

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ.М.В.ЛОМОНОСОВА
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

**Оптимизация скорости нахождения
решения уравнения Больцмана для
транспортировки света в дисперсионной
среде**

курсовая работа

Выполнил:

студент 217 группы физического ф-та
МГУ Шаврин И.А

Научный руководитель

Наумов Д.В., профессор, доктор
физико-математических наук

Москва – 2022

Содержание

- 1) Эксперимент БАЙКАЛ-ГВД
- 2) Уравнение Больцмана. Моделирование распространения света
- 3) VEGAS
- 4) Основные результаты работы
- 5) Выводы
- 6) Список используемой литературы

Эксперимент БАЙКАЛ-ГВД

Байкальский глубоководный нейтринный телескоп (или Байкал-ГВД — Gigaton Volume Detector) — международный проект в области астрофизики частиц и нейтринной астрономии.

Его основная цель — детальное изучение потока космических нейтрино высоких энергий и поиск их источников.

В последнее время особое внимание исследователей обращено на нейтрино астрофизического происхождения, ведь именно они, за счёт малого (порядка 10-20 барн) сечения взаимодействия с веществом, обладают наивысшей по сравнению с другими частицами астрофизического происхождения, проникающей способностью, что даёт возможность получать информацию об удалённых космических объектах.

Оборудование детектора располагается в толще воды озера, чтобы увеличить вероятность взаимодействия нейтрино. В случае такого взаимодействия образуется либо мюон, либо ливневый каскад из частиц высоких энергий. И мюон, и ливневый каскад вызывают свечение воды, называемое в физике черенковским излучением — явление, обнаруженное советскими физиками П. А. Черенковым и С. И. Вавиловым.

Явление черенковского излучения заключается в свечении, вызываемого в прозрачной среде заряженной частицей, движущейся со скоростью, превышающей фазовую скорость распространения света в этой среде. Детекторы, регистрирующие черенковское излучение, широко используются в физике высоких энергий для регистрации релятивистских частиц и определения их скоростей и направлений движения. Если известна масса порождающих черенковское излучение частиц, то сразу определяется их кинетическая энергия.

Самая крупная структурная единица GVD — это кластер, находящиеся друг от друга на расстоянии 300 м. Каждый кластер состоит из 8 вертикально подвешенных гирлянд, на которых висят стеклянные оптические модули — по 36 на каждой гирлянде. По проекту объём готовой установки на озере Байкал должен составить порядка одного кубического километра.

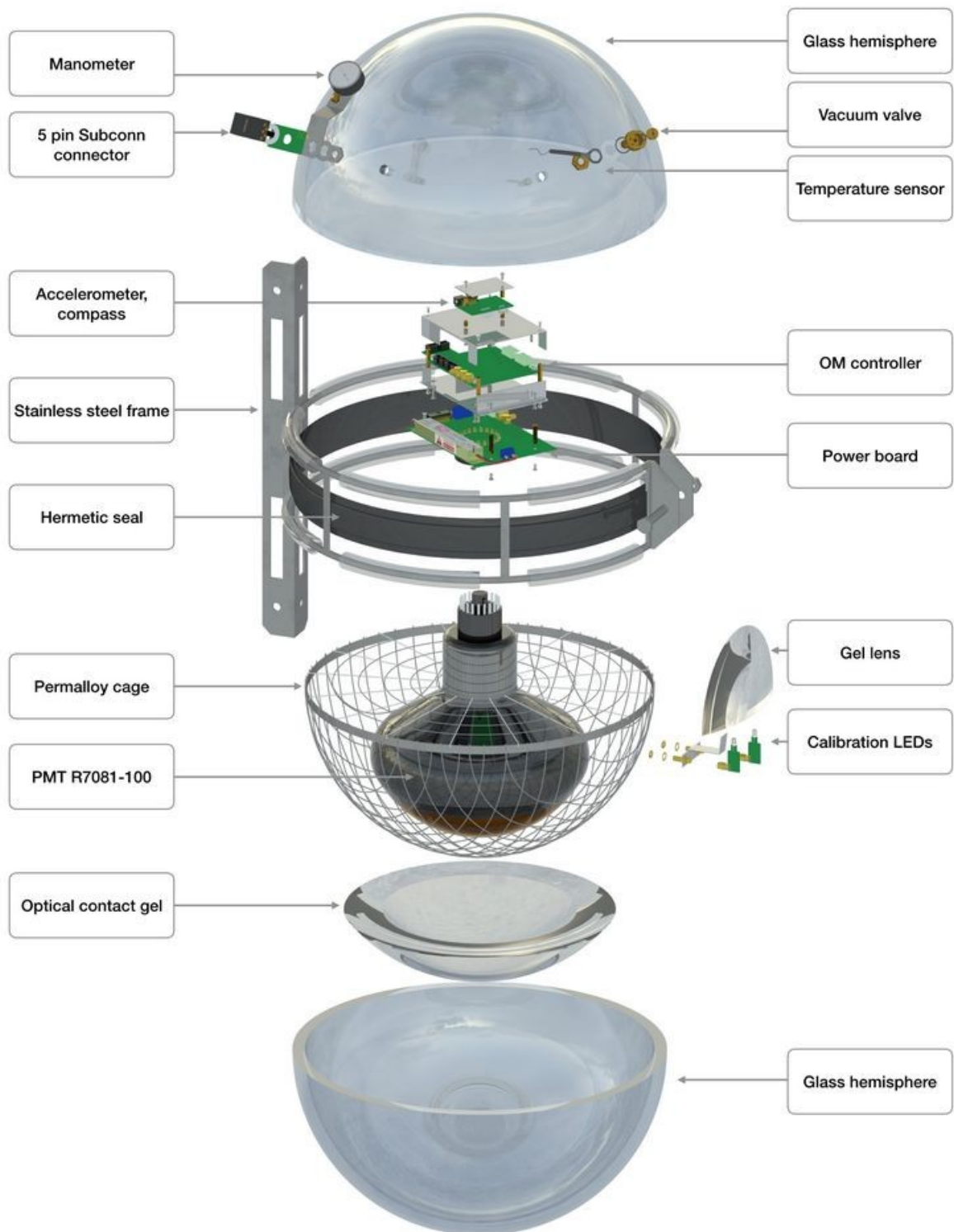


схема оптического модуля

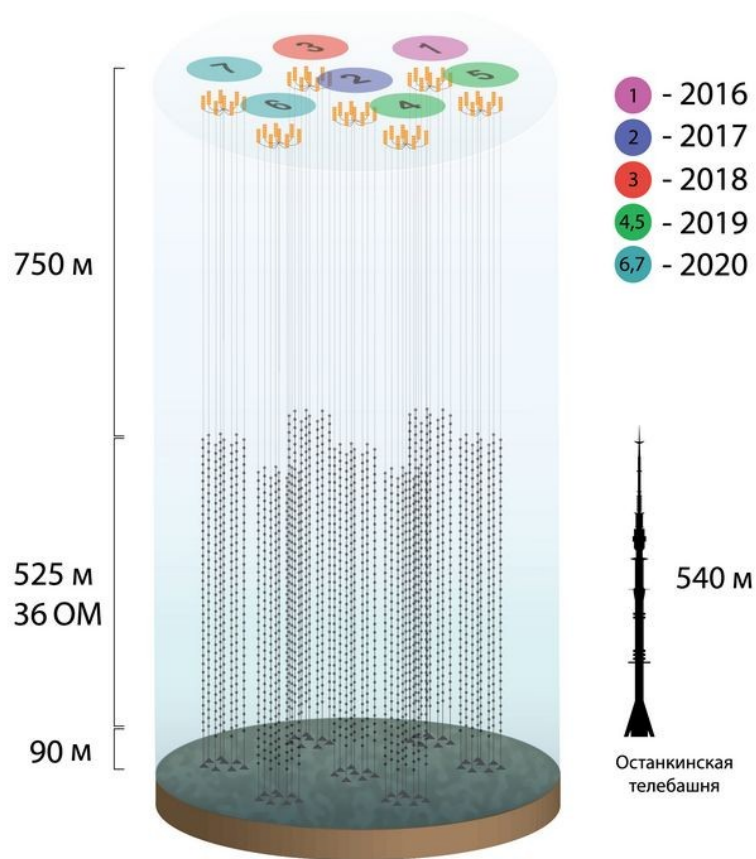


схема расположения кластеров

Уравнение Больцмана. Моделирование распространения света

Исследования распространения света в случайных средах имеют большое значение во многих областях физики, таких как, например, астрофизика, биофотоника, физика элементарных частиц, прикладные исследования.

Понимание и оптимизация отклика детектора частиц обычно требуют обширного моделирования переноса фотонов, часто выполняемого с использованием методов Монте-Карло. Мощные методы Монте-Карло, эффективные для детекторов с охватом источника света почти 4π , резко теряют свою эффективность для детекторов, слабо распределенных в средах, таких как нейтринные телескопы. Потребность в ресурсах центрального процессора, необходимых для достижения точных результатов с помощью метода Монте-Карло в этих случаях, становится очень требовательной. Поиск решения линейного интегро-дифференциального уравнения переноса излучения (RTE), управляющего распространением света в среде, являющегося многообещающей альтернативой, является основной мотивацией этой работы.

RTE следует из более общего нелинейного уравнения Больцмана, разработанного в 1872 году, в котором описываются термодинамические системы, вышедшие из равновесия. Предположение, что целевая среда частицы остаются в том же состоянии после рассеяния фотонов, помогает линеаризовать уравнение Больцмана, известное как RTE.

Несмотря на долгую историю применения RTE в различных областях физики, оно все еще не имеет аналитического решения даже для простых случаев, за исключением диффузионного приближения, которое имеет ограниченную область применения. Таким образом, обычно рассматриваются численные решения RTE. В дополнение к методу Монте-Карло в литературе обсуждаются и другие численные методы. Эти методы обычно требуют большого объема памяти процессора, поскольку неотъемлемая часть RTE требует дискретизации своего решения во всем пространстве параметров, определяемом шестью переменными. Даже скромные 100 точек на одну переменную требуют хранения в памяти 10^{12} значений с плавающей запятой. Недавно получены решения RTE для функции Грина для изотропных и однонаправленных точечных источников, рассматривающие трехмерную анизотропно рассеивающую среду. Соответствующие решения даны в терминах аналитических функций и требуют численного интегрирования. Предлагаемый метод основан на разложении как решения, так и функции вероятности рассеяния в терминах сферических гармоник и приведении RTE к матричному

интегрируемому уравнению. Будучи мощным методом, этот метод становится сложным для очень анизотропной функции вероятности рассеяния.

Решение, описывающее распространения света, заключено в шестимерной функции $L(\mathbf{r}, t, \hat{s})$, определяемой как плотность потока энергии в точке пространства-времени (\mathbf{r}, t) вдоль направления, заданного единичным вектором \hat{s} . L подчиняется зависящему от времени RTE:

$\hat{K}L(\mathbf{r}, t, \hat{s}) = S(\mathbf{r}, t, \hat{s}) + \mu_s \hat{V} \hat{s} \hat{s} L(\mathbf{r}, t, \hat{s})$, где $\hat{K} \equiv \partial/\partial t + \hat{s} \cdot \nabla + \mu_t$ является дифференциальным оператором с частными производными по пространственно-временным координатам, а \hat{V} является интегральным оператором столкновения, определяемым как

$$\hat{V}_{\hat{s}\hat{s}'} f(\hat{s}') \equiv \int_{4\pi} d\hat{s}'' g(\hat{s}, \hat{s}'') f(\hat{s}'').$$

c — скорость фотонов в среде, $\mu_t = \mu_a + \mu_s$ - это общий коэффициент ослабления, обусловленный коэффициентами поглощения (μ_a) и рассеяния (μ_s). $g(\hat{s}, \hat{s}'')$ - функция плотности вероятности рассеяния фотона с единичным вектором \hat{s}'' в направлении \hat{s} .

Интегро-дифференциальное уравнение может быть преобразовано в интегральное уравнение:

$$L(\mathbf{r}, t, \hat{s}) = L_0(\mathbf{r}, t, \hat{s}) + \Delta L(\mathbf{r}, t, \hat{s}) \quad , \text{где}$$

$$L_0 = c \int_0^t dt' e^{-c\mu_t(t-t')} S(\mathbf{r}', t', \hat{s}),$$

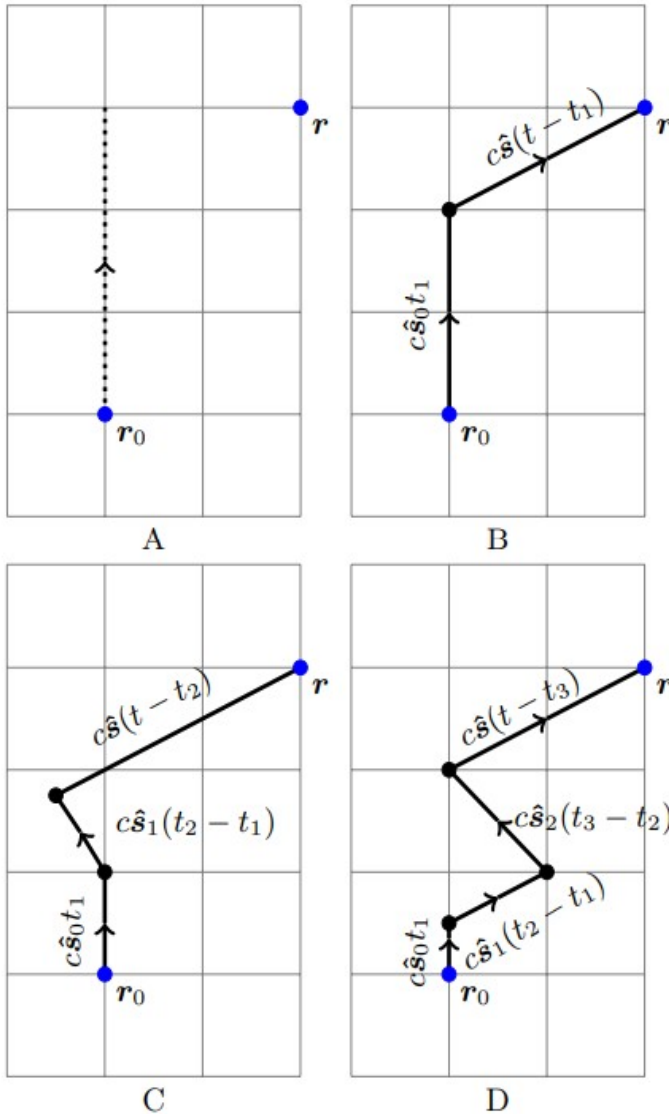
$$\Delta L = c\mu_s \hat{V}_{\hat{s}\hat{s}'} \int_0^t dt' e^{-c\mu_t(t-t')} L(\mathbf{r}', t', \hat{s}').$$

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - c\hat{s}(t - t').$$

Решение уравнение может быть найдено как: $L = \lim_{n \rightarrow \infty} L^{(n)}$

где
$$\Delta L^{(n)} = c\mu_s \hat{V}_{\hat{s}\hat{s}'} \int_0^t dt' e^{-c\mu_t(t-t')} L^{(n)}(\mathbf{r}', t', \hat{s}')$$

Порядок функции соответствует количеству актов рассеяния фотона на пути к детектору.



Четыре примера возможных траекторий для фотона, созданного при $t = 0$ в r_0 с начальным направлением \hat{s}^0 , чтобы достичь r в момент времени t с направлением \hat{s} :

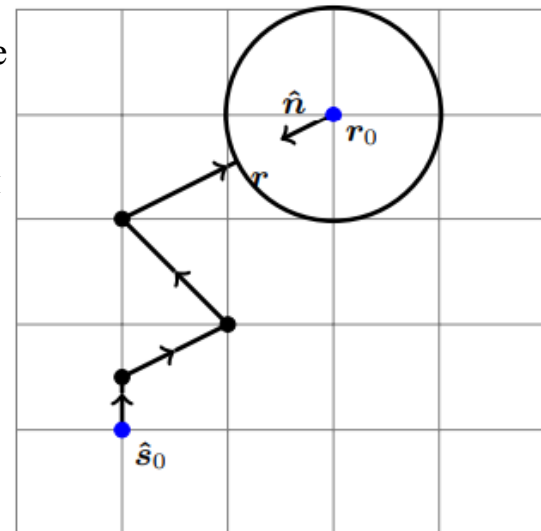
(A) С нулевым рассеянием только в том случае, если $r = r_0 + c\hat{s}(t - t_0)$ и $\hat{s} = \hat{s}^0$.

(B) С однократным рассеянием в направлении \hat{S} в момент времени t_1 таким образом, что $r = c\hat{s}^0 t_1 + c\hat{s}(t - t_1)$.

(C) С двумя рассеяниями. Первое, в момент времени t_1 в произвольном направлении \hat{s}_1 . Во-вторых, в момент времени t_2 в направлении \hat{s} , чтобы достичь $r = c\hat{s}(t - t_2) + c\hat{s}_1(t_2 - t_1) + c\hat{s}^0 t_1$.

(D) С тремя рассеяниями. Первое, в момент времени t_1 в произвольном направлении \hat{s}_1 . Во-вторых, в момент времени t_2 к произвольному направлению \hat{s}_2 . В-третьих, в момент времени t_3 к направлению \hat{s} , чтобы достичь $r = c\hat{s}(t - t_3) + c\hat{s}_2(t_3 - t_2) + c\hat{s}_1(t_2 - t_1) + c\hat{s}^0 t_1$.

Рассмотрим в качестве примера детектор с эффективностью фотоприемника, определяемой функцией $\varepsilon(r, \hat{s})$, где r – точка на его поверхности, а \hat{s} – единичный вектор фотона. Кроме того, давайте рассмотрим сферический детектор, подобный тому, который используется нейтринными телескопами. Пусть его центр смещен от источника света на r_0 , а его радиус равен R , как показано на рисунке. Точка на сферической поверхности может быть записана через $r = r_0 + \hat{n}r$, где \hat{n} – соответствующий единичный вектор, как показано на рисунке. Оценка количества обнаруженных фотонов за интервал времени (t_i, t_{i+1}) задается интегралом:



$$\Delta N_i = R^2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} dt \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{n} \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{s} L(r, t, \hat{s}) \varepsilon(\hat{n}, \hat{s}) \theta(-\hat{n} \cdot \hat{s})$$

VEGAS

Многомерные численные интегрирования выполняются с помощью интегратора Монте-Карло VEGAS. В качестве перекрестной проверки мы используем результаты полученные непосредственным интегрирование по каждому бину, которые для бесконечно большой статистики должны сходиться к истинному решению.

Класс `vegas.Integrator` дает оценки методом Монте-Карло произвольных многомерных интегралов с использованием алгоритма *VEGAS* (GP Lepage, J. Comput. Phys. 27 (1978) 192 и J. Comput. Phys. 439 (2021) 110386). Алгоритм состоит из двух компонентов. Сначала к переменным интегрирования применяется автоматическое преобразование в попытке сгладить подынтегральную функцию. Затем выполняется оценка интеграла методом Монте-Карло с использованием преобразованных переменных. Выравнивание подынтегральной функции упрощает вычисление интеграла и улучшает оценку. Преобразование, применяемое к переменным интегрирования, оптимизируется в течение нескольких итераций алгоритма: информация о подынтегральном выражении, собранная во время одной итерации, используется для улучшения преобразования, используемого в следующей итерации. Алгоритм интегрирования Монте-Карло делает несколько предположений о подынтегральном выражении — оно не обязательно должно быть ни аналитическим, ни даже непрерывным. Это делает интегрирование методом Монте-Карло необычайно надежным. Это также делает его подходящим для адаптивной интеграции. Адаптивные стратегии важны для многомерной интеграции, особенно в больших размерностях.

Интегратор `vegas` генерирует случайные точки в своем объеме интегрирования из распределения, оптимизированного для интегралов любой функции, на которой он обучался. Интегратор обеспечивает низкоуровневый доступ к генератору случайных точек через итераторы `vegas.Integrator.random()` и `vegas.Integrator.random_batch()`.

Преимущество использование интегратора VEGAS заключается в большей скорости вычисления. Для сравнения: время выполнения программы с непосредственным интегрированием по каждому бину может занимать до нескольких часов; код с использованием интегратора VEGAS даёт результаты в пределах нескольких секунд.

Основные результаты работы

В ходе работы была написана программа получающая оценку ΔN ожидаемого числа обнаруженных фотонов, интегрированных во временные ячейки за 1 нс, полученные с помощью уравнения RTE:

$$\Delta N_i^{(n)} = \prod_{k=1}^n \left(\int_0^1 d\xi_k (1 - \xi_k)^{k-1} \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{s}_k g(\hat{s}_k, \hat{s}_{k-1}) \right) \times \\ \times e^{-\mu_a c t^*} P_n(\mu_s c t^*) \varepsilon(\hat{n}^*, \hat{s}_n) \frac{n! R}{\sqrt{D}} \theta_i,$$

Чтобы проиллюстрировать производительность, точность и область применимости предлагаемого метода, мы рассмотрим следующие рабочие примеры.

Однонаправленный мгновенный источник света $s_0 = (0,0,1)$ помещается в начало координат $(0,0,0)$.

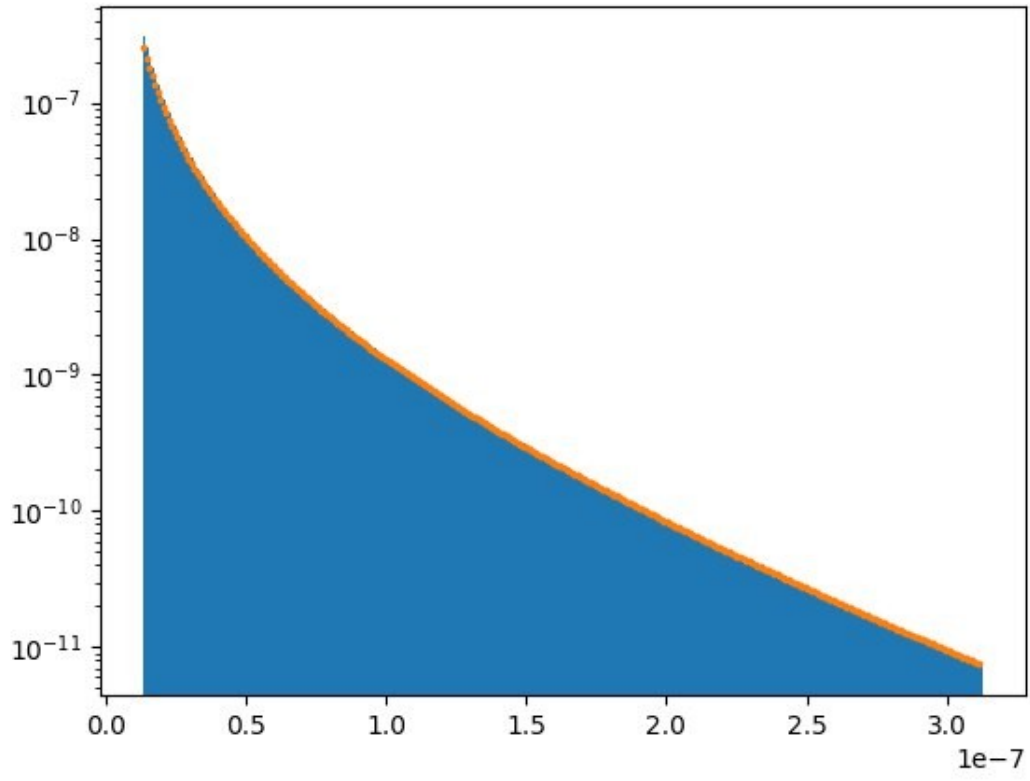
Центр сферического фотоприемника с радиусом

$R = 21$ см помещается последовательно в два различных испытательных положения следующим образом:

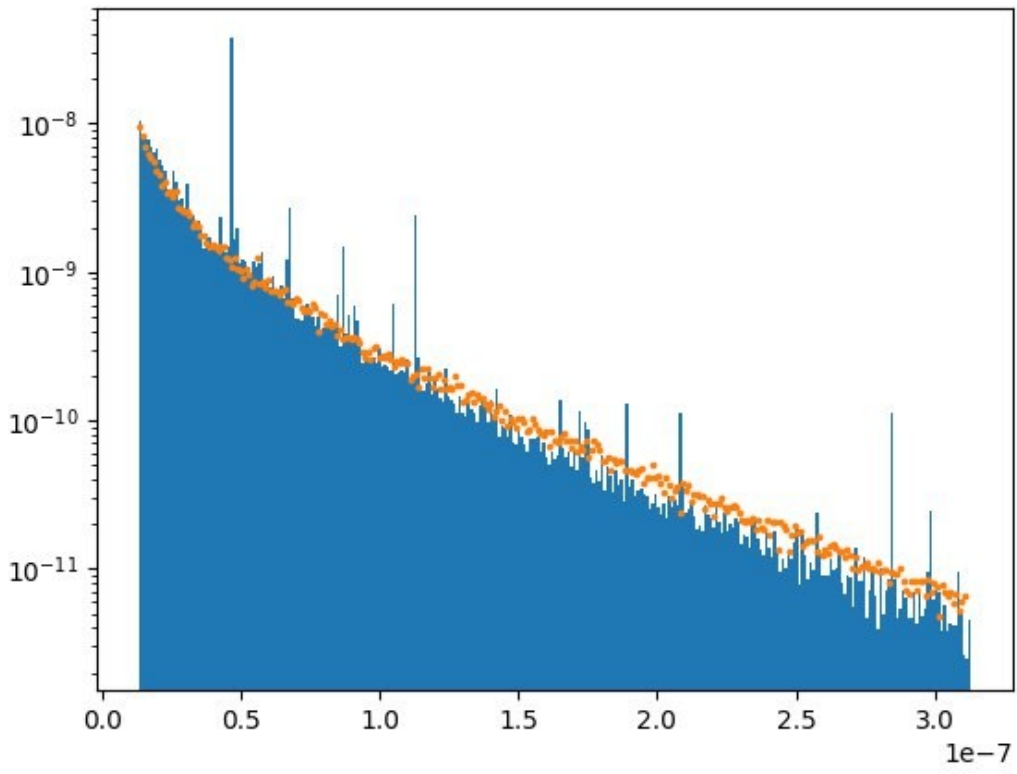
$$r_0 = (3, 0, 0)\text{м}$$

$$r_0 = (3, 0, 10)\text{м}$$

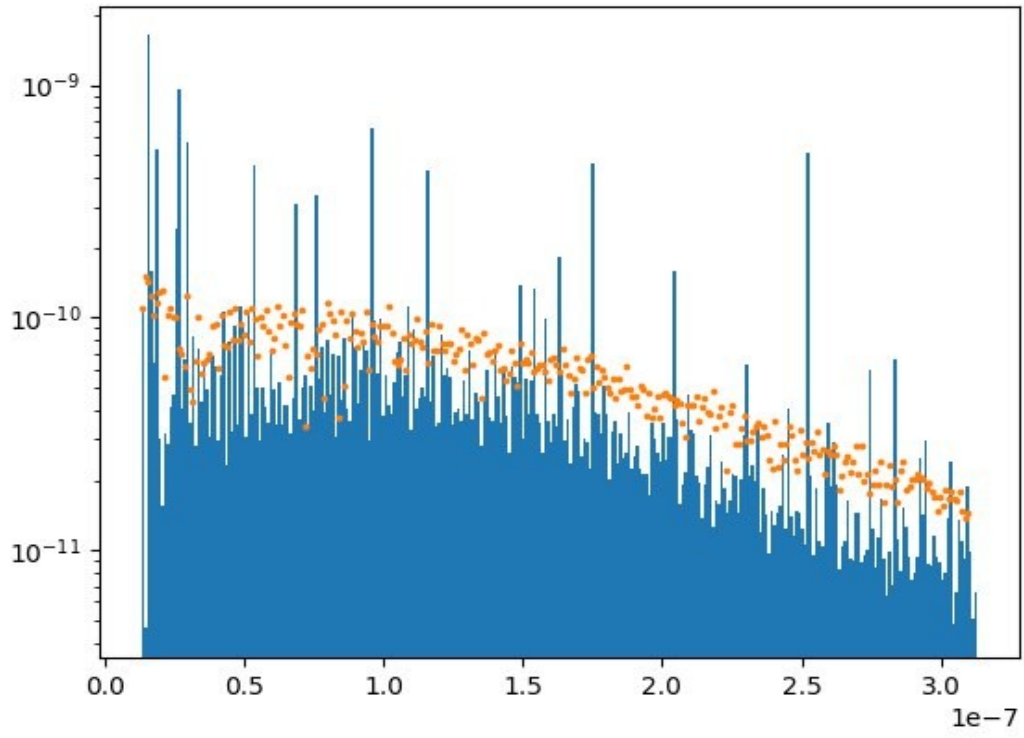
Синяя столбчатая диаграмма - оценка ΔN ожидаемого числа обнаруженных фотонов, интегрированных во временные ячейки за 1 нс, полученная методом VEGAS, оранжевые точки - оценка ΔN ожидаемого числа обнаруженных фотонов, интегрированных во временные ячейки за 1 нс, полученная непосредственным интегрированием по каждому бину.



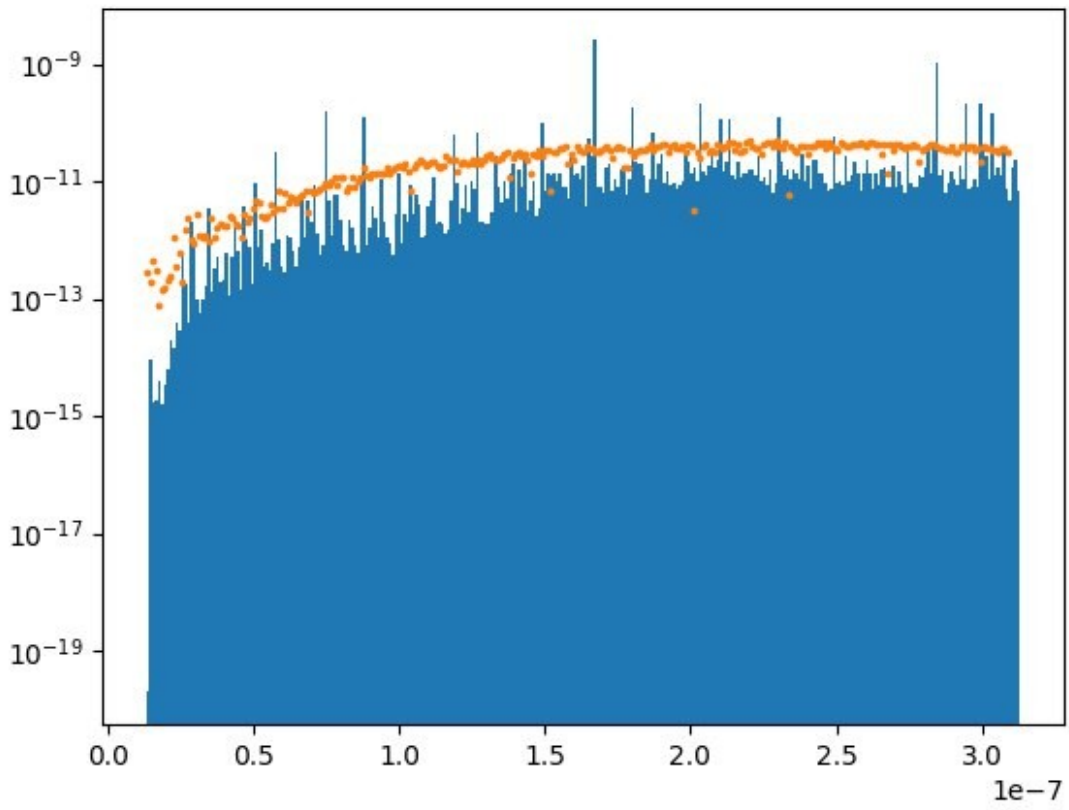
1 order $r_0 = (3, 0, 0)$



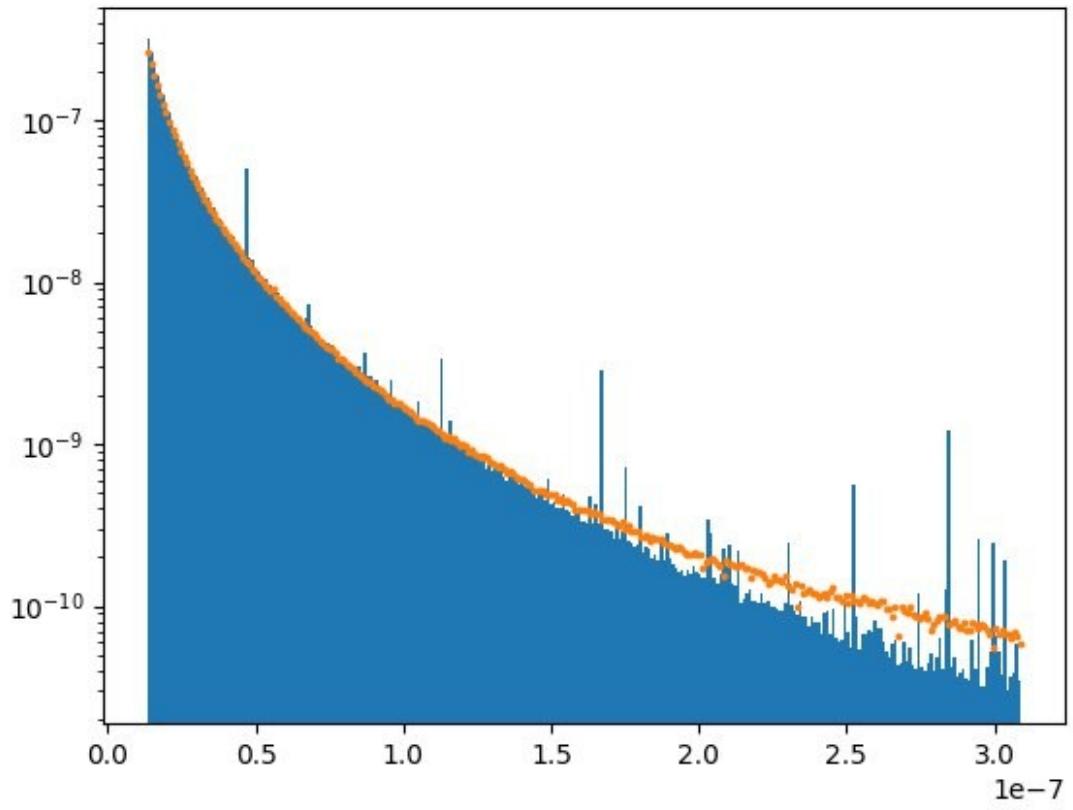
2 order $r_0 = (3, 0, 0)$



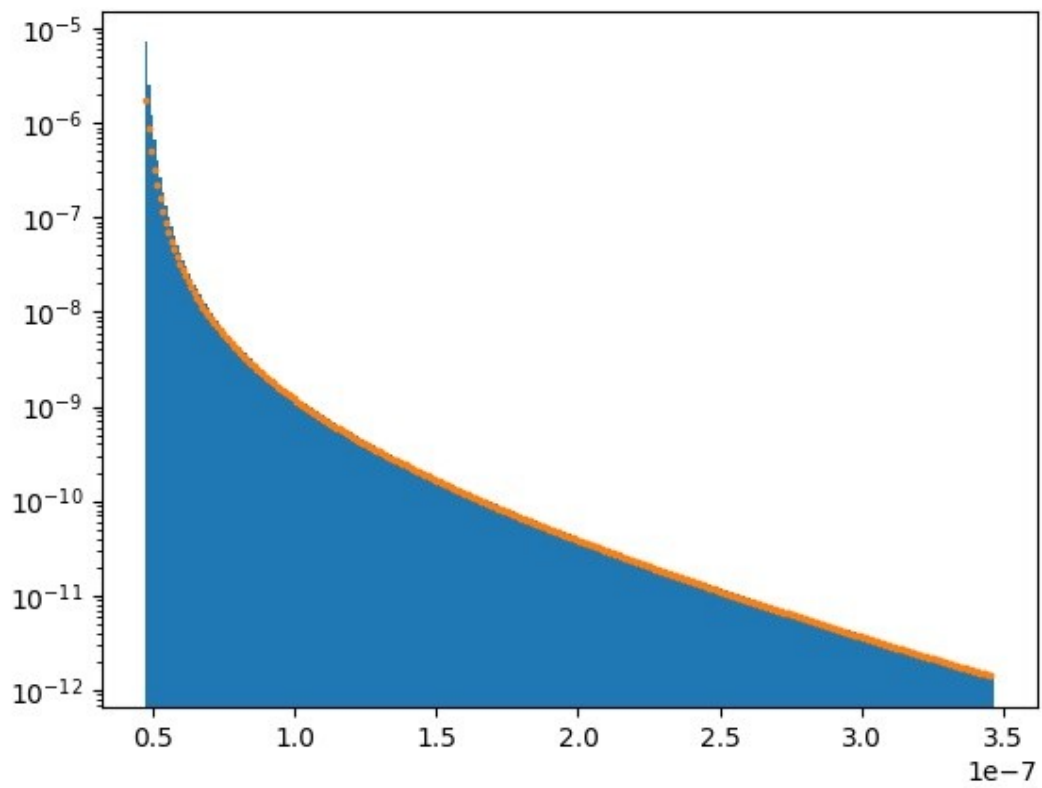
3 order $r_0 = (3, 0, 0)$



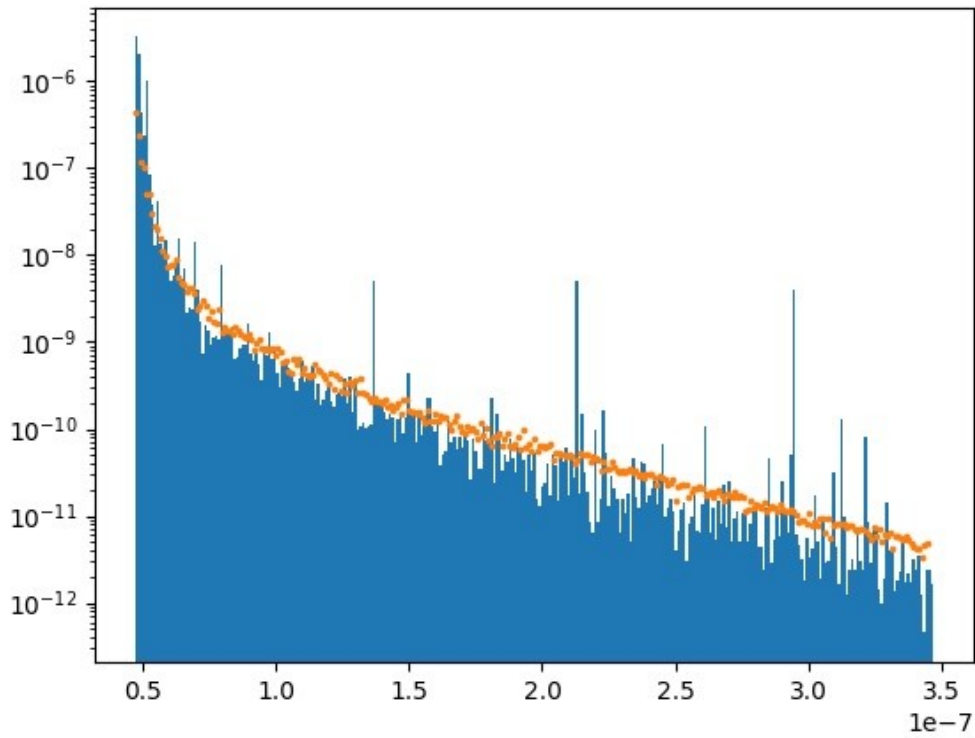
4 order $r_0 = (3, 0, 0)$



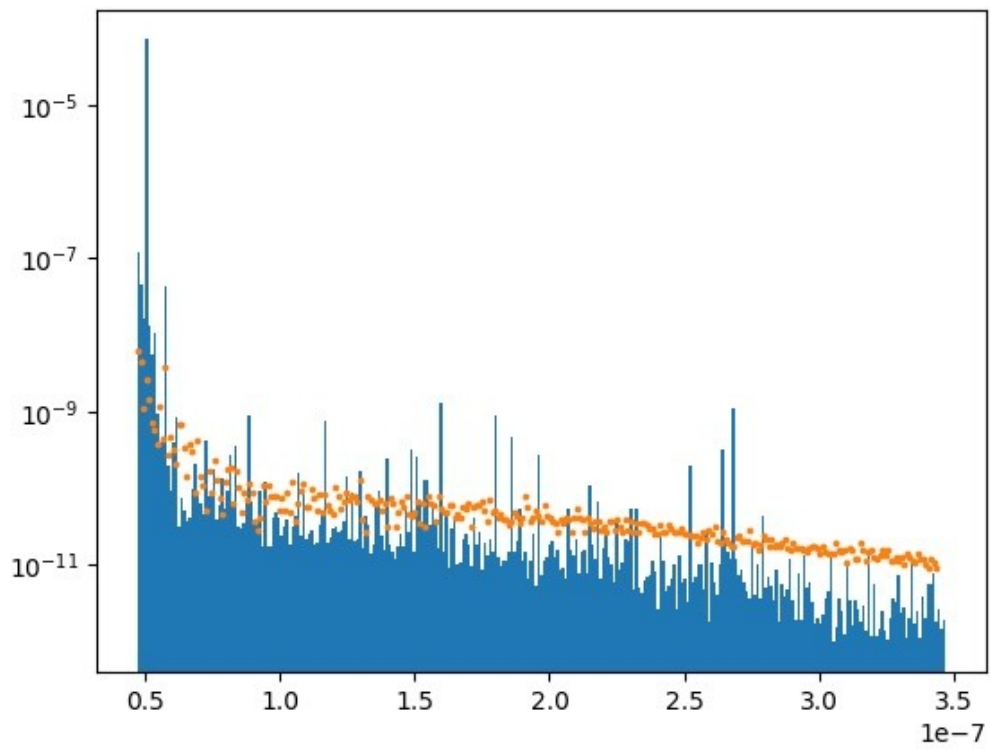
sum of orders $r_0 = (3, 0, 0)$



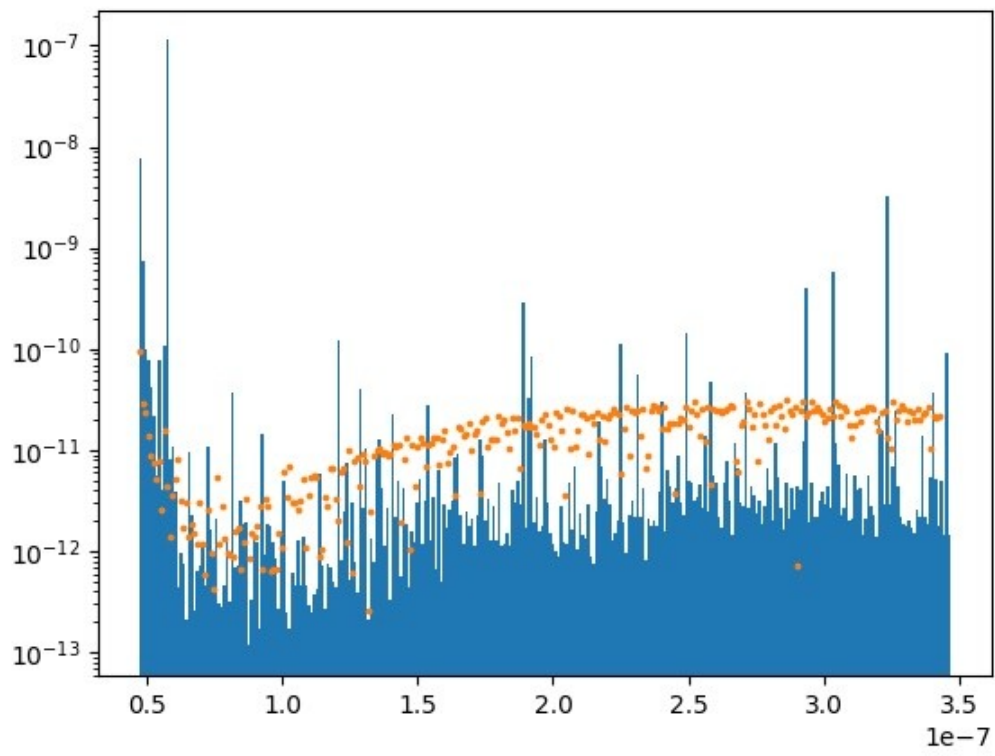
1 order $r_0 = (3, 0, 10)$



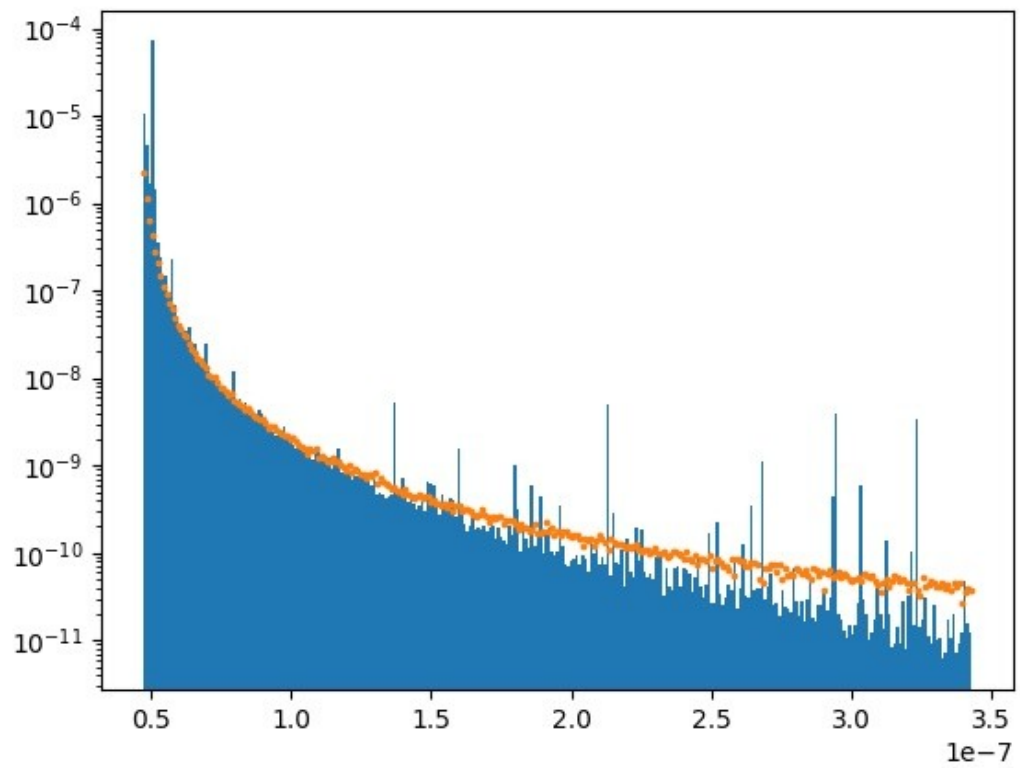
2 order $r_0 = (3, 0, 10)$



3 order $r_0 = (3, 0, 10)$



4 order $r_0 = (3, 0, 10)$



sum of orders $r_0 = (3, 0, 10)$

Выводы

В ходе работы была выполнена оптимизация кода, позволяющая получать данные результата моделирования распространения света за существенно меньшее время.

Два набора данных, полученных разными методами, отличаются между собой несильно, большего совпадения можно было бы достичь увеличением вычислительного объема, что естественно привело бы к увеличению времени работы и используемых ресурсов.

Список используемой литературы

- 1), Dmitry V. Naumov, Vladimir Allaxwerdian /The perturbation series solution of the time dependent radiative transfer equation - JINR, Dubna, Russia 2022
- 2)G. Peter Lepage. Adaptive multidimensional integration: VEGAS enhanced. J. Comput. Phys., 439:110386, 2021.
- 3)G. Peter Lepage. A New Algorithm for Adaptive Multidimensional Integration. J. Comput. Phys., 27:192, 1978.
- 4)Andr´e Liemert and Alwin Kienle. Green’s function of the time-dependent radiative transport equation in terms of rotated spherical harmonics. Phys. Rev. E, 86:036603, Sep 2012.
- 5)B.D. Ganapol. Radiative transfer with internal reflection via the converged discrete ordinates method. Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, 112(4):693 – 713, 2011. 2009 International Conference on Mathematics and Computational Methods (MC 2009).
- 6)Igor Belolaptikov et al. Neutrino Telescope in Lake Baikal: Present and Nearest Future. PoS, ICRC2021:002, 2021.