

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени
М.В.ЛОМОНОСОВА»
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ФИЗИКИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

НАХОЖДЕНИЕ
АНАЛОГОВ
НЕЙТРИННЫХ ОСЦИЛЛЯЦИЙ В ВЕЩЕСТВЕ
В КЛАССИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

Студент:	Ковалев М.Б
Научный руководитель:	Наумов Д. В.
Научный консультант:	Завьялов. С. И.
Группа:	217

Москва
2025

Содержание

1	Введение	3
2	Теоретическая часть	4
2.1	Что такое нейтрино?	4
2.2	Основные понятия о нейтринных осцилляциях.	5
2.2.1	Нейтринные осцилляции в вакууме	5
2.2.2	Параметры нейтринных осцилляций в вакууме .	7
2.2.3	Нейтринные осцилляции в веществе	8
3	Практическая часть	10
3.1	Модельные предположения	10
3.2	Постановка задачи и её решение	11
3.3	Влияние внешнего ускорения: аналог осцилляций в ве- ществе	13
4	Модель с ускорением и аналог осцилляций в веществе	14
4.1	Итоги	17
4.2	Выводы	17
	Приложения	19
A	Вывод уравнений движения маятниковой модели	19

1 Введение

Нейтринные осцилляции представляют собой одно из фундаментальных явлений современной физики элементарных частиц. Их открытие стало убедительным доказательством того, что нейтрино обладают ненулевой массой, что выходит за рамки Стандартной модели и требует её расширения.

С момента первых экспериментальных подтверждений этого явления прошло несколько десятилетий, однако многие аспекты, включая точные значения параметров смешивания и природу нейтрино (дираковские они или майорановские), остаются не до конца понятными. Одним из ключевых направлений исследований остаётся поиск интуитивно понятных моделей, позволяющих глубже осмыслить суть нейтринных осцилляций.

В настоящей работе предпринимается попытка построить классическую аналогию нейтринных осцилляций с помощью системы двух связанных маятников. Такая модель позволяет воспроизвести основные черты квантовомеханического явления — в частности, периодическую передачу «аромата» от одного состояния к другому — средствами классической механики.

Целью данной работы является построение и анализ механической модели, демонстрирующей аналог нейтринных осцилляций как в вакууме, так и в веществе. Рассматриваются соответствующие дифференциальные уравнения движения, проводятся аналитические оценки и численные расчёты, позволяющие установить связь между параметрами классической системы и физическими характеристиками нейтринных осцилляций.

2 Теоретическая часть

2.1 Что такое нейтрино?

Нейтрино — это электрически нейтральные фермионы со спином $\frac{1}{2}$, относящиеся к семейству лептонов. В природе существуют три типа (аромата или флэйвора) активных нейтрино: электронное (ν_e), мюонное (ν_μ) и тау-нейтрино (ν_τ), соответствующие трём поколениям лептонов: электрону, мюону и тау-лептону соответственно.

Одной из фундаментальных особенностей нейтрино является их киральность: все зарегистрированные активные нейтрино обладают левой киральностью, тогда как соответствующие антинейтрино — правой. Это свойство отражает нарушение чётности в слабом взаимодействии. Для безмассовых частиц киральность и спиральность совпадают.

На ранних этапах развития физики элементарных частиц нейтрино считались безмассовыми. Однако в 1950–1960-х годах Б. М. Понтекорво высказал гипотезу о возможности их осцилляций, что предполагало существование массы и смешивания. Позднее эта гипотеза была подтверждена экспериментально — в частности, при наблюдении атмосферных, солнечных и реакторных нейтрино.

Экспериментальное подтверждение нейтринных осцилляций означает, что наблюдаемые флэйворные состояния нейтрино не обязаны совпадать с собственными состояниями массы. Это приводит к тому, что при распространении нейтрино могут менять свой тип, что является квантовомеханическим следствием интерференции массовых состояний. Изучение нейтринных осцилляций позволяет исследовать фундаментальные параметры нейтрино и является важным направлением современной физики.

2.2 Основные понятия о нейтринных осцилляциях.

2.2.1 Нейтринные осцилляции в вакууме

Нейтринные осцилляции — это явление, при котором нейтрино, рождённое с определённым лептонным ароматом (например, электронное), может с течением времени превращаться в нейтрино другого аромата (например, мюонное). Такой переход возможен только при выполнении двух условий: нейтрино должны обладать различными массами и между ароматными и массовыми состояниями должно существовать квантовомеханическое смешивание.

Математически это смешивание описывается унитарной матрицей U , называемой матрицей Понтекорво–Макая–Накая–Сакаты (PMNS), которая связывает ароматные состояния \mathbf{v}_α ($\alpha = e, \mu, \tau$) с массовыми состояниями \mathbf{v}_i ($i = 1, 2, 3$):

$$\mathbf{v}_\alpha = \sum_{i=1}^3 U_{\alpha i} \mathbf{v}_i.$$

При распространении в пространстве каждое массовое состояние приобретает свою фазу:

$$\mathbf{v}_i(t) = e^{-iE_i t} \mathbf{v}_i(0),$$

что приводит к изменению интерференционной картины и, как следствие, — к изменению вероятности обнаружить нейтрино данного аромата после прохождения расстояния L с энергией E_ν . Вероятность перехода нейтрино из состояния \mathbf{v}_α в состояние \mathbf{v}_β задаётся выражением:

$$P_{\alpha \rightarrow \beta} = \sum_{i,j} U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \exp\left(-i \frac{\Delta m_{ij}^2 L}{2E_\nu}\right),$$

где $\Delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2$ — разность квадратов масс нейтрино.

Для наглядности рассмотрим упрощённый случай двух нейтрино, например, ν_e и ν_μ . В этом случае матрица смешивания имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}.$$

Вероятность осцилляции из ν_e в ν_μ тогда выражается как:

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) = \sin^2 2\theta \cdot \sin^2 \left(\frac{\pi L}{L_{\text{осц}}} \right),$$

где

$$L_{\text{осц}} = \frac{4\pi E_\nu}{\Delta m^2}$$

— длина осцилляций.

Таким образом, нейтринные осцилляции в вакууме характеризуются:

- углом смешивания θ ,
- разностью квадратов масс Δm^2 ,
- и энергетической/геометрической зависимостью L/E_ν , отражающей квантовую природу интерференции.

Для трёх нейтрино матрица смешивания имеет следующий вид:

$$U = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{i\alpha_1/2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\alpha_2/2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$, $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$, δ — фаза CP-нарушения, а α_1, α_2 — майорановские фазы (не влияющие на осцилляции, если нейтрино — дираковские частицы).

Вероятность перехода $\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta$ в общем случае выражается формулой:

$$P_{\alpha \rightarrow \beta} = \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{i>j} \Re \left(U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \right) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{ij}^2 L}{4E_\nu} \right) + 2 \sum_{i>j} \Im \left(U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \right) \sin \left(\frac{\Delta m_{ij}^2 L}{2E_\nu} \right).$$

Эта формула включает как интерференционные эффекты между различными массовыми состояниями, так и возможные асимметрии между нейтрино и антинейтрино в случае нарушения CP-симметрии.

2.2.2 Параметры нейтринных осцилляций в вакууме

Характер осцилляций нейтрино определяется несколькими ключевыми параметрами:

1. Углы смешивания θ_{12} , θ_{23} , θ_{13} :

Эти углы определяют структуру матрицы PMNS и описывают степень смешивания между ароматными и массовыми состояниями. Например, угол θ_{12} отвечает за осцилляции между ν_e и ν_μ , доминирующие в солнечных нейтрино.

2. Разности квадратов масс $\Delta m_{21}^2 = m_2^2 - m_1^2$, $\Delta m_{31}^2 = m_3^2 - m_1^2$:

Эти параметры определяют характерную длину осцилляций. Разность Δm_{21}^2 контролирует "медленные" осцилляции, а Δm_{31}^2 — "быстрые". Их значения устанавливаются в экспериментах с различными источниками нейтрино (солнечными, атмосферными, реакторными и ускорительными).

3. Фаза нарушения CP-симметрии δ :

Этот параметр отвечает за возможные различия в поведении

нейтрино и антинейтрино. Его точное измерение — одна из приоритетных задач современной нейтринной физики, поскольку наличие CP-нарушения может быть связано с происхождением барионной асимметрии во Вселенной.

В совокупности эти параметры определяют амплитуды и частоты осцилляций, а также позволяют различать нормальную ($m_1 < m_2 < m_3$) и инвертированную ($m_3 < m_1 < m_2$) иерархии масс нейтрино. Их точное определение возможно только за счёт комплексного анализа результатов различных нейтринных экспериментов.

2.2.3 Нейтринные осцилляции в веществе

В реальных физических условиях нейтрино часто распространяются не в вакууме, а во взаимодействующей среде, например, в недрах Солнца, в атмосфере или в Земле. При прохождении через вещество нейтрино подвергаются когерентному рассеянию на электронах среды, что приводит к изменению условий их осцилляций. Этот эффект известен как эффект Михеева–Смирнова–Вольфенштейна (MSW-эффект) [4].

Основная причина модификации осцилляций в веществе заключается в различии взаимодействий для нейтрино разных флэйворов. Электронные нейтрино взаимодействуют с электронами среды как через обмен Z -бозоном (нейтральный ток), так и через W -бозон (зарядовый ток), тогда как мюонные и тау-нейтрино участвуют лишь в обмене Z -бозоном. Это приводит к появлению дополнительного эффективного потенциала V в гамильтониане:

$$V = \sqrt{2}G_F N_e,$$

где G_F — константа Ферми, N_e — электронная концентрация в веществе.

Рассмотрим двухфлэйворный случай $\nu_e \leftrightarrow \nu_\mu$. Эволюция состояния описывается уравнением Шрёдингера:

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = \left[\frac{\Delta m^2}{4E_\nu} \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix}.$$

Влияние среды эквивалентно замене параметров осцилляций на эффективные, зависящие от плотности вещества. Эффективный угол смешивания в веществе θ_m определяется выражением:

$$\tan 2\theta_m = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta - \frac{2\sqrt{2}G_F N_e E_\nu}{\Delta m^2}}.$$

Аналогично, эффективная длина осцилляций в веществе:

$$L_m = \frac{4\pi E_\nu}{\Delta m_m^2}, \quad \Delta m_m^2 = \Delta m^2 \sqrt{\left(\cos 2\theta - \frac{2\sqrt{2}G_F N_e E_\nu}{\Delta m^2} \right)^2 + \sin^2 2\theta}.$$

Соответствующая вероятность перехода $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ принимает вид:

$$P_{e \rightarrow \mu} = \sin^2 2\theta_m \cdot \sin^2 \left(\frac{\pi L}{L_m} \right).$$

Особый интерес представляет случай резонансного усиления осцилляций. Это происходит при выполнении условия:

$$2\sqrt{2}G_F N_e E_\nu = \Delta m^2 \cos 2\theta,$$

которое определяет резонансную энергию:

$$E_{\text{res}} = \frac{\Delta m^2 \cos 2\theta}{2\sqrt{2}G_F N_e}.$$

В этой точке эффективный угол θ_m становится равным $\pi/4$, и вероятность перехода достигает максимума.

Таким образом, вещество может не только подавлять, но и усиливать осцилляции нейтрино в зависимости от условий, что имеет важнейшее значение для интерпретации солнечных и атмосферных нейтринных данных.

3 Практическая часть

3.1 Модельные предположения

Поскольку нейтринные осцилляции представляют собой периодический переход между различными флэйворными состояниями, удобно искать их классический аналог среди систем, демонстрирующих аналогичное поведение. Одной из таких систем является пара связанных маятников, между которыми происходит периодический обмен энергией.

Рассмотрим модель из двух математических маятников длиной L_1 и L_2 , с массами m_1 и m_2 , соединённых упругой пружиной жёсткости k . Маятники могут совершать колебания в вертикальной плоскости, а упругая связь между ними обеспечивает возможность передачи энергии.

Пусть углы отклонения маятников от положения равновесия обозначены как $\theta_1(t)$ и $\theta_2(t)$. Тогда аналогом флэйворных переходов можно считать изменение доли энергии в каждом из маятников во времени. В частности, выражения:

$$\frac{E_1(t)}{E_1(t) + E_2(t)}, \quad \frac{E_2(t)}{E_1(t) + E_2(t)}$$

можно интерпретировать как классическую аналогию вероятностей осцилляций между двумя состояниями.

При этом:

- аналогом фазы распространения квантового состояния является собственная частота колебаний маятника;
- угол смешивания в квантовой теории отражается в коэффициентах нормальных мод;
- влияние среды (вещества) можно смоделировать путём введения внешнего ускорения (например, за счёт неинерциальной системы отсчёта), что приводит к изменению эффективной частоты одного из маятников.

Таким образом, система двух связанных маятников даёт интуитивно наглядную иллюстрацию как вакуумных, так и матерных нейтринных осцилляций. В следующих разделах будет проведён количественный анализ этой модели.

3.2 Постановка задачи и её решение

Рассматривается система двух связанных маятников с длинами L_1 , L_2 и массами m_1 , m_2 , соединённых пружиной жёсткости k . Углы отклонения маятников обозначим $\theta_1(t)$ и $\theta_2(t)$.

В предположении малых углов и неподвижных точек подвеса система допускает линеаризацию. Полученные дифференциальные уравнения второго порядка описывают эволюцию $\theta_1(t)$ и $\theta_2(t)$, а также приводят к нормальным модам колебаний.

Подробный вывод уравнений и вычисление лагранжиана приведены в приложении А.

Результаты анализа:

В случае одинаковой длины маятников $L_1 = L_2 = L$, собственные частоты системы определяются как:

$$\omega_1^2 = \frac{g}{L}, \quad \omega_2^2 = \frac{g}{L} + \frac{k}{m_1} + \frac{k}{m_2}.$$

Общее решение представляет собой суперпозицию двух гармоник:

$$\theta_i(t) = \text{Re} \left[A_1^{(i)} e^{i\omega_1 t} + A_2^{(i)} e^{i\omega_2 t} \right],$$

где $i = 1, 2$, а коэффициенты $A_1^{(i)}$, $A_2^{(i)}$ фиксируются начальными условиями.

Если в начальный момент времени первый маятник смещён, а второй находится в равновесии, то со временем происходит периодический обмен энергией между ними. Соответствующие выражения для энергий имеют вид:

$$E_1(t) = E_{\text{tot}} \left(1 - \frac{4r}{(1+r)^2} \sin^2 \left(\frac{\Delta\omega t}{2} \right) \right),$$

$$E_2(t) = E_{\text{tot}} \cdot \frac{4r}{(1+r)^2} \sin^2 \left(\frac{\Delta\omega t}{2} \right),$$

где $r = m_2/m_1$, $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$, и E_{tot} — полная энергия системы. Таким образом, величины

$$\frac{E_1(t)}{E_1(t) + E_2(t)}, \quad \frac{E_2(t)}{E_1(t) + E_2(t)}$$

представляют собой классическую аналогию вероятностей осцилляций между двумя состояниями. Форма зависимости совпадает с квантовомеханической формулой для двухфлэйворных нейтринных осцилляций в вакууме.

В дальнейшем рассматривается влияние ускорения точки подвеса одного из маятников, что моделирует эффект среды — аналог осцилляций в веществе.

3.3 Влияние внешнего ускорения: аналог осцилляций в веществе

Как было показано ранее, классическая модель из двух связанных маятников способна воспроизводить поведение нейтринных осцилляций в вакууме. Однако для моделирования осцилляций в веществе необходимо ввести асимметрию между компонентами системы, аналогичную влиянию среды на электронные нейтрино.

В рамках механической модели это достигается путём введения постоянного ускорения a вверх для одной из точек подвеса — например, для первого маятника. Такой подход эквивалентен переходу в неинерциальную систему отсчёта, в которой эффективное ускорение свободного падения для одного маятника становится $g + a$, а для второго остаётся равным g .

В результате уравнения движения приобретают вид:

$$\begin{aligned}\ddot{\theta}_1 + \left(\frac{g+a}{L}\right)\theta_1 + \frac{k}{m_1 L}(\theta_1 - \theta_2) &= 0, \\ \ddot{\theta}_2 + \left(\frac{g}{L}\right)\theta_2 - \frac{k}{m_2 L}(\theta_1 - \theta_2) &= 0.\end{aligned}$$

Эта модификация изменяет собственные частоты колебаний системы и, как следствие, параметры, отвечающие за период и амплитуду энергетического обмена. При численном решении видно, что при увеличении ускорения a пики передачи энергии между маятниками становятся менее выраженными — аналогично подавлению вероятности осцилляций при прохождении нейтрино через плотную среду.

В предельном случае $a \gg g$ система переходит в режим адиабатического подавления: энергия остаётся локализованной в одном маятнике. Это соответствует отсутствию осцилляций, что и наблюдается для солнечных нейтрино, рождающихся как ν_e , но покида-

ющих Солнце в массовом состоянии \mathbf{v}_2 , не испытывая дальнейших осцилляций в вакууме.

4 Модель с ускорением и аналог осцилляций в веществе

В этом приложении приведены уравнения движения и численные результаты для модели, в которой один из маятников испытывает внешнее ускорение. Такая ситуация моделирует осцилляции нейтрино в веществе с эффективным потенциалом, зависящим от плотности среды.

Модифицированные уравнения движения

Пусть точка подвеса первого маятника ускоряется с постоянным ускорением a вверх, тогда эффективное ускорение для него становится $g + a$. Уравнения движения в приближении малых углов и равных длин $L_1 = L_2 = L$ имеют вид:

$$\begin{aligned}\ddot{\theta}_1 + \left(\frac{g+a}{L} + \frac{k}{m_1} \right) \theta_1 - \frac{k}{m_1} \theta_2 &= 0, \\ \ddot{\theta}_2 + \left(\frac{g}{L} + \frac{k}{m_2} \right) \theta_2 - \frac{k}{m_2} \theta_1 &= 0.\end{aligned}$$

В матричной форме:

$$\begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{g+a}{L} + \frac{k}{m_1} & -\frac{k}{m_1} \\ -\frac{k}{m_2} & \frac{g}{L} + \frac{k}{m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}.$$

Это симметричная система дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. При $a = 0$ она переходит в ранее рассмотренный вакуумный случай.

Численное решение и анализ

Численное решение этих уравнений позволяет исследовать поведение величин

$$\frac{E_1(t)}{E_1(t) + E_2(t)}, \quad \frac{E_2(t)}{E_1(t) + E_2(t)},$$

где энергии маятников вычисляются как:

$$E_i(t) = \frac{1}{2}m_iL^2\dot{\theta}_i^2 + m_i g L(1 - \cos \theta_i), \quad i = 1, 2.$$

В малых углах: $\cos \theta_i \approx 1 - \frac{1}{2}\theta_i^2$, поэтому:

$$E_i(t) \approx \frac{1}{2}m_iL^2\dot{\theta}_i^2 + \frac{1}{2}m_i g L\theta_i^2.$$

Результаты численного моделирования показывают:

- При $a = 0$ осцилляции энергии между маятниками соответствуют синусоидальному обмену, аналогично осцилляциям в вакууме.
- При $a > 0$ амплитуда энергетических осцилляций снижается, как и вероятность перехода между флэйворами в веществе.
- В предельном случае $a \gg g$ (например, $a = 1000 \text{ м/с}^2$) наблюдается подавление переходов, энергия остаётся в первом маятнике — аналог адиабатического подавления нейтринных осцилляций.

Экспоненциальное ускорение:

Аналогично можно рассмотреть случай переменного ускорения:

$$a(t) = a_0 e^{-kt},$$

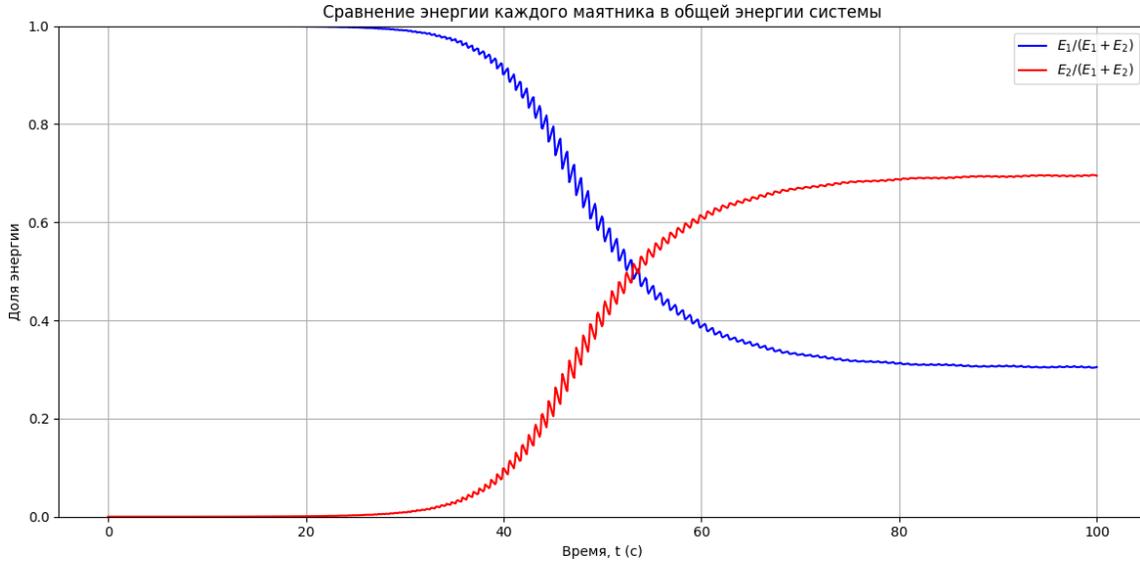


Рис. 1: Графики зависимости отношений энергий $\frac{E_1}{E_1+E_2}$ и $\frac{E_2}{E_1+E_2}$ от времени t при экспоненциально зависящем ускорении

что моделирует изменение плотности среды по экспоненте (например, в Солнце). Численное решение показывает, что при умеренном затухании ($k \sim 0.2$) возможно наблюдать фазовый сдвиг и асимметричную передачу энергии — аналог MSW-перехода при переменной плотности вещества.

Вывод

Таким образом, модель с ускорением точек подвеса позволяет эффективно имитировать поведение нейтрино в веществе, включая эффект резонансного усиления или подавления осцилляций. Простая механическая система отражает основные черты квантовой механики, включая роль асимметрии и условий перехода.

4.1 Итоги

В рамках данной работы была построена и проанализирована механическая модель, имитирующая поведение нейтринных осцилляций. Использовалась система двух связанных маятников, в которой энергия периодически перераспределяется между компонентами — аналогично переходу между флэйворными состояниями нейтрино.

Аналитически и численно исследованы два режима:

- Осцилляции в условиях симметричной системы (отсутствие внешнего ускорения) — аналог нейтринных осцилляций в вакууме.
- Модификация системы с введением внешнего ускорения одной из точек подвеса — аналог нейтринных осцилляций в веществе (MSW-эффект).

Выведены выражения для временной зависимости энергии каждого маятника, проанализировано влияние параметров модели (массы, жёсткость пружины, ускорение). Показано, что модель позволяет интуитивно воспроизводить как колебательный характер осцилляций, так и эффект подавления или усиления в зависимости от условий среды.

4.2 Выводы

- Построенная классическая модель успешно воспроизводит ключевые черты нейтринных осцилляций, включая периодический характер переходов, зависимость от разности частот (или масс), и подавление в присутствии внешнего воздействия.
- При отсутствии ускорения система эквивалентна двумассной осцилляционной модели в вакууме. Энергия, аналогичная вероятности нахождения нейтрино в том или ином флэйворе, осциллирует синусоидально.

- Введение постоянного ускорения приводит к асимметрии, изменяет частоты нормальных мод и подавляет амплитуду энергетического обмена, аналогично осцилляциям нейтрино в веществе.
- Численное моделирование с переменным ускорением (экспоненциальное затухание) иллюстрирует динамику при изменяющейся плотности среды, включая возможность резонансного перехода.
- Таким образом, простая механическая система может служить наглядной и физически корректной иллюстрацией сложного квантовомеханического явления, что делает её полезным инструментом для обучения и интуитивного понимания нейтринных осцилляций.

Приложения

А Вывод уравнений движения маятниковой модели

В этом приложении приведён полный аналитический вывод уравнений движения для модели двух связанных маятников, используемой в качестве классического аналога нейтринных осцилляций.

Кинематика системы

Обозначим:

- L_1, L_2 — длины маятников,
- m_1, m_2 — массы маятников,
- $\theta_1(t), \theta_2(t)$ — углы отклонения,
- $y_a(t), y_c(t)$ — вертикальные координаты точек подвеса.

Векторы положения шариков:

$$\mathbf{r}_b = \mathbf{r}_a + L_1 \begin{pmatrix} \sin \theta_1 \\ -\cos \theta_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_d = \mathbf{r}_c + L_2 \begin{pmatrix} \sin \theta_2 \\ -\cos \theta_2 \end{pmatrix}.$$

Скорости:

$$\mathbf{v}_1 = \dot{\mathbf{r}}_b = \begin{pmatrix} L_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 \\ \dot{y}_a + L_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \dot{\mathbf{r}}_d = \begin{pmatrix} L_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 \\ \dot{y}_c + L_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 \end{pmatrix}.$$

Энергии

Кинетическая энергия:

$$T_1 = \frac{m_1}{2}(L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \dot{y}_a^2 + 2\dot{y}_a L_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1),$$

$$T_2 = \frac{m_2}{2}(L_2^2 \dot{\theta}_2^2 + \dot{y}_c^2 + 2\dot{y}_c L_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2).$$

Потенциальная энергия:

$$U_1 = m_1 g (y_a - L_1 \cos \theta_1), \quad U_2 = m_2 g (y_c - L_2 \cos \theta_2).$$

Энергия упругости пружины:

Длина пружины:

$$\mathbf{l}(t) = \mathbf{r}_b + \begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix} - \mathbf{r}_d.$$

Начальная длина:

$$\mathbf{l}_0 = \mathbf{l} \Big|_{\theta_1 = \theta_2 = 0}.$$

Энергия:

$$U_{12} = \frac{k}{2} |\mathbf{l}(t) - \mathbf{l}_0|^2.$$

Лагранжиан и уравнения Эйлера–Лагранжа

Полный лагранжиан:

$$\mathcal{L} = T_1 + T_2 - U_1 - U_2 - U_{12}.$$

Уравнения движения:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_i} = 0, \quad i = 1, 2.$$

Приближение малых колебаний

Пусть $\theta_1, \theta_2 \ll 1$, тогда:

$$l - l_0 = L_1 \theta_1 - L_2 \theta_2, \quad \frac{\partial l}{\partial \theta_1} = L_1, \quad \frac{\partial l}{\partial \theta_2} = -L_2.$$

Получаем уравнения:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_1 + \frac{g}{L_1} \theta_1 + \frac{k}{m_1 L_1} (L_1 \theta_1 - L_2 \theta_2) &= 0, \\ \ddot{\theta}_2 + \frac{g}{L_2} \theta_2 - \frac{k}{m_2 L_2} (L_1 \theta_1 - L_2 \theta_2) &= 0. \end{aligned}$$

Собственные частоты

Предполагая решения $\theta_i(t) = A_i e^{i\omega t}$, получаем характеристическое уравнение. В случае $L_1 = L_2 = L$ получаем:

$$\omega_1^2 = \frac{g}{L}, \quad \omega_2^2 = \frac{g}{L} + \frac{k}{m_1} + \frac{k}{m_2}.$$

Разность частот $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ определяет период перераспределения энергии между маятниками.

Энергия и аналогия с осцилляциями

Обозначив $r = m_2/m_1$, окончательные выражения для энергий маятников:

$$\begin{aligned} \frac{E_1(t)}{E_1 + E_2} &= 1 - \frac{4r}{(1+r)^2} \sin^2 \left(\frac{\Delta\omega t}{2} \right), \\ \frac{E_2(t)}{E_1 + E_2} &= \frac{4r}{(1+r)^2} \sin^2 \left(\frac{\Delta\omega t}{2} \right). \end{aligned}$$

Эти выражения полностью аналогичны вероятностной интерпретации осцилляций между двумя флэйворными состояниями нейтрино.

Список литературы

- [1] Боум, Ф., Фогель, П. Физика массивных нейтрино / Пер. с англ. — М.: Мир, 1990. — 303 с.
- [2] «Нейтринные осцилляции», Ядерная физика в интернете, <http://nuclphys.sinp.msu.ru/neutrino1/neutrino09.htm>
- [3] Бедняков, В. А., Наумов, Д. В., Смирнов, О. Ю. Физика нейтрино и ОИЯИ // УФН. — 2016. — Т. 186. — С. 233–263.
- [4] Михеев, С. П., Смирнов, А. Ю. Резонансные осцилляции нейтрино в веществе // УФН. — 1987. — Т. 153, №1. — С. 3–58.
- [5] Bilenky, S. M. Introduction to the Physics of Massive and Mixed Neutrinos. — Springer, 2018. — 287 p.
- [6] Исшханов, Б. С., Капитонов, И. М., Юдин, Н. П. Частицы и атомные ядра: Учебник. — 2-е изд., испр. и доп. — М.: ЛКИ, 2007. — 584 с.
- [7] Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М. Теоретическая физика. Т. 1: Механика. — 4-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 224 с.
- [8] Gonzalez-Garcia, M. C., Maltoni, M. Phenomenology with Massive Neutrinos // Phys. Rept. — 2008. — Vol. 460. — P. 1–129. — arXiv:0704.1800 [hep-ph].