорт	Заряд Q	Изоспин I_3	Странность S	Очарование C	Красота B	Верхний T
up	+2/3	+1/2	0	0	0	0
down	-1/3	-1/2	0	0	0	0
strange	-1/3	0	-1	0	0	0
charm	+2/3	0	0	+1	0	0
bottom	-1/3	0	0	0	-1	0
top	+2/3	0	0	0	0	+1

Рис. 4.3. Квантовые числа основных ароматов

Состояние	J^{PC}	Γ	Частицы
Скаляр	0^{++}	$1, \gamma_4$	a_0, K_0^*, \dots
Псевдоскаляр	0^{-+}	$\gamma_5, \gamma_4\gamma_5$	π^\pm, π^0, \dots
Вектор	1^{--}	$\gamma_i, \gamma_4\gamma_i$	ρ^\pm, ρ^0, \dots
Аксиальный вектор	1^{+-}	$\gamma_i\gamma_5$	a_1, f_1, \dots
Тензор	1^{+-}	$\gamma_i\gamma_j$	h_1, b_1, \dots

Рис. 4.4. Наиболее часто используемые комбинации гамма-матриц, соответствующих квантовому числу J^{PC}

Для примера построим интерполятор, рождающий из вакуума состояния с квантовыми числами π^+ – мезона. Так как пи-мезон состоит из u и d – кварков, причем согласно (Табл. 4.3): $I(u) = \frac{1}{2}, I_z(u) = +\frac{1}{2}, Q(u) = +\frac{2}{3}e, I(d) = \frac{1}{2}, I_z(d) = -\frac{1}{2}, Q(d) = -\frac{1}{3}e$, то π^+ – мезону отвечает комбинация кварков $\bar{d} - u$. Тогда для $J = 0, P = -1$ из (Табл. 4.4) и выражения (4.6) получим:

$$O_{\pi^+}(n) = \bar{d}(n)\gamma_5 u(n) \quad (4.7)$$

Аналогично, совершая перестановки по соответствующим параметрам, получим интерполятор для π^- :

$$O_{\pi^-}(n) = \bar{u}(n)\gamma_5 d(n) \quad (4.8)$$

Часто для расчетов энергетических спектров на решетке удобно перейти от координатной к импульсной форме операторов рождения путем применения пространственного преобразования Фурье [2] :

$$\hat{O}(\vec{p}, n_4) = \sum_{\vec{n} \in \Lambda_3} O(\vec{n}, n_4) e^{-i\vec{n}\vec{p}} \quad (4.9)$$

где суммирование по \vec{n} во всех точках внутри части решетки Λ_3

4.2.2. Корреляционная функция оператора рождения мезона.

В КХД выражение, определяющее корреляционную функцию оператора рождения является ключевым. Она определяется, как квантовое среднее этих операторов и действует на состояние $|\Omega\rangle$ соответствующее вакууму. Применительно к решеточным методам оно определяется через интеграл по траектории (путевой интеграл) и имеет следующий вид [2]:

$$\langle \Omega | O^\dagger(n) O(m) | \Omega \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}[\psi] \mathcal{D}[\bar{\psi}] \int \mathcal{D}[U] O^\dagger(n) O(m) e^{-S[\psi, \bar{\psi}, U]} \quad (4.10)$$

где $S[\psi, \bar{\psi}, U]$ - решеточное действие КХД, а Z - статистическая сумма:

$$Z = \int \mathcal{D}[\psi] \mathcal{D}[\bar{\psi}] \int \mathcal{D}[U] e^{-S[\psi, \bar{\psi}, U]} \quad (4.11)$$

Для извлечения энергетического спектра мезона необходимо применить пространственное преобразование Фурье (4.9), а также, учитывая определение (4.10), и условие $t_2 > t_1$, получим:

$$C(t_2 - t_1) \equiv \langle \Omega | O^\dagger(t_2) O(t_1) | \Omega \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \langle \Omega | \hat{O}^\dagger(t_2) | k \rangle \langle k | \hat{O}(t_1) | \Omega \rangle \quad (4.12)$$

Так как эволюция системы во времени характеризуется оператором гамильтона H , то выражение 4.12 примет вид:

$$C(t_2 - t_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \langle \Omega | e^{H(t_2-t_1)} \hat{O}^\dagger(t_1) e^{-H(t_2-t_1)} | k \rangle \langle k | \hat{O}(t_1) | \Omega \rangle \quad (4.13)$$

Последовательные действия экспонент на вакуумное $\langle \Omega |$ и энергетическое $| k \rangle$ состояния отвечают собственным состояниям:

$$\langle \Omega | e^{H(t_2-t_1)} = \langle \Omega | e^{E_\Omega(t_2-t_1)} \quad (4.14)$$

$$e^{-H(t_2-t_1)} | k \rangle = e^{-E'_k(t_2-t_1)} | k \rangle \quad (4.15)$$

Теперь, используя (4.13) и (4.14), (4.15), имеем:

$$\begin{aligned} C(t_2 - t_1) &= \sum_{k=0}^{\infty} \langle \Omega | \hat{O}^\dagger(t_1) | k \rangle \langle k | \hat{O}(t_1) | \Omega \rangle e^{-(E'_k - E_\Omega)(t_2-t_1)} = \quad (4.16) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (\langle k | \hat{O}(t_1) | \Omega \rangle)^\dagger \langle k | \hat{O}(t_1) | \Omega \rangle e^{-(E'_k - E_\Omega)(t_2-t_1)} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{|\langle k | \hat{O}(t_1) | \Omega \rangle|^2}_{|A_k|^2} e^{-E_\xi(t_2-t_1)} \end{aligned}$$

где $E_\xi = E'_k - E_\Omega$ – энергия состояния $| k \rangle$ относительно вакуума. С другой стороны из релятивистской связи энергии-импульса: $E_\xi = \sqrt{m_{eff}^2 + |\vec{p}|^2}$. Будем считать, что $|\vec{p}| = \vec{0}$, тогда $E_\xi = m_{eff}$, а $n_t = t_2 - t_1$ – шаг по временной координате решеточного 4-вектора $n_\mu |_{\mu=t}$.

Если n_t бесконечно большое, то:

$$\lim_{n_t \rightarrow \infty} C(n_t) = |A_0|^2 e^{-E_0 n_t}. \quad (4.17)$$

Следовательно большой вклад вносит энергия основного состояния, а вклад от более высоких – ничтожно мал. Если рассматривать случай при малых n_t , то ситуация кардинально меняется:

$$\lim_{n_t \rightarrow 0} C(n_t) = \tilde{A}_0 e^{-E_0 n_t} + \tilde{A}_1 e^{-E_1 n_t} + \dots$$

где $\tilde{A}_k \equiv |A_k|^2$ и вклад от состояний, отличных от основного существенен. Однако даже при асимптотических разложениях получение искомого вида корреляцион-

ной функции необходимого для ее дальнейшего численного вычисления – сложная задача, поэтому в дальнейшем будем считать выражение для численного анализа – известным. Процесс вычислений подробно описан в [2].

5. Расчет массы K_0^* -мезона посредством методов решеточной КХД.

Теперь применим рассмотренные методы квантовой хромодинамики на решетке для получения оценки массы K_0^* -мезона $S = 1, Q = 0$. В качестве генератора глюонных и фермионных полей использовался метод Монте-Карло с весами $e^{-S_{QCD}}$ [2], для численных расчетов соответствующих корреляторов – математический пакет *Wolfram Mathematica*, а для графической обработки, где было произведено фитирование полученных данных использовалась кросс-платформенная утилита *Gnuplot*.

5.1. Постановка задачи.

Пусть имеем K_0^* -мезон и набор масс d – кварка $m_q, q = \overline{1, 4}$:

$$m_1 = 11,99 \text{ МэВ};$$

$$m_2 = 17,13 \text{ МэВ};$$

$$m_3 = 25,70 \text{ МэВ};$$

$$m_4 = 34,26 \text{ МэВ};$$

Причем массу s – кварка, считаем фиксированной и равной $m(s) = 95 \text{ МэВ}$ [7]. Это объясняется тем, что s – кварк достаточно тяжелый по сравнению с массой голого $m(d) = 4,7 \text{ МэВ}$ [7], а следовательно, в таком случае расчеты требуют меньших затрат вычислительных ресурсов.

Пусть задана решетка размером 18^4 и выбран шаг, одинаковый по всем направлениям и равный $a = 0.115 fm$, значение величины $1 fm^{-1} \simeq 197 \text{ МэВ}$ считаем неизменной.

При решении задачи будем считать, что магнитное и электрическое внешние

поля отсутствуют ($\vec{H} = \vec{0}, \vec{E} = \vec{0}$), а n_t – бесконечно большим, тогда справедливо соотношение (4.17) и основной вклад по энергиям вносит основное состояние. Тогда коррелятор (4.16) отвечает оператору рождения $O_{K_0^*}(n) = \bar{s}(n)d(n)$ и фитируется гиперболической функцией - \cosh . Учитывая периодические граничные условия, имеем:

$$C(n_t) = 2\tilde{A}_0 e^{-N_T \frac{E_0}{2}} \cosh \left(\left(\frac{N_T}{2} - n_t \right) E_0 \right) \quad (5.1)$$

где N_T - число временных узлов. Для получения значения эффективной массы m_{eff} из (4.10) необходимо численно решить следующее уравнение относительно m_{eff} [2]:

$$\frac{C(n_t)}{C(n_t + 1)} = \frac{\cosh \left(m_{eff} \left(n_t - \frac{N_T}{2} \right) \right)}{\cosh \left(m_{eff} \left(n_t + 1 - \frac{N_T}{2} \right) \right)} \quad (5.2)$$

5.2. Результаты.

На рисунке (5.1) изображены корреляционные функции для K_0^* – мезона в КХД без динамических кварков, в зависимости от n_t и фитированные формулой (5.1). Численный расчет дает следующие параметры:

$$m_1 = 11,99 \text{ МэВ}; a_2 = 1.41761 \pm 0.007482 \text{ ГэВ};$$

$$m_2 = 17,13 \text{ МэВ}; b_2 = 1.63133 \pm 0.009317 \text{ ГэВ};$$

$$m_3 = 25,70 \text{ МэВ}; c_2 = 2,01272 \pm 0,01178 \text{ ГэВ};$$

$$m_4 = 34,26 \text{ МэВ}; d_2 = 2,39394 \pm 0,0147 \text{ ГэВ};$$

В роли коэффициентов a_2, b_2, c_2, d_2 выступают массы каонов, соответствующие параметру E_0 в уравнении (5.1), при различных m_q . Так как масса голого d – кварка мала и равна $m(d) = 4,7 \text{ МэВ}$, то вычислительная мощность затрат ресурсов компьютера превзошла бы допустимое значение и мы не смогли бы произвести расчет. Поэтому был взят набор масс, близких к истинной, но отличной от нее. Теперь необходимо произвести экстраполяцию в киральный предел (к "нулевой" массе кварка). Из зависимости, отраженной на (Рис. 5.2) видно, что прямая, аппроксимированная линейной функцией по методу наименьших квадратов, пересекает ось ординат (на этой оси отложены массы K_0^* - мезона в ГэВах) в точке со значением $m(K_0^*) = 0.888911 \pm 0.004316 \text{ ГэВ}$.

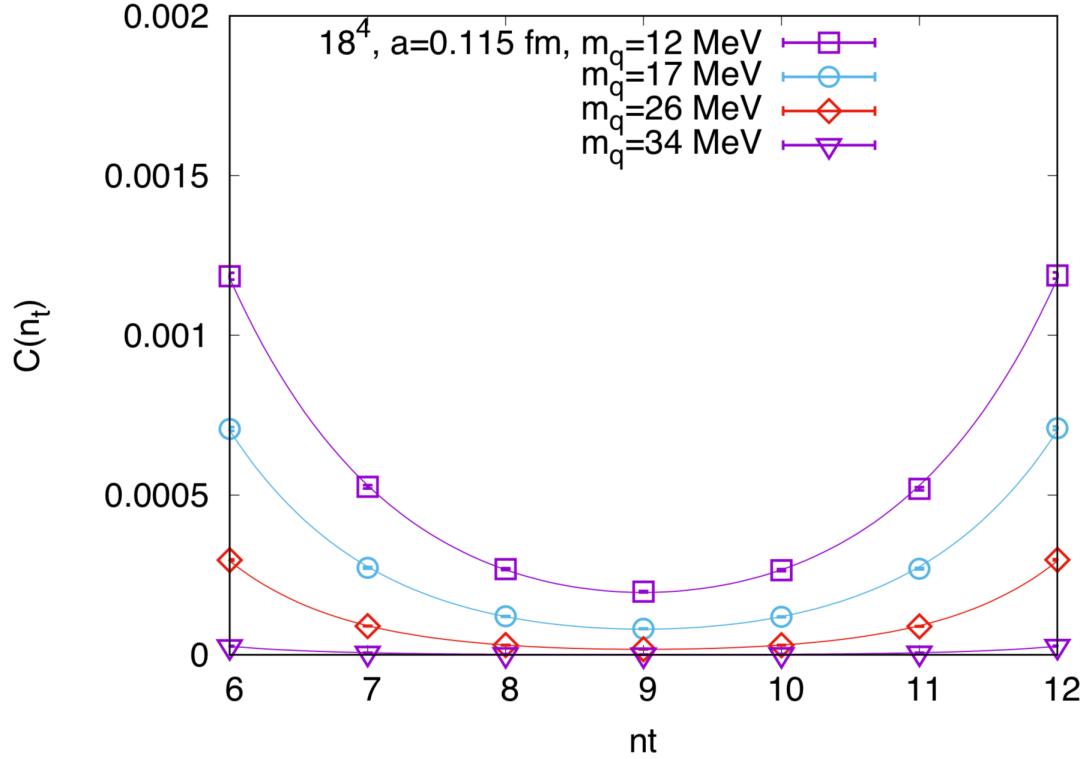


Рис. 5.1. Корреляционная функция K_0^* -мезона в зависимости от параметров решетки

Тогда полученная масса K_0^* :

$$m(K_0^*) \simeq 889 \pm 43 \text{ MeV.}$$

Значение массы, наблюдаемое в эксперименте [7]:

$$m_{eff}^{exper}(K_0^*) = 892 \pm 0,25 \text{ МэВ.}$$

Таким образом, получено в пределах погрешности точное согласование результатов, предсказанных КХД и наблюдаемых в эксперименте. Вероятной причиной не абсолютного совпадения значений может послужить ошибка метода(в силу упрощения задачи), где не учтена перенормировка масс. Так как в пределах ошибок вычислений она не учитывалась, на решетке все равно будет иметь место. В таком случае, возникнут, так называемые, *глюонные шубы*, в которые "одет" кварк, и помимо этого, кварк будет находится в поле антикварка, которые, в свою очередь, связаны струной. Как следствие, эти факторы вносят дополнительный вклад в значение массы.

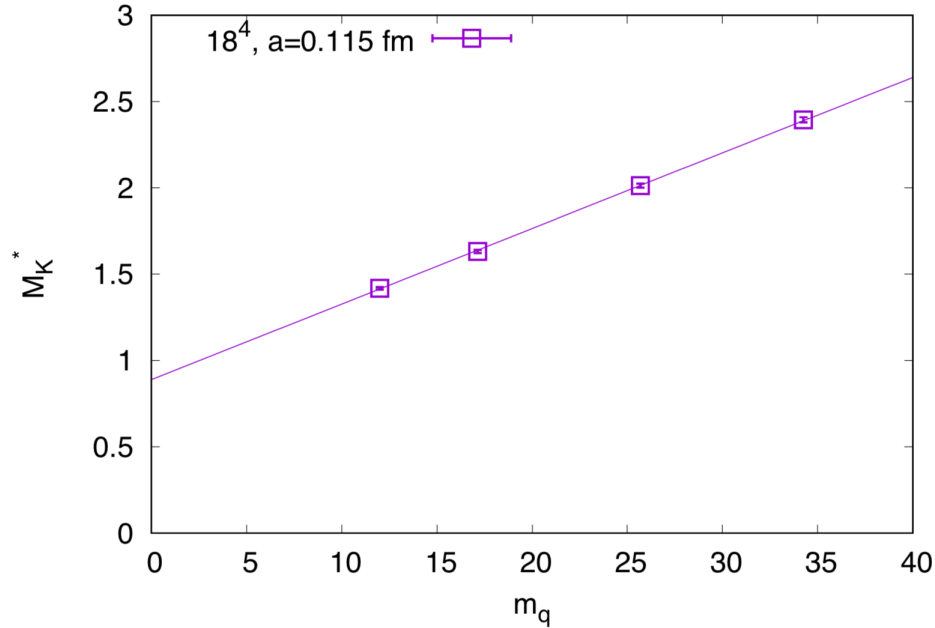


Рис. 5.2. Экстраполяции массы K_0^* -мезона в киральном пределе

Заключение

В данной работе были изложены основные положения теории сильных взаимодействий – квантовой хромодинамики, сформулированы проблемы, стоящие перед ней и способы их исследования. Как итог, рассмотрены важнейшие приложения методов решеточной КХД, а именно, изучение теории невылетания цвета и способы количественного анализа в адронной спектроскопии. В качестве примера практической реализации теоретических аспектов была решена задача об оценке массы K_0^* – мезона в самом простом случае - в отсутствии внешних электрического и магнитного полей. Результат показал, что теоретическое значение, полученное из корреляционных функций, а затем экстраполированное к нулевой массе кварка, с хорошей степенью точности совпадает со значением эффективной массы мезона, наблюдаемой в эксперименте. Тем самым, мы убедились в том, что методы рассмотренной теории дают довольно точные предсказания. Следовательно, спектр задач, стоящих перед КХД в скором времени будет разрешен. Однако стремление к расширению границ горизонтов в этой области, нисколько не умаля-

ет вероятность столкнуться с новыми проблемами, которые, вероятно, потребуют в дальнейшем новых научных изысканий и предложений. Только тогда уже они, в свою очередь, должны будут подвергнуться столь же строгой проверке.

Список литературы

1. И. М. Капитонов, Б. С. Ишханов. Физика атомного ядра и частиц.
2. Gattringer C. Lang C. V. Quantum Chromodynamics on the Lattice: An Introductory Presentation Lect. Notes Phys. 788 Springer, 2010.
3. В. Г. Борняков, М. И. Поликарпов, Т. Судзуки, М. Н. Чернодуб, Г. Шергольц. Невылетание цвета и структура адронов в решеточной хромодинамике, Успехи физических наук, 2004.
4. М. Л. Мангано. Квантовая хромодинамика и физика адронных столкновений, Успехи физических наук, 2010.
5. М. Хамермеш. Теория групп и ее применение к физическим проблемам, Мир, 1966.
6. В. А. Рубаков. Классические калибровочные поля. Эдиториал УРСС, 1999.
7. PARTICLE PHYSICS BOOKLET, Extracted from the Review of Particle Physics, M. Tanabashi et al (Particle Data Group), Phys. Rev. D 98, 2018.