МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

АЛЕКСАХИН Дмитрий Вадимович

ВКЛАД АДРОНОВ В АНОМАЛЬНЫЕ МАГНИТНЫЕ МОМЕНТЫ МЮОНА И ЭЛЕКТРОНА

Кафедра физики элементарных частиц

КУРСОВАЯ РАБОТА 2 КУРСА

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
Теряев Олег Валерианович

Москва 2025

1. Введение

История изучения магнитных моментов элементарных частиц началась в 1921 г. со знаменитого опыта Штерна-Герлаха. Магнитный момент $\boldsymbol{\mu}$ элементарной частицы массой m связан с её спином $\mathbf{s}$ соотношением

$$\boldsymbol{\mu} = g\left(\frac{q\hbar}{2m}\right)\mathbf{s} \tag{1}$$

где g - гиромагнитное отношение, q - заряд частицы. Из результатов измерений следовало, что для электрона $g_{\mathrm{e}} = 2$, что в два раза превышало значение, ожидаемое из классического предела для орбитальных моментов. Релятивистское уравнение Дирака, предложенное в 1928 г., объяснило и наличие спина электрона, и величину гиромагнитного отношения.

Гиромагнитное отношение принято записывать в виде

$$g = 2(1 + a) \tag{2}$$

где безразмерную величину а называют аномальным магнитным моментом. В частности, из первых измерений следовало, что $a_{\mathrm{e}} = (g_e - 2)/2 = (1,15 \pm 0,04) \times 10^{-3}$.
Ю. Швингер первым показал, что отличие g_e от 2 связано с радиационными поправками, и вычислил аномальный магнитный момент электрона в первом порядке теории возмущений: $a_{\mathrm{e}} = \alpha/(2\pi) \approx 1,16 \times 10^{-3}$, что находилось в блестящем согласии с результатами измерений. Этот результат, а также вычисление величины лэмбовского сдвига, тоже открытого в 1947 г., стали триумфом новой теории — квантовой электродинамики (КЭД). В лучших на сегодня измерениях [3] достигнута относительная точность измерения $a_{\mathrm{e}}\, 0,12$ миллиардных долей (parts per billion, ppb).

Ненулевое значение a является результатом взаимодействия частицы с виртуальными частицами - флуктуациями квантовых полей, составляющих вакуум. Поэтому, измеряя величину аномального магнитного момента, можно оценить интегральный вклад всех существующих полей (взаимодействий), включая те, которые не описаны в рамках Стандартной модели. Величина аномального магнитного момента электрона практически полностью определяется электромагнитными взаимодействиями. Поэтому сверхточные измерения a_{e} можно использовать для проверки квантовой электродинамики, на сегодняшний день - до пятого порядка по теории возмущений ($\sim (\alpha/\pi)^5$), а также для уточнения параметров КЭД, например для получения наиболее точного значения постоянной тонкой структуры α.

Доминирование электромагнитных взаимодействий несколько ослаблено в случае аномального магнитного момента мюона. Большая масса мюона усиливает вклад массивных полей по сравнению с вкладом в a_e в $\sim (m_\mu/m_e)^2 \approx 43000$ раз, другими словами, мюон позволяет "заглянуть"в область более высоких q^2 и "увидеть"проявления полей за рамками КЭД (сильных и слабых взаимодействий и, возможно, взаимодействий за рамками Стандартной модели). Поэтому с самого начала возник большой интерес к измерениям a_μ, даже с точностью, значительно уступающей точности измерений a_e, именно как к более чувствительному инструменту по проверке теории.

Вклад адронной поляризации вакуума (HVP) в аномальный магнитный момент мюона $g-2$ является решающей величиной для определения того, присутствует ли новая физика при сравнении предсказаний стандартной модели (SM) и экспериментальных измерений в лаборатории Фермилаб и других. Они обычно определяются с помощью дисперсионных соотношений с использованием обширного каталога экспериментально измеренных низкоэнергетических $e^+e^- \rightarrow$ *адроны* сечений в качестве входных данных. Эти дисперсионные оценки приводят к предсказанию SM, которое демонстрирует расхождение между $g-2$ мюона более чем на 5σ по сравнению с экспериментом. Однако недавние оценки HVP с использованием КХД на решетке и новое измерение адронного сечения в эксперименте CMD-3 (Новосибирск) [5] свидетельствуют в пользу отсутствия нового физического сценария и, следовательно, демонстрируют общее противоречие с предыдущими данными о $e^+e^- \rightarrow$ *адроны* [6]. В этой работе освещены некоторые открытые вопросы в проблеме $g-2$ мюона и электрона. Изложение в основном следует обзору [1], если не указано иное.

2. Аномальный магнитный момент лептонов в Стандартной модели

В Стандартной модели значимый вклад в аномальный магнитный момент мюона и электрона вносят все взаимодействия, кроме гравитационного, - электромагнитное, сильное и слабое:

$$a_{\mu(e)} = a^{\rm QED}_{\mu(e)} + a^{\rm had}_{\mu(e)} + a^{\rm EW}_{\mu(e)}. \tag{3}$$

Общая таблица 2 с отдельными вкладами и итоговыми значениями магнитных моментов будет приведена далее.

2.1. Вклад электромагнитных взаимодействий

Вклад электромагнитных взаимодействий (КЭД) является доминирующим - следующий по величине вклад сильных взаимодействий составляет менее 10^{-4} величины $a^{\rm QED}_\mu$. На сегодняшний день проведены вычисления до пятого порядка теории возмущений. Хотя точность вычисления электромагнитного вклада значительно превышает точность измерения, представляет интерес более детально обсудить структуру этого вклада и факторы, определяющие точность. В вычислениях $a_\mu^{\rm QED}$ и $a_{\rm e}^{\rm QED}$ фигурирует идентичный набор диаграмм Фейнмана, однако результаты существенно различаются, так как доминирующий вклад вносят диаграммы различного типа.

Вклад электромагнитных взаимодействий традиционно представляют в виде следующего разложения:

$$a_\mu^{\rm QED} = A_1 + A_2\left(\frac{m_\mu}{m_{\rm e}}\right) + A_2\left(\frac{m_\mu}{m_\tau}\right) + A_3\left(\frac{m_\mu}{m_{\rm e}}, \frac{m_\mu}{m_\tau}\right). \tag{4}$$

Здесь A_1 представляет собой универсальный вклад, одинаковый для всех лептонов. В диаграммном представлении ему соответствуют диаграммы, в которых либо нет замкнутых лептонных петель, либо в петлях присутствуют только те же лептоны, что и во внешних линиях (т.е. мюоны в случае $a_\mu^{\rm QED}$ и электроны в случае $a_{\rm e}^{\rm QED}$). Остальные вклады соответствуют диаграммам с петлями, в которых лептоны отличаются от лептонов во внешних линиях. В случае электронов участвуют обратные отношения масс ($\frac{m_e}{m_\mu}$ и др.)

Каждый из вкладов A_i может быть представлен в виде разложения по α :

$$\begin{aligned} A_i = A_i^{(2)}\left(\frac{\alpha}{\pi}\right) + A_i^{(4)}\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + A_i^{(6)}\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 + \\ + A_i^{(8)}\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^4 + A_i^{(10)}\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^5 + \ldots \end{aligned} \tag{5}$$

Во втором порядке электромагнитный вклад описывается девятью диаграммами (рис. 1), вклад электронной поляризации вакуума показан на диаграмме 8.

Окончательно вклад электромагнитных взаимодействий в аномальный магнитный момент мюона составляет $a_\mu^{\rm QED} = (116584718.931 \pm 0.104) \times 10^{-11}$ [7]. Точность определения $a_\mu^{\rm QED}$ на несколько порядков лучше точности измерения a_μ.

2.2. Вклад слабых взаимодействий

Вклад электрослабых взаимодействий в первом порядке теории возмущений определяется двумя диаграммами, показанными на рис. 2, которые частично сокращаются.

Вклад слабых взаимодействий в аномальный магнитный момент мюона $a_\mu^{\rm EW} = (153,6 \pm 1,0) \times 10^{-11}$ [7]. Хотя точность вычисления $a_\mu^{\rm EW}$ более чем на порядок ниже точности вычисления $a_\mu^{\rm QED}$, она на порядок выше точности измерения a_μ.

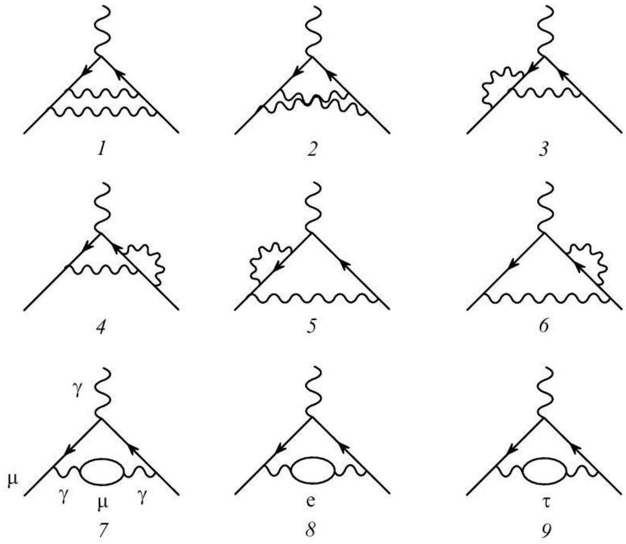

Рис. 1: Электромагнитные вклады второго порядка в a_μ.

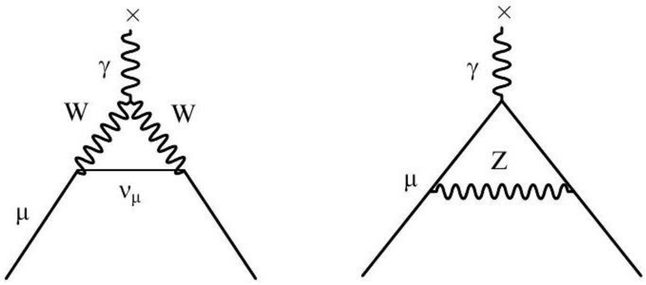

Рис. 2: Диаграммы, иллюстрирующие вклад слабых взаимодействий в a_μ в первом порядке.

2.3. Вклад сильных взаимодействий

Основные диаграммы, определяющие a_μ^{had}, показаны на рис. 3. Во вкладе сильных взаимодействий принято выделять три составляющие: вклад первого порядка (Leading Order, LO) (адронной поляризации вакуума) $a_\mu^{\text{had, LO}}$ (рис. 3а), вклад второго порядка (Next-to-LO, NLO) $a_\mu^{\text{had,NLO}}$ (рис. 3б-г) и вклад рассеяния света на свете $a_\mu^{\text{had, LbL}}$ (рис. 3д):

$$a_\mu^{\text{had}} = a_\mu^{\text{had,LO}} + a_\mu^{\text{had,NLO}} + a_\mu^{\text{had,LbL}} \tag{6}$$

2.3.1. Вклад адронной поляризации вакуума.

Благодаря малости констант связи электромагнитного и слабого взаимодействий теория возмущений позволяет рассчитать соответствующие вклады с высокой точностью. В случае сильных взаимодействий теория возмущений применима только при больших энергиях, при которых эффективная константа связи КХД становится малой. При расчёте a_μ характерная величина передачи импульса порядка массы мюона, что значительно ниже характерных энергий, при которых наблюдается асимптотическая свобода (несколько ГэВ). Поэтому ме-

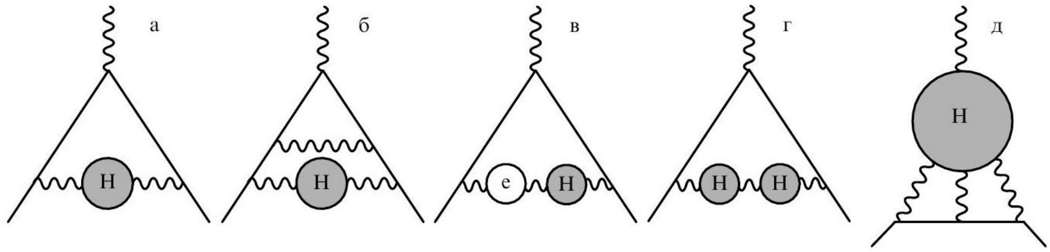

Рис. 3: Вклад сильных взаимодействий в аномальный магнитный момент мюона.

тоды расчёта a_μ^{QED} и a_μ^{EW} неприменимы для расчёта a_μ^{had}.

Способ расчёта лидирующего вклада адронной поляризации вакуума $a_\mu^{\text{had, LO}}$ (диаграмма на рис. 3а), основанный на использовании дисперсионных соотношений до сих пор остаётся единственным способом, позволяющим достичь требуемой точности.

Приведём основные шаги вывода ключевого дисперсионного интеграла, с помощью которого вычисляется $a_\mu^{\text{had, LO}}$. Фотонный пропагатор можно представить как

Рис. 4: Представление фотонного пропагатора в виде суммы одно-частично-неприводимых блоков, каждому из которых соответствует поляризационный оператор.

сумму одночастично-неприводимых блоков петлевых диаграмм, каждый из которых нельзя разделить на два независимых блока, разрезав одну фотонную линию (рис. 4). Вклад каждого такого блока описывается поляризационным оператором $q^2\Pi\left(q^2\right)$. Суммируя все вклады, можно получить следующую форму фотонного пропагатора с учётом петлевых вставок:

$$iD\left(q^2\right) = -\frac{i}{q^2\left(1-\Pi\left(q^2\right)\right)}. \tag{7}$$

Оставив только один неприводимый блок (как в диаграмме на рис.рис. 3а), получим

$$iD\left(q^2\right) = -\frac{i}{q^2}\left(1+\Pi\left(q^2\right)\right). \tag{8}$$

Аналитические свойства $\Pi(s)$, следующие из принципа причинности, позволяют записать дисперсионное соотношение. Рассмотрим интегральное представление оператора [2]

$$\Pi(s) = \int_0^\infty \frac{\rho\left(s'\right)ds'}{s-s'+i0} \tag{9}$$

Особые точки функции $\Pi(s)$ лежат на положительной вещественной полуоси переменной s (см. рисунок 5). Они лежат при значениях $s = s_0$, являющихся пороговыми для рождения виртуальным фотоном различных совокупностей реальных частиц (точка $s_0 = 0$ является порогом для нескольких реальных фотонов, точка $s_0 = 4m^2$ - порог для рождения электрон-позитронной пары и т.п.). Вклад от этих состояний равен нулю ниже порога и отличен от нуля выше порога, что и приводит к особенности функции в самой точке порога.

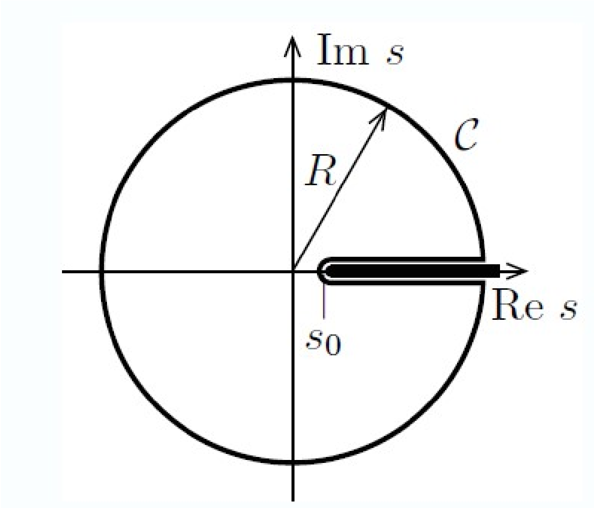

Рис. 5: Контур Коши C.

Само интегральное представление (9) можно рассматривать в этом аспекте просто как формулу Коши для аналитической функции $\Pi(s)$. Действительно, применим формулу Коши

$$\Pi(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_G \frac{\Pi\left(s'\right) ds'}{s' - s} \tag{10}$$

к контуру C на рисунке 5 огибающему разрез. В предположении достаточно быстрого убывания $\Pi(s)$ на бесконечности, интеграл по большой окружности исчезает, а интегралы по берегам разреза дают следующую формулу (дисперсионное соотношение), определяющую функцию $\Pi(s)$ по ее мнимой части:

$$\Pi(s) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{Im}\Pi\left(s' + i0\right)}{s' - s} ds' = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{Im}\Pi\left(s'\right)}{s' - s - i0} ds' \tag{11}$$

Для ликвидации расходимостей появляющихся при вычислении интеграла достаточно применить дисперсионное соотношение 11 не к самой функции $\Pi(s)$, а к функции $\Pi(s)/s^2$. В итоге окончательный вид соотношения:

$$-\frac{\Pi\left(q^2\right)}{q^2} = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}s}{s}\frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\Pi(s)\frac{1}{q^2 - s} \tag{12}$$

Соотношение 12 можно интерпретировать следующим образом: часть пропагатора фотона $-\Pi\left(q^2\right)/q^2$ в 8, соответствующая поляризации вакуума, эквивалентна сумме вкладов массивных фотонов $m_\gamma^2 = s$ с пропагатором $1/\left(q^2 - s\right)$, проинтегрированных с весом $\operatorname{Im}\Pi(s)/(\pi s)$.

Вклад в a_μ от диаграммы с обменом массивным фотоном $m_\gamma^2 = s$ вычисляется как :

$$a_\mu^{m_\gamma^2=s} = \frac{\alpha}{\pi} K_\mu(s), \qquad \text{где}$$
$$K_\mu(s) = \int_0^1 \mathrm{d}x \frac{x^2(1-x)}{x^2 + \left(s/m_\mu^2\right)(1-x)},$$
$$K_\mu(s) \approx m_\mu^2/3s \quad \text{при} \sqrt{s} \gg m_\mu \tag{13}$$

Используя интегральное представление 12 фотонного пропагатора, можно вычислить вклад поляризации вакуума в аномальный магнитный момент мюона как сумму вкладов от обмена массивным фотоном 13, проинтегрированных с весом $\operatorname{Im}\Pi'(s)/(\pi s)$:

$$a_\mu^{\mathrm{VP}} = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}s}{s} \frac{1}{\pi} \operatorname{Im}\Pi'(s) K_\mu(s) \tag{14}$$

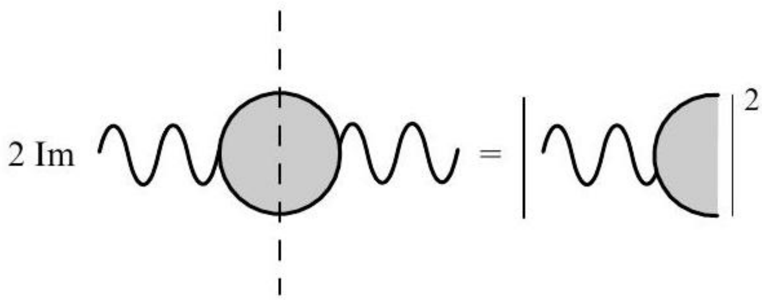

Рис. 6: Иллюстрация оптической теоремы.

Оптическая теорема, являющаяся следствием унитарности матрицы рассеяния, позволяет связать мнимую часть поляризационного оператора с полным сечением рождения частиц в аннигиляции электрона и позитрона (рис. 6):

$$\operatorname{Im}\Pi(s) = \frac{\alpha s}{4\pi|\alpha(s)|^2} \sigma\left(\mathrm{e}^+\mathrm{e}^- \to \gamma^* \to \text{ anything }\right)(s) \tag{15}$$

В поляризационном операторе $\Pi'(s)$ присутствуют вклады как лептонной, так и адронной поляризации вакуума. Вклад лептонных петель уже учтён при расчёте вклада электромагнитных взаимодействий. При расчёте вклада сильных взаимодействий в первом порядке (см. диаграмму на рис. 3а) необходимо учитывать только адронную поляризацию вакуума. Принимая это во внимание, получаем окончательную формулу для расчёта $a_\mu^{\text{had, LO}}$:

$$a_\mu^{\text{had,LO}} = \frac{\alpha^2}{3\pi^2} \int_{4m_\pi^2}^\infty \frac{\mathrm{d}s}{s} R(s) K_\mu(s), \tag{16}$$

где $R(s)$ представляет собой нормированное полное сечение рождения адронов в аннигиляции электрона и позитрона:

Конечное состояние (X)	Вклад в интеграл 16, $\times 10^{10}$	Доля в $a_\mu^{\text{had, LO}}$, %
$\pi^0\gamma$	$4,00 \pm 0,16$	0,58
$\pi^+\pi^-$	$502,16 \pm 2,44$	73,10
$\pi^+\pi^-\pi^0$	$44,32 \pm 1,48$	6,45
$\pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$	$19,69 \pm 2,32$	2,87
$\pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$	$14,80 \pm 0,36$	2,15
$\mathrm{K}^+\mathrm{K}^-$	$21,99 \pm 0,61$	3,20
$\mathrm{K_S K_L}$	$13,10 \pm 0,41$	1,91

Таблица 1: Вклад в дисперсионный интеграл 16 от основных каналов $\mathrm{e^+e^-} \to$ адроны в области энергий 0,318 ГэВ $\leqslant \sqrt{s} \leqslant 2$ ГэВ

$$R(s) = \frac{\sigma\left(\mathrm{e^+e^-} \to \gamma^* \to \text{ hadrons }\right)(s)}{4\pi|\alpha(s)|^2/(3s)} \tag{17}$$

Часто используют другие эквивалентные выражения для $R(s)$:

$$R(s) = \frac{\sigma\left(\mathrm{e^+e^-} \to \text{ hadrons }\right)}{\sigma\left(\mathrm{e^+e^-} \to \mu^+\mu^-\right)} \tag{18}$$

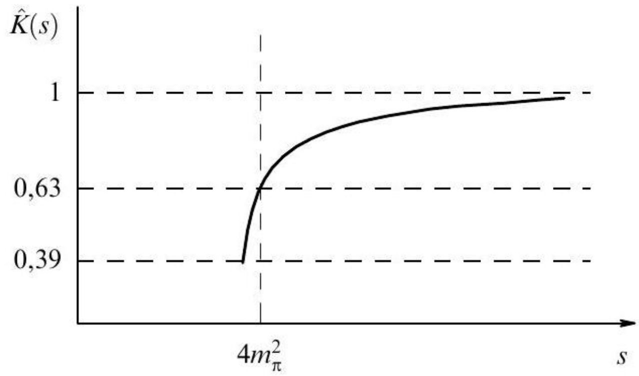

Рис. 7: Переопределенное ядро $\hat{K}(s)$ в дисперсионном соотношении.

Также используется переопределённое ядро свёртки $\hat{K}(s) = \frac{3s}{m_\mu^2}K_\mu(s)$ которое является медленно изменяющейся монотонной функцией, в асимптотике равной единице (рис. 7). Именно в таком виде оно чаще всего встречается в литературе. Соотношение 16 даёт возможность вычислить $a_\mu^{\text{had, LO}}$ по известному $R(s)$.

Адронные сечения при измерении, как правило, нормируются на сечение рассеяния Баба (Bhabha) $\mathrm{e^+e^-} \to \to \mathrm{e^+e^-}$. При использовании описанного подхода вычисление $a_\mu^{\text{had,LO}}$ сводится к измерению сечения рождения адронов в $\mathrm{e^+e^-}$-аннигиляции. В области энергий $\sqrt{s} \lesssim 2$ ГэВ основным подходом является эксклюзивное измерение сечений каждого отдельного адронного конечного состояния: $\mathrm{e^+e^-} \to 2\pi, 3\pi, 4\pi, 2\,\mathrm{K}, \ldots$, а $a_\mu^{\text{had, LO}}$ вычисляется как сумма вкладов отдельных адронных конечных состояний:

$$a_\mu^{\mathrm{had,LO}} = \sum_{X=\pi^0\gamma,\pi^+\pi^-,\ldots} a_\mu^{X,\mathrm{LO}} = \tag{19}$$

$$= \sum_X \left(\frac{m_\mu}{3\pi}\right)^2 \int \frac{\mathrm{d}s}{s} \frac{3}{4\pi} \sigma^0 \left(\mathrm{e}^+\mathrm{e}^- \to X\right)(s) \hat{K}(s) \tag{38}$$

В таблице 1 приведены вклады в $a_\mu^{\mathrm{had,\ LO}}$ от основных адронных каналов в области энергий до 1,8 ГэВ. Основной вклад в $a_\mu^{\mathrm{had,\ LO}}$, около 3/4, даёт процесс $\mathrm{e}^+\mathrm{e}^- \to \pi^+\pi^-$. В целом вклад области энергий $\sqrt{s} < 2$ ГэВ составляет около 93% от полной величины $a_\mu^{\mathrm{had,\ LO}}$. Поэтому измерение эксклюзивных сечений $\mathrm{e}^+\mathrm{e}^- \to$ адроны в области малых энергий, в частности точное измерение сечения $\mathrm{e}^+\mathrm{e}^- \to \pi^+\pi^-$, играет ключевую роль в определении $a_\mu^{\mathrm{had,\ LO}}$.

Подавляющее большинство $\mathrm{e}^+\mathrm{e}^-$-коллайдеров, построенных в различных лабораториях мира, было предназначено для проведения экспериментов в области высоких энергий. В течение длительного времени единственным $\mathrm{e}^+\mathrm{e}^-$-коллайдером, способным работать в области низких энергий, являлся ВЭПП-2М (Новосибирск). Эксперименты CMD-2(3) и СНД провели цикл измерений адронных сечений в области энергий до 1,4 ГэВ (рис. 8), большинство из которых до сих пор остаются наиболее точными прямыми измерениями.

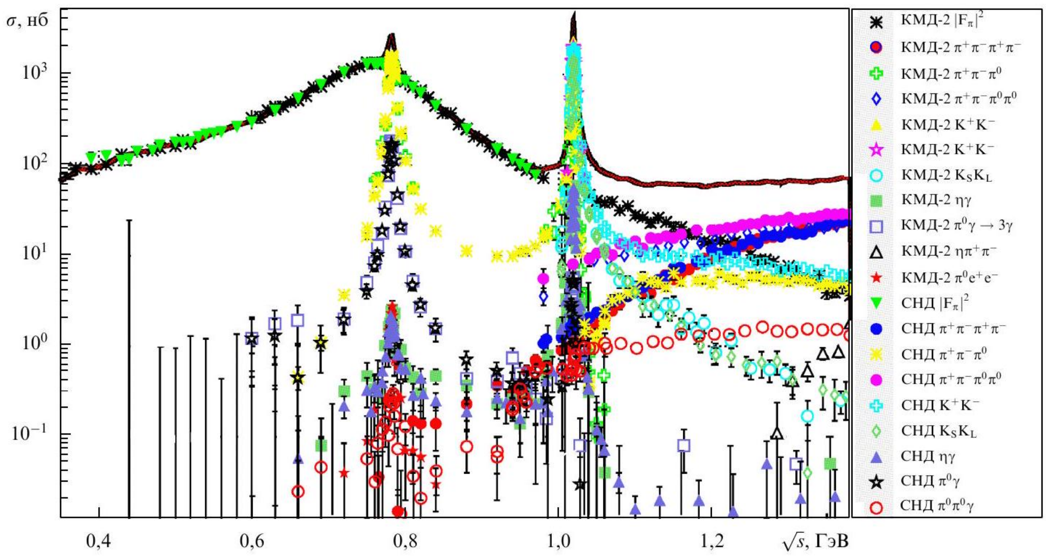

Рис. 8: Результаты измерений адронных сечений в экспериментах КМД-2 и СНД на коллайдере ВЭПП-2М.

Новым источником адронных сечений стали измерения с помощью методики радиационного возврата (ISR). Преимуществом метода радиационного возврата является то, что набор статистики происходит при постоянной энергии $\sqrt{s}$ пучков в коллайдере - сканирование доступной области энергии $\sqrt{s'} < \sqrt{s}$ производится автоматически за счёт регистрации событий с разной энергией, унесённой излучённым фотоном.

История вычислений $a_\mu^{\text{had, LO}}$ насчитывает несколько десятков работ, различающихся тем, какие экспериментальные данные использовались в вычислениях, как эти данные объединялись, в каких диапазонах энергий применялись расчёты в рамках пертурбативной КХД (pQCD) и т.п.

Результаты последних оценок $a_\mu^{\text{had, LO}}$ в работе [7], учитывающих весь существующий объём данных, составляет $a_\mu^{\text{had,LO}} = (693,1 \pm 4,0) \times 10^{-10} \quad (0,58\%)$.

Несмотря на целый ряд измерений сечения $\mathrm{e^+e^-} \to \pi^+\pi^-$ с точностью, лучшей чем 1%, этот канал всё ещё вносит основной вклад в ошибку определения $a_\mu^{\text{had, LO}}$, около $0,35 - 0,4\%$.

2.3.2. Вклад второго порядка.

Вклад сильных взаимодействий в аномальный магнитный момент мюона в следующем за лидирующим порядком теории возмущений $a_\mu^{\text{had,NLO}}$ определяется диаграммами на рис. 3б-г. Вклад рассеяния "свет-на-свете"$a_\mu^{\text{had,LbL}}$, описываемый диаграммой на рис. 3д, хотя он и возникает в том же порядке, рассматривается отдельно в разделе 2.3.3.

Вклад диаграмм рис. 3б-г может быть вычислен с помощью дисперсионных соотношений, при этом возникают интегралы, аналогичные 16, но с другими ядерными функциями. Результат приведенный в работе [7] $a_\mu^{\text{had, NLO}} = (-9,83 \pm 0,07) \times 10^{-10}$. Как и в случае лидирующего вклада, точность вычисления $\sim 1\%$ в значительной мере определяется точностью измерения $R(s)$. В связи с малостью самого вклада второго порядка (около $1,5\% a_\mu^{\text{had, LO}}$) точность определения $a_\mu^{\text{had, NLO}}$ не вносит заметного вклада в общую ошибку вычисления a_μ^{had}.

Также получены оценки вкладов третьего порядка (NNLO - Next-to-NLO) $a_\mu^{\text{had,NNLO}} = (1,24 \pm 0,01) \times 10^{-10}$ [7]. Хотя этот вклад значительно больше, чем можно было ожидать из наивного скейлинга $a_\mu^{\text{had,NLO}}/a_\mu^{\text{had,LO}} \approx 1/70$, в целом наблюдается хорошая сходимость ряда теории возмущений.

2.3.3. Вклад рассеяния света на свете.

Наибольшую сложность для расчёта представляет вклад рассеяния света на свете $a_\mu^{\text{had,LbL}}$, который возникает во втором (NLO) порядке (диаграмма на рис. 3д). Вклад не удаётся ни рассчитать в рамках пертурбативной КХД, ни связать с экспериментальными данными с помощью дисперсионных соотношений. Результат вычислений оказывается модельно зависимым, что приводит к довольно большой неопределённости.

Для расчёта используются эффективные модели, в которых адронный блок на диаграмме рис. 3д, состоящий из кварков и глюонов, заменяется обменом различными адронами. Основной вклад в $a_\mu^{\text{had, LbL}}$ вносит обмен псевдоскалярными мезонами π^0, η и η', которому соответствует диаграмма, приведённая на рис 9а. Кроме того, в расчётах учитываются обмены и другими мезонами, также диаграммы с пионными петлями (рис.9б). Результат вычислений $a_\mu^{\text{had,LbL}} = (9,2 \pm 1,8) \times 10^{-10}$. Другим перспективным направлением является использование

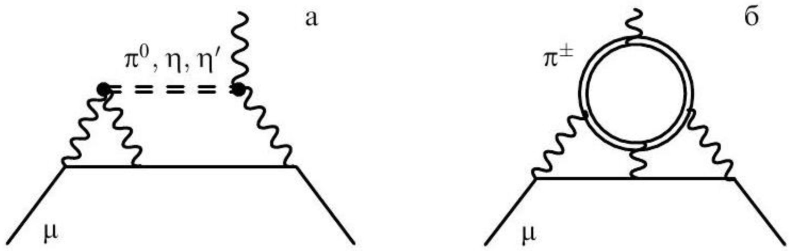

Рис. 9: Основные типы диаграмм при расчёте $a_\mu^{\text{had, LbL}}$.

решёточных вычислений для оценки отдельных вкладов в $a_\mu^{\text{had, LbL}}$. Полученный результат хорошо согласуется с феноменологическими оценками.

2.4. Величина аномальных магнитных моментов лептонов в Стандартной модели

Contribution	$a_\mu \times 10^{11}$	$a_e \times 10^{12}$
Experiment	116 592 059(22) [8]	1 159 652 180.59(13) [3]
QED	116 584 718.931(104) [7]	Cs 1 159 652 179.92(23)
		Rb 1 159 652 178.55(10)
Electroweak	153.6(1.0) [7]	0.030 53(23)
HVP(LO)	6931(40) [7]	1.849(10) [4]
HVP(NLO)	−98.3(7) [7]	−0.2213(11) [4]
HVP(NNLO)	12.4(1) [7]	0.027 99(17) [4]
HVP(LO+NLO+NNLO)	6845(40) [7]	1.656(12)
HVP(Lattice)	7116(184) [7]	
HLbL	92(18) [7]	0.037(5) [4]
Hadron	6937(44)	1.693(12) [4]
Total SM Value	116 591 810(43) [7]	Cs 1 159 652 181.61(23) [9]
		Rb 1 159 652 180.25(10) [10]
Difference: $\Delta a := a^{exp} - a^{SM}$	249(48)	Cs -1.020 (0.264)
		Rb 0.338 (0.161)

Таблица 2: Суммарная таблица. Метки “Cs” and “Rb” объяснены в разделе 2.4.2

2.4.1 $g-2$ мюона.

Недавно в эксперименте Muon $g-2$ в лаборатории Фермилаб было объявлено о новом экспериментальном измерении, которое в сочетании с предыдущими и непротиворечивыми результатами того же эксперимента (и из более раннего эксперимента в Брукхейвене) к новому среднемировому значению, равному $a_\mu^{\rm exp} = 116592059(22) \times 10^{-11}$ с беспрецедентной точностью в 190 частей на миллиард (ppb).

Самое последнее, одобренное научным сообществом теоритическое предсказание СМ для a_μ ("консенсус" или "White Paper"), сделано группой Muon $g-2$ Theory Initiative [7] и основано на вкладе адронной поляризации вакуума (HVP) $a_\mu^{\rm HVP}$, полностью оцениваемом с использованием данных и базируется на дисперсионном подходе. Вклад HVP главного порядка (LO), как было установлено Theory Initiative, составляет

$$(a_\mu^{\rm HVP})^{\rm TI}_{e^+e^-} = (693.1 \pm 4.0) \times 10^{-10}\,. \tag{20}$$

Это, в сочетании с обновленными значениями для других вкладов СМ, привело оценке величины аномального магнитного момента мюона $a_\mu^{\rm SM} = 116591810(43)10^{-11}$ [7].

Сравнение $a_\mu^{\rm SM}$ с текущим экспериментальным средним мировым значением

$$\Delta a_\mu \equiv a_\mu^{\rm exp} - a_\mu^{\rm SM} = (24.9 \pm 4.8) \times 10^{-10}\,, \tag{21}$$

что приводит к расхождению в $5,1\,\sigma$ и подразумевает наличие физики за пределами СМ (BSM).

Однако $a_\mu^{\rm HVP}$ теперь может быть рассчитан с использованием методов КХД "на решетке", основанных на "первых принципах". В частности, Budapest–Marseille–Wuppertal lattice QCD collaboration (BMWc) [12] вычислила $a_\mu^{\rm HVP}$ с субпроцентной точностью

$$(a_\mu^{\rm HVP})^{\rm BMW}_{\rm Lattice} = (714.1 \pm 3.3) \times 10^{-10}\,, \tag{22}$$

что, очевидно, больше, чем "консенсусное" значение (20). Это уменьшает Δa_μ до $0,9\sigma$ (полностью соответствует $a_\mu^{\rm exp}$ при текущем уровне точности) за счет создания несоответствия в $4,0\sigma$ со значением (20).

Набор экспериментальных данных по адронам, собранный коллаборацией KNT в 2019 году (далее - KNT19), является точным и общедоступным собранием общих адронных сечений при низких энергиях [11]. Значение сечений CMD-3 для конечного состояния $\pi^+\pi^-$ [5] больше, чем все предыдущие значения $\pi^+\pi^-$ представленные в KNT19 на 2σ-4σ. Можно сравнить и проанализировать два сценария: (1) $\sigma_{\rm had}$ = KNT19. Предыдущие данные верны, и новые данные CMD-3 не используются. (2) $\sigma_{\rm had}$ = KNT19/CMD-3. Данные CMD-3 верны, поэтому они подставляются в данные KNT19 и заменяют их только в доступном диапазоне энергий.

Оценка KNT19 (сценарий (1)) была одним из нескольких исходных данных для оценки, приведенной в работе [7], и показала, что вклад LO в HVP составляет $(a_\mu^{\rm HVP})^{\rm KNT19}_{e^+e^-} =$

$(692.8 \pm 2.4) \times 10^{-10}$. При использовании сценария (2) (замена данных на CMD-3) эта оценка увеличивается до $(a_\mu^{\rm HVP})_{e^+e^-}^{\rm CMD3} = (714.5 \pm 3.4) \times 10^{-10}$ что лучше согласуется со значением BMWc. (22). Это приводит к сдвигу в $a_\mu^{\rm HVP}$

$$\begin{aligned} \delta a_\mu^{\rm CMD3} &\equiv (a_\mu^{\rm HVP})_{e^+e^-}^{\rm CMD3} - (a_\mu^{\rm HVP})_{e^+e^-}^{\rm KNT19} \\ &= (21.7 \pm 3.6) \times 10^{-10}\,, \end{aligned} \tag{23}$$

демонстрируя несовпадение в размере $6,1\sigma$ [6].

2.4.2 $g{-}2$ электрона.

Аномальный магнитный момент электрона, a_e, обычно используется для определения значения постоянной тонкой структуры, α (и наоборот). Недавние, более совершенные атомно-физические эксперименты с использованием интерферометрии на цезии (Cs) и рубидии (Rb) привели к следующим результатам прямых измерений α: $\alpha(\mathrm{Cs}) = 1/137.035999046(27)$ и $\alpha(\mathrm{Rb}) = 1/137.035999206(11)$, которые расходятся друг с другом на $5.5\ \sigma$. Приведенные выше результаты дают следующие прогнозы SM: $(a_e^{\rm SM})_{\rm Cs} = (115\,965\,218\,161 \pm 23)\ \times 10^{-14}$ и $(a_e^{\rm SM})_{\rm Rb} = (115\,965\,218\,025 \pm 10) \times 10^{-14}$. Сравнивая полученные предсказания СМ $a_e^{\rm SM}$, с последним экспериментальным измерением $a_e^{\rm exp} = (115\,965\,218\,059 \ \pm\ 13)10^{-14}$, получаем $(\Delta a_e)_{\rm Cs} = (-102.0 \pm 26.4) \times 10^{-14} \Rightarrow -3.9\sigma$, $(\Delta a_e)_{\rm Rb} = (33.8 \pm 16.1) \times 10^{-14} \Rightarrow\ \ 2.1\sigma$.

Влияние данных CMD-3 на вклад HVP в $a_e^{\rm SM}$ может быть оценено путем использования высокоэнергетического приближения уравнения 13 и сопоставления $a_\mu^{\rm HVP}$ и $a_e^{\rm HVP}$ путем квадратичного масштабирования между массами лептонов $\delta a_e^{\rm CMD3} \approx \delta a_\mu^{\rm CMD3}\left(\frac{m_e}{m_\mu}\right)^2 \approx (5.1 \pm 0.8) \times 10^{-14}$ [6]. Эта величина значительно меньше разницы между $(a_e^{\rm SM})_{\rm Cs} - (a_e^{\rm SM})_{\rm Rb} = (136 \pm 29) \times 10^{-14}$, то есть эффект от данных CMD-3 не имеет значительного влияния на $a_e^{\rm SM}$ при нынешнем знании постоянной тонкой структуры.

3. Перспективы. Заключение

В ближайшие годы ожидается улучшение экспериментальной точности по определению a_e примерно в 5 раз [6]. В то же время новые измерения $\alpha(\mathrm{Rb})$ и $\alpha(\mathrm{Cs})$ коллаборациями Парижа и Беркли, соответственно, существенно уменьшит систематические ошибки которые доминировали в предыдущих измерениях [6]. Такие улучшения должны быть достаточными чтобы прояснить ситуацию с отклонениями CMD-3 (и BMWc) используя $g{-}2$ электрона.

Эксперимент MuOnE [13] предложил измерить адронный вклад главного порядка в $g{-}2$ мюона $a_\mu^{\rm had,LO}$ используя рассеяние высоко-энергетичных (160ГэВ/c) мюонов на атомных электронах мишеней с низким зарядом ядра в процессе $\mu e \to \mu e$. Статистическая точность порядка 0.3% может быть достигнута за два года набора данных.

В начале 2025 года ожидается публикация Muon $g-2$ Theory Initiative с обновленными теоритическими оценками $g-2$ мюона. Ситуация на сегодняшний день отражена на рисунке 10

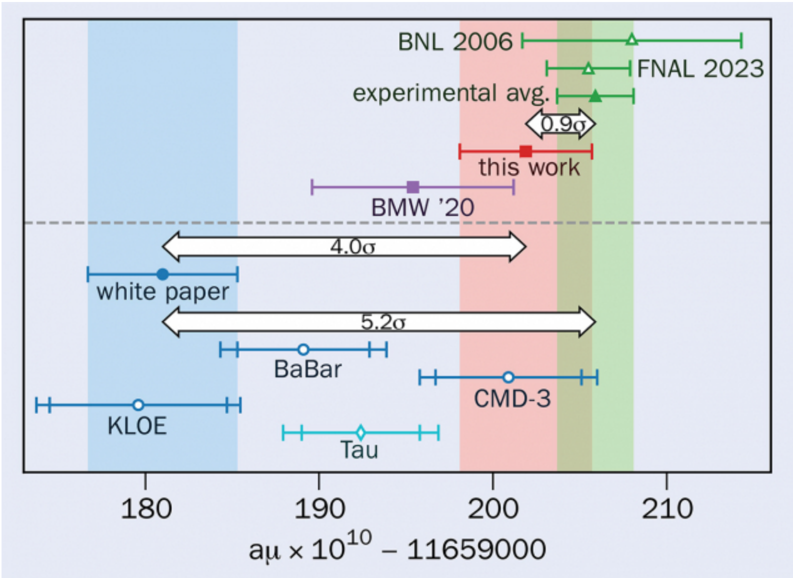

Рис. 10: "This work" соответствует результатам расчетов КХД на решетке приведенным в работе [12], "white paper" результату "консенсуса" [7].

В 1956 г. Берестецкий и другие [15] указали, что чувствительность a_l зависит от шкалы новой физики Λ (или M) как

$$\frac{\delta a_l}{a_l} \propto \frac{m_l^2}{\Lambda^2} \tag{24}$$

Более общо можно сказать, что M может быть массой более тяжелой частицы SM, или массой гипотетического тяжелого состояния за пределами SM, или энергетической шкалой, при которой SM перестает быть действительной [14].

Если данные CMD-3 для a_μ верны, то изменение вклада адронов приводит к согласию экспериментальных данных с рассчетами стандартной модели на уровне $\sim 1\sigma$ (5×10^{-10} , см. рисунок 10).

Для электрона адронный вклад порядка точности измерения, то есть для достижения сравнимой с мюонами чувствительности к новой физике точность нужно увеличить во столько раз, во сколько адронный вклад (1.7×10^{-12}) больше его изменения в последних данных CMD-3 (5×10^{-14}), т.е. примерно в 30 раз.

Список литературы

[1] Логашенко И. Б., Эйдельман С. И., УФН 188 540–573 (2018).

[2] Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Квантовая электродинамика.

[3] X. Fan, T. G. Myers, B. A. D. Sukra, and G. Gabrielse, Phys. Rev. Lett. 130, 071801 (2023).

[4] F. Jegerlehner, arXiv:1711.06089, T. Aoyama, T. Kinoshita, and M. Nio, Phys. Rev. D 97, 036001 (2018).

[5] F. V. Ignatov et al. (CMD-3 Collaboration), Phys. Rev. D 109, 112002 (2024).

[6] L. Luzio, A. Keshavarzi, A. Masiero and P. Paradis, Phys. Rev. Lett. 134, 011902 (2025)

[7] T. Aoyama et al. (Muon g-2 Theory Initiative), Phys. Rep. 887, 1 (2020).

[8] P. Aguillard et al. (Muon g-2 Collaboration), Phys.Rev. D 110, 032009 (2024)

[9] R. Parker et al., Science, Vol 360, Issue 6385 (2018).

[10] L. Morell et al., Nature, Vol 588 (2020).

[11] A. Keshavarzi, D. Nomura, and T. Teubner, Phys. Rev. D101, 014029 (2020)

[12] A. Boccaletti et al.(BMW Collaboration), arXiv:2407.10913

[13] G. Abbiendi et. al., Eur. Phys. J. C 77 (2017) 139 [arXiv:1609.08987]

[14] F. Jegerlehner, Springer Tracts Mod.Phys. 274 (2017) pp.1-693

[15] V.B. Berestetskii, O.N. Krokhin, A.X. Klebnikov, Zh Eksp, Teor. Fiz. 30 (1956) 788