

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА»

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра физики элементарных частиц

КУРСОВАЯ РАБОТА

на тему

«Кварк-адронная дуальность в процессах образования дилептонов»

Выполнил:
студент 2 курса 218 ак. группы
Ладонин Дмитрий Дмитриевич

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
Теряев Олег Валерианович

Москва 2024

Содержание

Введение	3
1 Составная структура адронов	4
1.1 Адронные струи	4
1.2 Аномальный магнитный момент нуклонов	4
1.3 Процессы Дрелла-Яна	5
1.4 Квантовая хромодинамика	6
2 Рассеяние электрона на мюоне	7
3 Упругое рассеяние электрона на протоне. Электромагнитные формфакторы протона	8
4 Глубоко неупругое рассеяние электрона на протоне	10
5 Партоновая модель	13
6 Дуальность	18
Заключение	23
Приложение 1: Сечение рассеяния электрона на мюоне	24
Список литературы	27

Введение

Первым шагом к пониманию структуры адронов была партонная модель. Партонная модель была предложена Ричардом Фейнманом в 1969 году [2] для анализа столкновения протонов при высоких энергиях. Партонная модель объяснила результаты глубоко неупругого рассеяния электронов на протонах. Далее, после подтверждения кварковой модели, партоны отождествили с кварками и глюонами [3]. Появилась возможность описывать адроны как совокупность составляющих их кварков и глюонов. Однако в некоторых ситуациях адроны можно описывать и как единую частицу. А в некоторых ситуациях - и так, и так.

Цель работы:

Целью работы является получение связи между интервалами дуальности в процессах глубоко неупругого рассеяния и процессах Дрелла-Яна.

Задачи:

1. Сравнение сечений упругого рассеяния точечной частицы-снаряда на точечной и составной частице-мишени, а также сечения глубоко неупругого рассеяния точечной частицы-снаряда на составной частице-мишени.
2. Краткий обзор партонной модели.
3. Вычисление формфакторов протона в процессах глубоко неупругого рассеяния и в процессах Дрелла-Яна с использованием современных параметризаций партонных распределений.

1 Составная структура адронов

До кварковой гипотезы и ее подтверждения адроны считались элементарными частицами. Однако наблюдались явления, которые свидетельствовали об их составной структуре.

1.1 Адронные струи

Образование струй – наиболее интенсивный жесткий процесс, происходящий при столкновениях адронов [4, стр. 538]. Струи образуются при столкновениях наиболее энергичных партонов. Вылетающий при столкновении адронов кварк или глюон излучает глюоны и кварк-антикварковые пары. Это явление аналогично тормозному электромагнитному излучению. Особенностью образования струи является обесцвечивание первоначального партона. Так как начальный партон имеет цвет, а струя должна состоять из бесцветных адронов, нельзя построить изолированный механизм образования струи без учёта взаимодействия с другими частицами в столкновении. Механизм образования струи бесцветных адронов из нескольких цветных партонов, образовавшихся в результате эволюции струи, с учётом компенсации цвета, называют фрагментацией струи. Поскольку адроны имеют целые электрические заряды, то заряды адронных струй также должны быть целыми. Но если провести аналогичные эксперименты с образованием адронных струй и вычислить средние заряды этих струй, то получится, что их заряд оказывается дробным и совпадает с зарядами кварков, породивших эти струи [7, стр. 130-132]. Адронные струи хранят информацию о кварках, их породивших. Траектории этих адронов содержатся внутри узких конусов в направлении рассеяния первичных кварков, а энергии струй соответствуют энергиям соответствующих кварков. Эти наблюдения свидетельствуют в пользу существования кварков – составляющих адронов с дробным электрическим зарядом $\frac{1}{3}$, которые не могут быть зафиксированы, не будучи связанными в адроне.

1.2 Аномальный магнитный момент нуклонов

Если для описания состояния протона или нейтрона использовать уравнение Дирака, то вычисленные магнитные моменты этих частиц будут «неправильными». Магнитный момент протона в таком случае будет равен ядерному магнетону $e\hbar/2Mc$ (M — масса протона), а нейтрона — нулю. Согласно же экспериментальным данным, магнитный момент протона примерно в 2,8 раза больше ядерного магнетона, а магнитный момент нейтрона отрицателен и по абсолютной величине составляет примерно 1,87 ядерных магне-

тонов. Отношение магнитных моментов нейтрона и протона

$$\frac{\mu_n}{\mu_p} = -\frac{2}{3} \quad (1)$$

объясняется кварковой теорией. Разность ожидаемого и реального значений получила название аномального магнитного момента. Наличие у протона и нейтрона аномального магнитного момента свидетельствует о составной структуре протона и нейтрона. Действительно, уравнение Дирака корректно применять только к бесструктурным частицам [4, стр. 191-194].

1.3 Процессы Дрелла-Яна

Процессы Дрелла — Яна происходят при столкновениях адронов на высоких энергиях. При этом кварк одного адрона и антикварк другого адрона аннигилируют, создавая виртуальный фотон или Z-бозон, который затем распадается на пару противоположно заряженных лептонов [4, стр. 534].

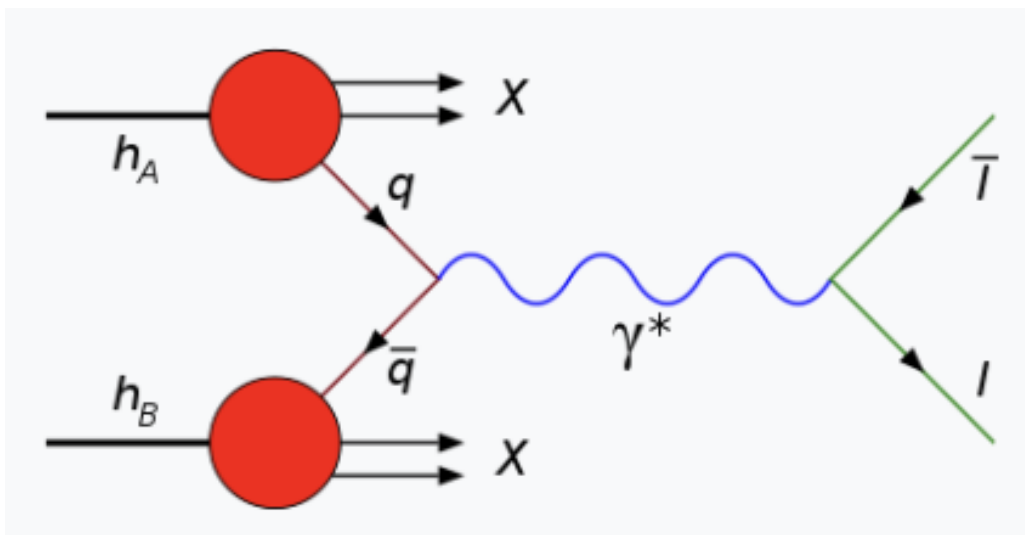


Рис. 1: Диаграмма процесса Дрелла-Яна

Дифференциальные сечения таких процессов чувствительны к партонным функциям распределений адронов [5]. Несмотря на сравнительно низкое сечение, процессы Дрелла-Яна удобны для измерений, так как освобождены от необходимости детектирования адронов в конечном состоянии [6]. Фактически, диаграмма процесса Дрелла-Яна есть не что иное, как диаграмма процесса глубоко неупругого рассеяния лептона на адроне, повернутая на 90° . Стало быть, можно ожидать от этих двух процессов схожего «поведения». Трое ученых, работавших в Дубне: Матвеев, Тавхелидзе и Мурадян – занимались исследованием процессов Дрелла-Яна.

1.4 Квантовая хромодинамика

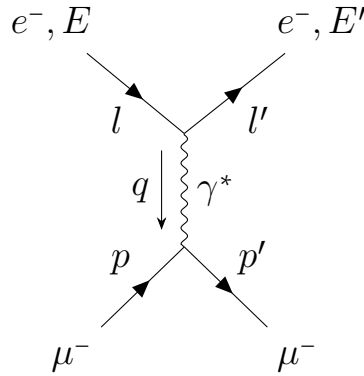
В 1963 г. Гелл-Манн и Цвейг предложили модель, объясняющую спектр сильно взаимодействующих частиц при помощи элементарных составляющих, названных кварками. Несмотря на успех исходной кварковой модели, у нее были две серьезные проблемы. Во-первых, частицы с дробным зарядом не были обнаружены. Во-вторых, спектр барионов требовал допустить, что волновая функция трех кварков полностью симметрична по отношению к изменению спина кварка и квантового числа, нумерующего аромат, что противоречило бы тому, что кварки, имея спин $1/2$ должны подчиняться статистике Ферми-Дирака. Самый простой пример этого «нарушения» – Δ^{++} -резонанс со спином $3/2$, состоящий из трех валентных u -кварков, спины которых параллельны. Проще говоря, принцип Паули был бы нарушен.

Чтобы разрешить противоречие между спектром барионов в кварковой модели и теоремой о связи спина со статистикой, Хан и Намбу, Гринберг и Гелл-Манн, а также независимо от них Н.Боголюбов, Б.Струмминский и А.Тавхелидзе предположили, что кварки несут дополнительное, ненаблюдаемое квантовое число, которое они назвали цветом. Простейшая модель цвета приписывает кваркам в фундаментальном представлении новую внутреннюю глобальную $SU(3)$ -симметрию, которая, согласно первой теореме Нётер, означает существование нового закона сохранения.

Как и исходная кварковая модель, гипотеза о цвете была феноменологически оправдана, но привела к новым вопросам: почему кварки должны иметь такое, кажущееся искусственным свойство, и какой механизм обеспечивает то, что все адронные волновые функции являются синглетами по цвету (проще говоря, «обесцвеченными»)? Ответы на эти вопросы пришли из экспериментов по глубоко неупругому рассеянию и из поисков теории партонов, связанных в адроны механизмом асимптотической свободы. После того, как было обнаружено, что неабелевы калибровочные теории обладают свойством асимптотической свободы, осталось выбрать калибровочную группу и определиться с представлением фермионов. В качестве калибровочной группы была принята $SU(3)$, так как другой очевидной интерпретации для цветовой симметрии не было. Эти соображения привели к модели сильных взаимодействий как системы кварков разных ароматов, принадлежащих фундаментальному представлению локальной калибровочной группы $SU(3)$. Согласно второй теореме Нётер, наличие локальной калибровочной симметрии означает наличие ранее неизвестного вида взаимодействия – сильного взаимодействия. Кванты калибровочного поля $SU(3)$, названные глюонами, как раз и переносят это взаимодействие, а модель известна под названием квантовой хромодинамики, или КХД [4, стр. 517-520]. Примечательно, что кванты сильного поля отличает возможность самодействия – глюоны также несут заряд сильного взаимодействия. Важность КХД можно выразить хотя бы тем фактом, что именно она ответственна за большую часть массы протона.

2 Рассеяние электрона на мюоне

Поскольку одна из задач этой работы - изучение структуры адронов, то есть смысл начать с примера, с которым можно будет сравнивать последующие результаты. Удобно рассмотреть процесс рассеяния электрона на мюоне, так как мюон бесструктурен, а потому мюонный ток будет выглядеть наиболее просто. Ко всему прочему, мюон, как и нуклон, имеет спин $1/2$, что также удобно для последующего сравнения сечения рассеяния на мюоне с сечениями рассеяния на протоне. Диаграмма процесса имеет вид:



Процесс вычисления сечения представлен в [приложении 1](#). Теперь, интегрируя полученный результат по dE' , окончательно для дифференциального сечения получаем:

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{lab} = \left(\frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4(\theta/2)} \right) \cdot \frac{E'}{E} \cdot \left[\cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{Q^2}{2m^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right], \quad (2)$$

где фактор

$$\frac{E'}{E} = \frac{1}{1 + (2E/m) \sin^2(\theta/2)} \quad (3)$$

возникает из-за отдачи.

3 Упругое рассеяние электрона на протоне. Электромагнитные формфакторы протона

Как уже было отмечено выше, адроны - частицы с внутренней структурой. Это обстоятельство делает некорректным рассмотрение процессов с их участием как процессов взаимодействия с точечными частицами. Чтобы учесть «неточечность» адронов, вводятся т.н. формфакторы.

По определению, данному в большой российской энциклопедии [8], электромагнитный формфактор — это функция, характеризующая пространственное распределение электрического заряда (электрический формфактор) и магнитного момента (магнитный формфактор) внутри атома, атомного ядра или элементарной частицы. Термин заимствован из теории рассеяния рентгеновских лучей на атомах, где им обозначается множитель в амплитуде рассеяния, зависящий от передаваемого импульса и определяемый распределением электронов. Для «точечного» атома электрический формфактор был бы тождественно равен 1, а магнитный — 0.

Чтобы математически ввести формфакторы, рассмотрим элемент оператора тока, который содержится в матричном элементе взаимодействия

$$\langle p_2 | J_\mu | p_1 \rangle. \quad (4)$$

В силу релятивистской и калибровочной инвариантности в наиболее общем виде он может быть записан так:

$$\langle p_2 | J_\mu | p_1 \rangle = \bar{u}_2 \left(\gamma_\mu \Phi_1 + \frac{1}{2} (\gamma_\mu \hat{q} - \hat{q} \gamma_\mu) \Phi_2 \right) u_1, \quad (5)$$

где u_1 и u_2 - дираковские спиноры, соответствующие начальному и конечному, скажем, протонам с импульсами p_1 и p_2 , q — как и всюду ранее — переданный импульс. Функции Φ_1 и Φ_2 зависят только от q^2 . Чаще рассматривают линейные комбинации Φ_1 и Φ_2 , например:

$$G_E = \Phi_1 + \frac{q^2}{2m} \Phi_2 \quad (6)$$

$$G_M = \Phi_1 + 2m \Phi_2. \quad (7)$$

Заметим, что при $q^2 \rightarrow 0$ Φ_1 равен заряду, т.е. для протона $\Phi_1(0) = 1$, а для нейтрона $\Phi_1(0) = 0$; Формфактор Φ_2 равен аномальному магнитному моменту. Поэтому $G_E(0) = 1$ для протона и $G_E(0) = 0$ для нейтрона. $G_M = \mu$ дает полный магнитный момент [1, стр. 152].

Можно провести вывод, аналогичный описанному в [приложении 1](#) и для рассеяния электрона на протоне, меняя «мюонный» ток $\bar{u}_\mu(p_2) \gamma^\nu u_\mu(p_1)$ на адронный ток вида (5). Сечение в лабораторной системе будет иметь вид:

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{lab} = \left(\frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4(\theta/2)} \right) \cdot \frac{E'}{E} \cdot \left[\frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1 + \tau} \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2\tau G_M^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right], \quad (8)$$

где

$$\frac{E'}{E} = \frac{1}{1 + (2E/m) \sin^2(\theta/2)}; \quad \tau = \frac{Q^2}{4m^2}. \quad (9)$$

Формулу (8) приятно называть формулой Розенблюта [1, стр. 153].

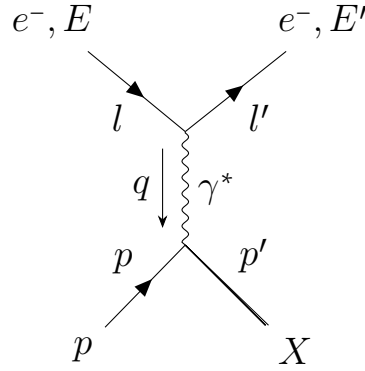
Забегая вперед, скажу, что сравнив формулу (8) с формулой (22), для упругого рассеяния электрона на протоне можно получить следующую связь между структурными функциями и формфакторами:

$$W_1 = \tau G_M^2 \cdot \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2m}\right) \quad (10)$$

$$W_2 = \frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1 + \tau} \cdot \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2m}\right). \quad (11)$$

4 Глубоко неупругое рассеяние электрона на протоне

Теперь рассмотрим глубоконеупругое рассеяние электрона на протоне, причем рассматривать будем только электромагнитное взаимодействие [9, глава 6]. Сечения будем суммировать по всевозможным конечным адронным состояниям, т.е. рассматривать инклюзивное сечение. Будем также считать, что энергия налетающего электрона намного превосходит массу мишени, поэтому, как и в случае рассеяния на мюоне, массой электрона будем пренебрегать. Матричный элемент рассеяния будем считать в первом порядке по константе связи (т.е. рассматривать будем только процесс, изображенный на диаграмме ниже – процесс с минимальным количеством вершин):



Лагранжиан электромагнитного взаимодействия можно записать в терминах адронного и лептонного токов¹:

$$\mathcal{L}_{int} = -eA_\mu (J_{lep}^\mu + J_{had}^\mu), \quad (12)$$

где лептонный ток имеет вид:

$$J_{lep}^\mu = \bar{u}(l') \gamma^\mu u(l). \quad (13)$$

Для матричного элемента будем иметь:

$$iM = \frac{(-ie)^2(-i)}{q^2} \cdot \bar{u}_e(l') \gamma^\mu u_e(l) \times \langle X | J_\mu^{had} | p \rangle. \quad (14)$$

Аналогично рассеянию на мюоне получим $|M|^2$. Проведя усреднение по поляризациям и суммирование по всевозможным конечным состояниям X , получим:

$$\frac{1}{4} \sum_{pol.} |M|^2 = \frac{e^4}{4(Q^2)^2} Tr [\hat{l}' \gamma^\mu \hat{l} \gamma^\nu] \times \sum_X \langle X | J_\mu^{had} | p \rangle \cdot [\langle X | J_\nu^{had} | p \rangle]^* \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p+q-p'). \quad (15)$$

¹В лагранжиане КЭД за взаимодействия отвечают части ковариантной производной, содержащие 4-потенциалы. Остальные члены лагранжиана соответствуют свободным полям.

Это выражение представляет собой свертку лептонного тензора

$$L^{\mu\nu} = Tr [\tilde{l}' \gamma^\mu \hat{l} \gamma^\nu] \quad (16)$$

с адронным тензором

$$H_{\mu\nu} = \sum_X \langle X | J_\mu^{had} | p \rangle \cdot [\langle X | J_\nu^{had} | p \rangle]^* \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p + q - p'). \quad (17)$$

Адронный тензор не зависит от конечных состояний, так как по ним производится суммирование. Таким образом, $H_{\mu\nu} \equiv H_{\mu\nu}(p, q)$. Можно показать, что верны соотношения (они являются следствием сохранения электромагнитного тока):

$$q^\mu H_{\mu\nu} = 0 \quad (18)$$

$$q^\nu H_{\mu\nu} = 0, \quad (19)$$

а также, если р-четность сохраняется, то адронный тензор симметричен:

$$H_{\mu\nu} = H_{\nu\mu}. \quad (20)$$

Используя свойства (18)-(20), можно получить общее представление $H_{\mu\nu}$:

$$\frac{1}{8\pi} H_{\mu\nu} = \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) W_1(Q^2, \nu) + \frac{1}{m^2} \left(p_\mu - q_\mu \frac{p \cdot q}{q^2} \right) \left(p_\nu - q_\nu \frac{p \cdot q}{q^2} \right) W_2(Q^2, \nu). \quad (21)$$

Здесь W_1 и W_2 – функции от лоренцевых инвариантов Q^2 и $p \cdot q = \nu$. Аналогичной процедурой, использованной при рассмотрении рассеяния электрона на мюоне, получается сечение глубоко неупругого рассеяния электрона на протоне:

$$\frac{d\sigma}{dE' d\Omega} = \frac{4\alpha^2 E'^2}{Q^4} \left[\cos^2 \frac{\theta}{2} \cdot W_2(Q^2, \nu) + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cdot W_1(Q^2, \nu) \right]. \quad (22)$$

Теперь мы можем сравнить эту формулу с полученной ранее для рассеяния электрона на мюоне. Поэтому в случае упругого рассеяния на точечных частицах для т.н. структурных функций W_1 и W_2 получим безразмерные выражения:

$$2mW_1(Q^2, \nu) = \frac{Q^2}{2m\nu} \cdot \delta \left(1 - \frac{Q^2}{2m\nu} \right) \quad (23)$$

$$\nu W_2(Q^2, \nu) = \delta \left(1 - \frac{Q^2}{2m\nu} \right). \quad (24)$$

Теперь выясним, в каких пределах изменяются ν и Q^2 . Для этого обратимся к кинематике:

$$p + l = p' + l' \Rightarrow p + q = p' \Rightarrow (p + q)^2 = p'^2.$$

С учетом

$$(p + q)^2 = m^2 + 2m\nu - Q^2 = p'^2 \geq m^2$$

получаем пределы для Q^2 и ν :

$$0 \leq Q^2 \leq 2m\nu$$

$$\nu = E - E' \Rightarrow 0 \leq \nu \leq E.$$

Удобно ввести безразмерную переменную:

$$x = \frac{Q^2}{2m\nu}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (25)$$

а также безразмерные функции (которые также называют структурными):

$$F_1(x, Q^2) = mW_1(Q^2, \nu) \quad (26)$$

$$F_2(x, Q^2) = \nu W_2(Q^2, \nu). \quad (27)$$

Из формул (23) и (24) для «новых» структурных функций можно получить выражения:

$$F_1(x, Q^2) = \frac{Q^2}{4m\nu} \delta\left(1 - \frac{Q^2}{2m\nu}\right) = \frac{1}{2}x \cdot \delta(1 - x) \quad (28)$$

$$F_2(x, Q^2) = \nu \cdot \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2m}\right) = \delta(1 - x). \quad (29)$$

Если бы протон был бесструктурным, то разумно было бы ожидать

$$F_i(x, Q^2) \rightarrow 0 \text{ при } Q^2 \rightarrow \infty, \quad (30)$$

так как при росте Q^2 лептон «пробует» все меньшую часть адрона (порядка $1/Q$). Экспериментально же было обнаружено, что

$$F_i(x, Q^2) \xrightarrow{Q^2 \rightarrow \infty} F_i(x). \quad (31)$$

Это явление получило название скейлинга Бьёркена. В частности, чтобы объяснить скейлинг, была предложена партонная модель.

Замечание. В общем случае структурные функции F_1 и F_2 могут в явном виде зависеть и от Q^2 . Но так как мы рассматривали процесс глубоко неупругого рассеяния, то Q^2 велико, поэтому мы попадаем в область скейлинга, где присутствует только явная зависимость от x .

5 Партонная модель

Рассмотрим партонную модель в пределе скейлинга ($Q^2 \rightarrow \infty$). Основной идеей партонной модели является рассмотрение процессов рассеяния частиц-снарядов на адронах как их рассеяние на точечных составляющих адронов – партонах, которые считаются точечными частицами. Если рассматривать рассеяние, скажем, электрона на протоне, то делая Q^2 большим, время взаимодействия становится меньшим. Таким образом можно добиться настолько малого времени взаимодействия, что оно будет меньше характерного времени взаимодействия партонов внутри протона, поэтому процесс рассеяния электрона на протоне можно рассматривать как рассеяние электрона на точечных и свободных составляющих протона – партонах.

Теперь зададимся вопросом выбора наиболее удобной системы отсчета. На самом деле, в рассматриваемой ситуации удобно перейти в систему отсчета, где адрон-мишень летит с большим импульсом. Ясно, что импульс адрона складывается из импульсов партонов.

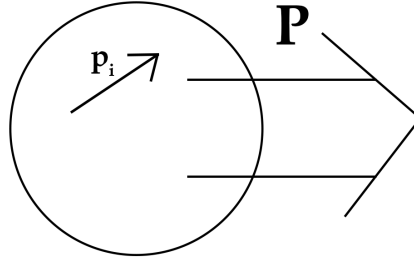


Рис. 2: Партоны в протоне

Каждый партон в адроне несет некоторую долю его импульса \vec{p}_i , причем $\vec{p}_i = \vec{p}_i^{\parallel} + \vec{p}_i^{\perp}$. Большой импульс адрона позволяет считать \vec{p}_i^{\perp} малым. То есть партоны можно, помимо прочего, считать движущимися в одном направлении – в направлении движения самого адрона. Это означает, что $p_i \sim p$. Зададим долю импульса, которую несет партон:

$$p_i = \xi p. \quad (32)$$

Массу партона также можно ввести через долю ξ от массы адрона:

$$m_{part}^2 = p_{part}^2 = \xi^2 p^2 = \xi^2 m^2 \Rightarrow m_{part} = \xi m. \quad (33)$$

Также в партонной модели вводят т.н. партонные функции распределения $f_i(\xi)$, которые отражают вероятность найти в адроне партон типа i с долей

импульса ξ :

$$dN_i = f_i(\xi)d\xi, \quad (34)$$

а так как все доли импульса должны сложиться в единицу, то верно соотношение:

$$\sum_{i'} \int_0^1 \xi f_i(\xi)d\xi = 1, \quad (35)$$

где сумма по i' означает сумму по всем партонам, в том числе и по незаряженным.

Также удобно ввести другую функцию - функцию $f(\xi)$ -, которая при проведении вычислений позволит избежать необходимости суммировать по типам партонов и взвешивать соответствующие функции с квадратом заряда e_i (в единицах элементарного) соответствующего партона:

$$f(\xi) := \sum_i e_i^2 f_i(\xi). \quad (36)$$

В рамках партонной модели рассеяние на партонах упругое. Для того, чтобы в этой модели посчитать сечение рассеяния, скажем, электрона на протоне, необходимо:

1. Вычислить сечение упругого рассеяния электрона на партоне типа «i»
2. Умножить его на партонную функцию распределения $f_i(\xi)$ и проинтегрировать по долям импульса
3. Просуммировать результат по всем типам партонов в адроне:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega d\theta}(ep \rightarrow eX) = \sum_i \int_0^1 d\xi f_i(\xi) \cdot \frac{d\sigma}{d\Omega d\theta}(eq_i \rightarrow eq_i). \quad (37)$$

В случае столкновения электрона с партоном, несущем долю ξ импульса и единичный электрический заряд, безразмерные структурные функции (28) и (29) принимают вид:

$$F_1(x) = \frac{Q^2}{4(\xi m)\nu} \delta\left(1 - \frac{Q^2}{2(\xi m)\nu}\right) = \frac{x}{2\xi} \cdot \delta\left(1 - \frac{x}{\xi}\right) \quad (38)$$

$$F_2(x) = \nu \cdot \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2(\xi m)}\right) = \delta\left(1 - \frac{x}{\xi}\right). \quad (39)$$

Теперь, суммируя (38) и (39) по типам партонов, взвешивая с квадратами зарядов (в единицах элементарного) и интегрируя по долям импульсов, по-

лучим:

$$F_{2\Sigma}(x) = \sum_i \int_0^1 d\xi e_i^2 f_i(\xi) F_2(x) = \int_0^1 d\xi f(\xi) F_2(x) = \int_0^1 d\xi \cdot f(\xi) \xi \cdot \delta(\xi - x) = x f(x) \quad (40)$$

$$F_{1\Sigma}(x) = \sum_i \int_0^1 d\xi e_i^2 f_i(\xi) F_1(x) = \int_0^1 d\xi f(\xi) F_1(x) = \int_0^1 d\xi f(\xi) \cdot \frac{x}{2\xi} \cdot \delta(\xi - x) = \frac{1}{2} f(x). \quad (41)$$

Фактически, дельта-функция в этих выражениях означает, что виртуальный фотон может быть поглощен только партоном с «правильным» значением x [9, стр. 229]. Оказалось, что доля импульса ξ тождественна безразмерной кинематической переменной, которая была введена для виртуального фотона:

$$x = \frac{Q^2}{2m\nu} \equiv \xi. \quad (42)$$

В силу связи функций F_i с W_i приходим к:

$$\nu W_2(Q^2, \nu) = x f(x) \quad (43)$$

$$2m W_1(Q^2, \nu) = f(x). \quad (44)$$

Формулы (43) и (44) выражают соотношение Каллана-Гросса [1, стр. 181]:

$$\nu W_2(Q^2, \nu) = Q^2 W_1(Q^2, \nu). \quad (45)$$

Или, что то же самое:

$$F_{2\Sigma}(x) = 2x F_{1\Sigma}(x). \quad (46)$$

Сделаем важное замечание о спинах частиц-партонов. Если повторить вычисления сечений, считая заряженные партоны скалярными, мы получили бы $F_1 \equiv 0$, что противоречило бы экспериментальным данным. Это противоречие дало основание для предположения, что все заряженные партоны суть фермионы. Если же считать, что все заряженные партоны несут фундаментальный заряд $\pm e$, то оказалось бы, что на долю заряженных партонов приходится около 18% импульса [1, стр. 184]:

$$\int_0^1 x f(x) dx = 0.18 \pm 0.01, \quad (47)$$

что означало бы, что около 82% импульса адрона достается незаряженным партонам. Можно достичь большей доли импульса, уносимой заряженными партонами, если предположить, что заряд таких партонов дробный и равен

$\pm 2/3$ или $\pm 1/3$. Однако и в такой теории часть (а именно, около 46%) импульса должна уноситься безмассовыми векторными частицами - глюонами. На сегодняшний день сомнений в том, что партоны суть кварки и глюоны, нет.

Проведем некоторые качественные рассуждения, касающиеся области вблизи $x = 1$. Предположим, что протон до взаимодействия с электроном представлял собой два партона с малым импульсом и два с большим. После взаимодействия виртуального фотона с партоном, несущем долю импульса x_1 , конфигурация партонов изменится:

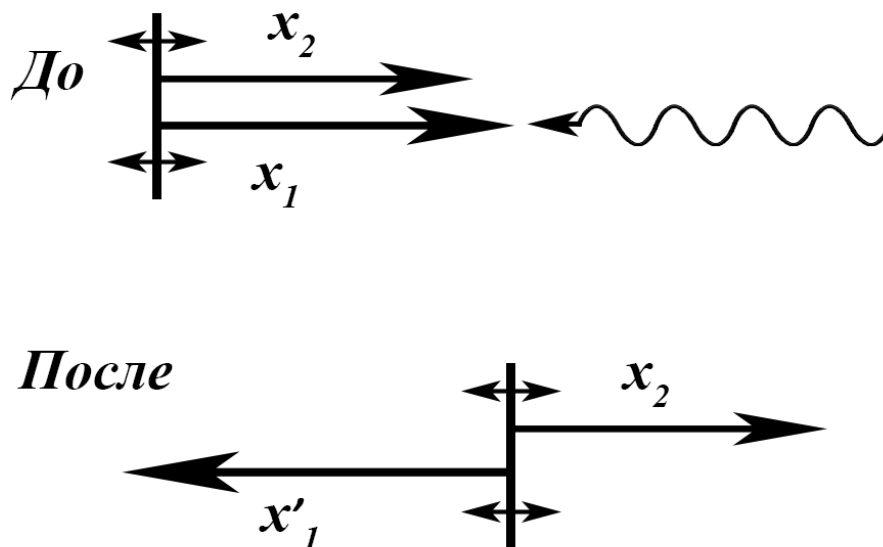


Рис. 3

Однако то, что после взаимодействия будет двигаться налево, не может быть протоном, так как масса протона равна квадрату его импульса P^2 , а в такой конфигурации один из партонов будет двигаться назад и для получения нормальной массы протона потребуются дополнительная энергия связи порядка P^2 [1, стр. 187].

Из таких рассуждений можно сделать вывод, что для наблюдения упругого рассеяния необходимо, чтобы взаимодействие происходило с партоном, который несет почти весь импульс адрона, т.е. у которого $x \approx 1$ (такой же вывод был сделан в [приложении 1](#), но математически). При столкновении этот партон разворачивается, и есть вероятность после взаимодействия обнаружить именно протон:

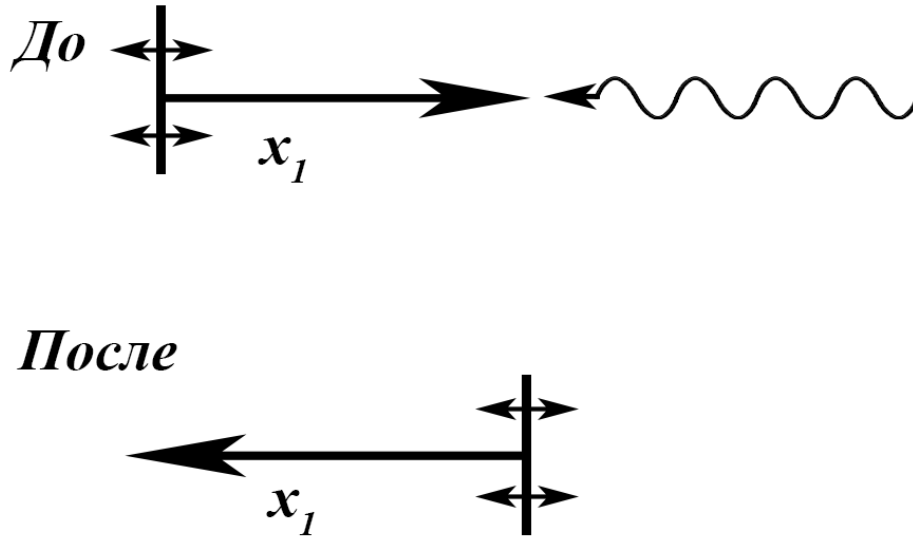


Рис. 4

Проведя некоторые рассуждения, можно показать, что при больших Q^2 вероятность того, что протон выглядит как партон с $x \approx 1$, а остальные партонны имеют долю импульса ниже некоторой x_0 порядка $1/Q$, меняется как $Q^{-\gamma}$, где γ немного больше 4. Поэтому и электромагнитные формфакторы должны спадасть по такому же закону при росте Q^2 вблизи $x = 1$ [1, стр. 186-189]. Это также означает, что при $P \rightarrow \infty$ и $Q^2 \rightarrow \infty$ формфактор протона спадает до нуля и вероятность, что протон выглядит как один единственный партон, равна нулю. Это происходит из-за того, что ни один партон не имеет в точности таких же квантовых чисел, как протон. Однако более убедительное объяснение этого в том, что вероятность обнаружить партон, не окруженный полями, порожденными взаимодействием с ним, равна нулю [1, стр. 189]. Анализ показывает, что при $x \approx 1$ партонная функция распределения должна подчиняться степенному закону:

$$f(x) \sim (1-x)^{\gamma-1}. \quad (48)$$

Примечательно, что сечения рождения резонансов спадают примерно с той же степенью Q при росте Q^2 , что и пик упругого рассеяния. Посмотрим, какие результаты можно получить, считая что сечения рождения резонансов падают с той же степенью Q , как и пик упругого рассеяния при росте Q^2 .

6 Дуальность

Проанализируем качественно график νW_2^{II} при заданном большом значении Q^2 в зависимости от $M_X^2 - M^2 = 2M\nu(1-x) \approx Q^2(1-x)$ при $x \approx 1$. На этом графике будет набор резонансов, пик упругого рассеяния и «хвост» функции $f(x)$.

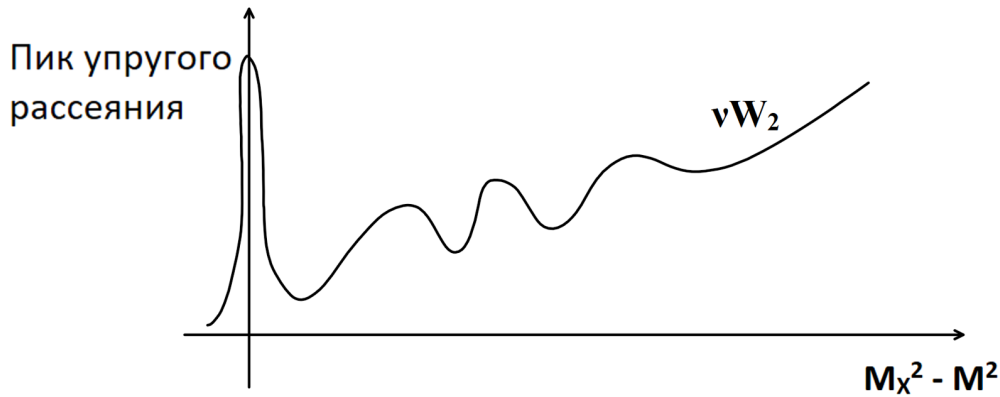


Рис. 5

Важно то, что и пик упругого рассеяния, и резонансы, и «хвост» падают по одинаковому степенному закону. Таким образом отношение фона к резонансам не меняется. Это значит, что при росте Q^2 отношение резонансов к фону не меняется, что делает невозможным ни выделить резонансы из фона, ни «утопить» их. Или другими словами: фон можно интерпретировать либо как перекрытие резонансов, либо как сумму «хвостов» $f(x)$ резонансов. Таким образом это явление позволяет использовать два описания «фона»: рассмотрение его как континуума одночастичных состояний, приводящего к результатам, предсказываемым скейлингом, или как совокупности большого числа резонансов. Причем в области больших $M_X^2 - M^2$ нет возможности определить, какое описание корректно [1, стр. 193].

Введем понятие интервала дуальности. На рис.5 изображена физическая кривая, которая, в силу (43) соответствует $f(x)$ в рамках партонной модели. В предыдущем разделе был упомянут степенной закон (48), которому, согласно партонной модели, подчиняется $f(x)$. Нанесем эту кривую на график:

^{II}Напомним, что в пределе скейлинга и вблизи $x=1$ верно соотношение: $\nu W_2 = xf(x) \approx f(x)$

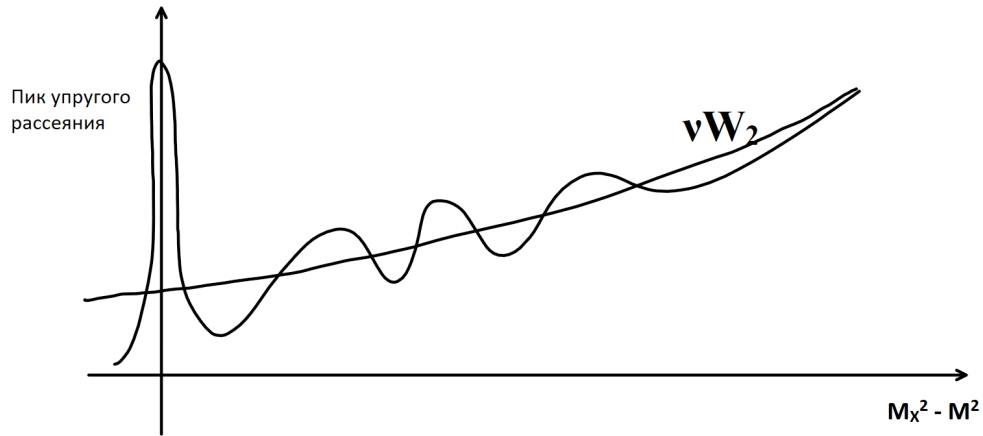


Рис. 6

Под интервалом дуальности будем понимать интервал, по которому надо проинтегрировать кривые, чтобы результат для обеих совпал. Определим интервал дуальности для пика упругого рассеяния следующим образом:

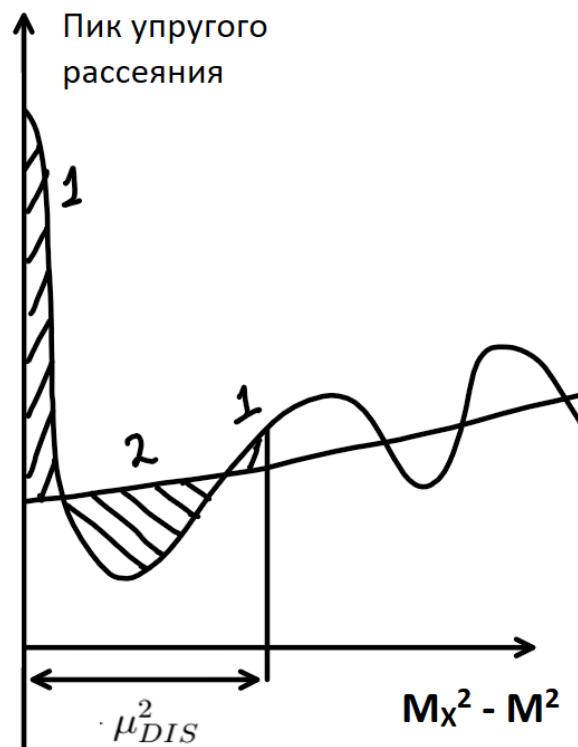


Рис. 7

где должно выполняться $S_1 = S_2$. Аналогично можно ввести интервал дуальности и для резонанса:

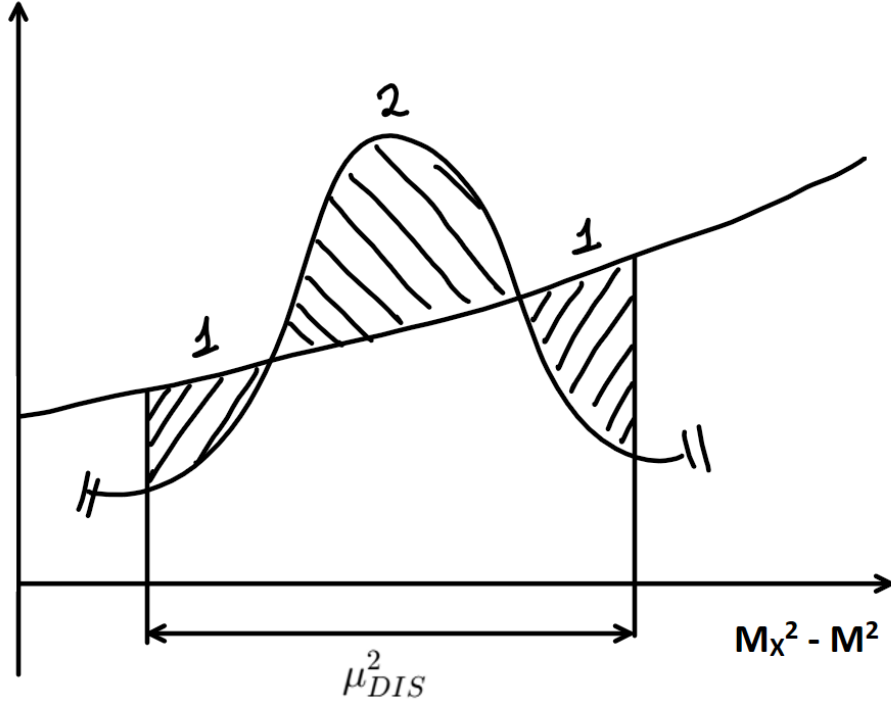


Рис. 8

Теперь получим связь между интервалами дуальности в процессах рассеяния и процессах Дрелла-Яна - интервалов, в пределах которых верны оба подхода. Для начала рассмотрим инварианты этих процессов. При глубоко неупругом процессе рассеяния инвариантна величина:

$$(P + q)^2 = (P_f + \delta P_{DIS})^2 = (M + \mu_{DIS})^2, \quad (49)$$

где P - импульс протона до рассеяния, P_f - импульс конечного адрона, δP_{DIS} - добавка к P_f , обеспечивающая равенство, а μ_{DIS} - добавка к массе протона M , обеспечивающая равенство. Раскрыв скобки в правой и левой части (49), получим:

$$P^2 + 2Pq - Q^2 = M^2 + 2M\mu_{DIS} + \mu_{DIS}^2 \quad (50)$$

Пренебрегая μ_{DIS}^2 по сравнению с M^2 и учтя $x \equiv Q^2/2pq$, а также близость x к единице на границе между упругим и неупругим рассеянием, получим:

$$Q^2(1 - x) = 2M\mu_{DIS} \quad (51)$$

Отклонение x от единицы обозначим так:

$$\delta_{DIS} := 1 - x \quad (52)$$

Тогда:

$$\delta_{DIS} = \frac{2M\mu_{DIS}}{Q^2} \quad (53)$$

Аналогичные рассуждения можно провести и для процессов Дрелла-Яна с протоном и антипротоном с похожими допущениями:

$$(P_1 + P_2)^2 = (q + \delta P_{DY})^2, \quad (54)$$

где P_1 и P_2 - импульсы начальных протона и антипротона, δP_{DY} - добавка к переданному импульсу q , обеспечивающая равенство. Вводя новую переменную $\tau = Q^2/s$ и обозначая $\delta_{DY} \equiv 1 - \tau$ можно получить выражение, аналогичное (53) [11]:

$$\delta_{DY} = \frac{2\mu_{DY}}{Q} \quad (55)$$

Согласно [11], формфакторы в рассматриваемых процессах могут быть вычислены так:

$$F_{SL}^2 \sim \int_0^{\delta_{DIS}} d\bar{x} f(\bar{x}) \quad (56)$$

$$F_{TL}^2 \sim \int_0^{\delta_{DY}} d\tau \int_0^1 \int_0^1 d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 f(\bar{x}_1) f(\bar{x}_2) \cdot \delta(\tau - \bar{x}_1 - \bar{x}_2) \quad (57)$$

Рассмотрим приближение, в котором доминируют процессы с участием u -кварка. Тогда партонная функция распределения примет вид:

$$f(\bar{x}) = \frac{4}{9} u(\bar{x}) \quad (58)$$

Согласно [10, стр. 79] с учетом, что расчет производится в области $\bar{x} \equiv 1 - x_B \approx 0$, функция (58) примет вид:

$$f(\bar{x}) = \frac{4}{9} a_0^u \bar{x}^{a_2^u}, \quad (59)$$

где $a_0^u = 3,385$; $a_2^u = 3,036$. В этом приближении интегралы (56) и (57) примут вид:

$$F_{SL}^2 \sim \frac{4}{9} \int_0^{\delta_{DIS}} d\bar{x} \cdot a_0^u \bar{x}^{a_2^u} \quad (60)$$

$$F_{TL}^2 \sim \frac{16}{81} \int_0^{\delta_{DY}} d\tau \int_0^1 \int_0^1 d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 \cdot a_0^u \bar{x}_1^{a_2^u} \cdot a_0^u \bar{x}_2^{a_2^u} \cdot \delta(\tau - \bar{x}_1 - \bar{x}_2) \quad (61)$$

Вычислив, получим:

$$F_{SL}^2 \sim \frac{4}{9} \cdot \frac{a_0^u}{a_2^u + 1} \cdot \left(\frac{2M\mu_{DIS}}{Q^2} \right)^{a_2^u + 1} \quad (62)$$

$$F_{TL}^2 \sim \frac{16}{81} \cdot \frac{(a_0^u)^2}{2(a_2^u + 1)} \cdot \beta(a_2^u + 1, a_2^u + 1) \cdot \left(\frac{4\mu_{DY}^2}{Q^2} \right)^{a_2^u + 1} \quad (63)$$

Приравняв F_{SL}^2 и F_{TL}^2 , для μ_{DIS} и μ_{DY} получим:

$$\frac{M\mu_{DIS}}{2\mu_{DY}^2} = \left(\frac{2}{9} \cdot a_0^u \cdot \beta(a_2^u + 1, a_2^u + 1) \right)^{\left(\frac{1}{a_2^u + 1} \right)} \quad (64)$$

С учетом численных значений коэффициентов a_0^u и a_2^u [10], для правой части соотношения (64) получили оценку:

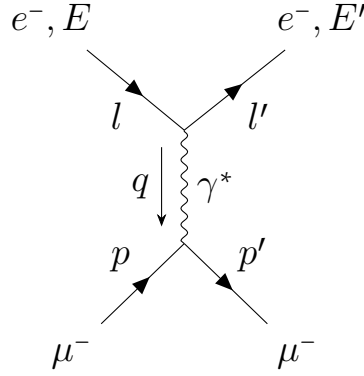
$$\frac{M\mu_{DIS}}{\mu_{DY}^2} \approx 0,54 \quad (65)$$

Заключение

В работе описаны простейшие теоретические основы партонной модели и получена оценка для отношения интервалов дуальности в процессах глубоко неупругого рассеяния и процессах Дрелла-Яна.

Приложение 1: Сечение рассеяния электрона на мюоне

Рассмотрим рассеяние электрона на мюоне. Наблюдать за рассеянием будем в системе отсчета, где мюон до рассеяния покоился. Электрон будем считать ультрарелятивистским, поэтому его массой покоя можно пренебречь.



Пользуясь правилами Фейнмана, посчитаем матричный элемент:

$$iM = \frac{(-ie)^2(-i)}{q^2} \cdot \bar{u}_e(l')\gamma^\mu u_e(l) \cdot \bar{u}_\mu(p')\gamma_\mu u_\mu(p). \quad (66)$$

А затем найдем квадрат его модуля и сделаем усреднение по поляризациям:

$$\frac{1}{4} \sum_{pol.} |M|^2 = \frac{e^4}{4(q^2)^2} Tr[\hat{l}'\gamma^\mu \hat{l}\gamma^\nu] \times Tr[(\hat{p}' + m)\gamma_\mu(\hat{p} + m)\gamma_\nu], \quad (67)$$

где знаки « $\hat{}$ » подразумевают запись вида: $\hat{p} = \gamma^\alpha p_\alpha$.

Упростим:

$$\frac{1}{4} \sum_{pol.} |M|^2 = \frac{8e^4}{(q^2)^2} [(lp) + (l'p') + (l'p) + (lp') - m^2(ll')]. \quad (68)$$

Получили $|M|^2$ в лоренц-инвариантном виде. Посчитаем его теперь в лабораторной системе отсчета. Для этого учтем соотношения, которые верны в выбранной нами СО:

$$\begin{aligned} p &= (m, \vec{0}) \\ pl &= mE \\ l^2 &= 0, \quad p'^2 = m^2 \text{ и } p^2 = m^2 \\ p^2 + l^2 + 2pl &= p'^2 + l'^2 + 2p'l'pl = p'l' = mE. \end{aligned}$$

Теперь можно получить удобную связь переданного импульса:

$$q^2 = (l-l')^2 = l^2 + l'^2 - 2ll' = -2ll' = -2(E E' - (\vec{l}, \vec{l}')) = -2EE'(1 - \cos\theta) = -4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

Удобно вместо $-q^2$ ввести положительную величину Q^2 . Получим удобное соотношение, связывающее Q^2 с энергиями E' и E :

$$Q^2 = 4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad (69)$$

Получим также связь $\nu = E - E'$ с Q :

$$\begin{aligned} p + l &= p' + l' \Rightarrow p + q = p' \\ (p + q)^2 &= p'^2 \\ p^2 + q^2 + 2pq &= p'^2 \\ pq &= m\nu \Rightarrow Q^2 - 2m\nu = 0. \end{aligned}$$

Заметим, что из последней формулы следует, что упругому рассеянию соответствует значение

$$x \equiv \frac{Q^2}{2m\nu} = 1. \quad (70)$$

Отсюда также следует:

$$m(E - E') = m\nu = \frac{Q^2}{2} = 2EE' \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad (71)$$

Для квадрата матричного элемента с учетом этих соотношений получим:

$$\frac{1}{4} \sum_{pol.} |M|^2 = \frac{8e^4}{(Q^2)^2} \left[m^2(E + E') - \frac{1}{2} m^2 Q^2 \right]. \quad (72)$$

С помощью тригонометрических преобразований и формулы (69) преобразуем это выражение к более удобному виду:

$$\frac{1}{4} \sum_{pol.} |M|^2 = \frac{16m^2 e^4 EE'}{Q^4} \left[\cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{Q^2}{2m^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]. \quad (73)$$

Зная матричный элемент, можно вычислить сечение рассеяния. Сечение = (фактор, связанный с потоком) * (квадрат модуля матричного элемента) * (элемент фазового объема):

$$d\sigma = \frac{1}{2E_1 \cdot 2E_2 |\vec{V}_1 - \vec{V}_2|} \times |M_\Sigma|^2 \times d\Phi. \quad (74)$$

Электрон ультрарелятивистский $\Rightarrow |\vec{V}_1 - \vec{V}_2| = c = 1$, тогда в лабораторной СО верно:

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{1}{2E \cdot 2m} \times \frac{16m^2 e^4 EE'}{Q^4} \left[\cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{Q^2}{2m^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \times \\ &\times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p + l - p' - l') \times \frac{d^{(3)}p'}{(2\pi)^3 2E'_\mu} \cdot \frac{d^{(3)}l'}{(2\pi)^3 2E'} \end{aligned} \quad (75)$$

Проинтегрируем дельта-функцию по $d^{(3)}p'$:

$$\delta^{(4)}(p+q-p') \times \frac{d^{(3)}p'}{(2\pi)^3 2E'_\mu} \longrightarrow \frac{1}{(2\pi)^3} \delta((p+q)^2 - m^2) \quad (76)$$

и учтем соотношения:

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \Rightarrow e^4 = 16\pi^2 \alpha^2, \text{ где } \alpha\text{-постоянная тонкой структуры} \quad (77)$$

$$(p+q)^2 - m^2 = p'^2 + 2pq + q^2 - m^2 = 2m\nu - Q^2. \quad (78)$$

Выражение для сечения осталось проинтегрировать по $d^{(3)}l'$, а это интегрирование можно разбить на интегрирование по телесному углу и по модулю. Для сечения, учитывая (76)-(78), получаем [9, стр. 161-163]:

$$\frac{d\sigma}{dE' d\Omega} = \frac{4\alpha^2 E'^2}{Q^4} \left[\cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{Q^2}{2m^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2m}\right). \quad (79)$$

Список литературы

- [1] R.P. Feynman, Photon Hadron Interactions, Benjamin, New York (1972).
- [2] R. P. Feynman, Proceedings of the 3rd Topical Conference on High Energy Collision of Hadrons, Stony Brook, N. Y. (1969)
- [3] Окунь Л. Б. Физика элементарных частиц. — М.: Наука, 1988.
- [4] М. Пескин, Д. Шредер, «Введение в квантовую теорию поля», М., РХД, 2001.
- [5] Measurement of the high-mass Drell-Yan differential cross-section in pp collisions at $\sqrt{s}=7$ TeV, ATLAS Collaboration, Phys.Lett.B 725 (2013) 223
- [6] Расширенная аннотация проекта «Разработка концептуального и технического проекта для установки SPD на коллайдере NICA»
- [7] Б. С. Ишханов, И. М. Капитонов, Н. П. Юдин ; Частицы и атомные ядра - Изд. 4-е, испр. и доп. - Москва : ЛЕНАНД, 2019.
- [8] Большая российская энциклопедия 2004-2017
- [9] Ф. Хелзен, А. Мартин ; Кварки и лептоны. Введение в физику частиц. Москва : Мир, 1987
- [10] New CTEQ global analysis of quantum chromodynamics with high-precision data from the LHC ; PHYSICAL REVIEW D 103, 014013 (2021)
- [11] Oleg Teryaev, Exclusive limits of Drell–Yan processes ; Sixth International Conference on Quarks and Nuclear Physics - QNP2012; April 16-20, 2012; Palaiseau France
- [12] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. — Издание 8-е, стереотипное. — М.: Физматлит, 2012.
- [13] Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Квантовая электродинамика. — Издание 4-е, исправленное. — М.: Физматлит, 2002.