

# Спин-орбитальные эффекты в распадах (псевдо)скалярных частиц и дифракция закрученных квантовых состояний

Магистерская диссертация  
Профиль: Физика элементарных частиц

Выполнил студент: Н. С. Бородин

Научный руководитель: Д. В. Наумов

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова  
Филиал МГУ в г. Дубне

Дубна, 2026

**Объект исследования:** Закрученные состояния массивных фермионов, процессы их генерации в распадах элементарных частиц и дифракционное взаимодействие с макроскопическими апертурами.

**Предмет исследования:** Теоретическое описание процесса распада скалярной частицы на закрученные фермион-антифермионные пары и методы численного моделирования дифракционных картин как инструмента для измерения параметров этих состояний.

**Цель работы:** Исследование квантовомеханической структуры закрученных состояний фермионных пар в распадах скалярных частиц, поиск наблюдаемых эффектов в угловых и спиновых корреляциях, а также разработка методов их экспериментального определения с использованием дифракции.

- 1 Провести теоретический анализ дифракции закрученных состояний на апертурах (в рамках формализма Кирхгофа-Френеля) и применить метод расщепления шага по Фурье (SSFM) для анализа эволюции волновой функции.
- 2 Исследовать чувствительность дифракционных картин к величине и знаку орбитального углового момента (ОУМ).
- 3 Вывести выражение для волновой функции пары фермион-антифермион в двухчастичных распадах и осуществить переход в координатное пространство.
- 4 Выполнить разложение волновой функции в сферическом базисе и провести анализ ориентаций ОУМ-проекции для различных конфигураций спинов.

## Научная новизна:

- Разработан новый метод экспериментального определения параметров закрученности (величины и знака топологического заряда) массивных частиц с помощью дифракции на треугольных апертурах.
- Получено аналитическое выражение для волновой функции фермион-антифермионной пары в распадах скалярных и псевдоскалярных частиц.
- Исследована интерференция состояний смешанной четности и получены выражения для спин-орбитальных корреляций.

## Практическая значимость:

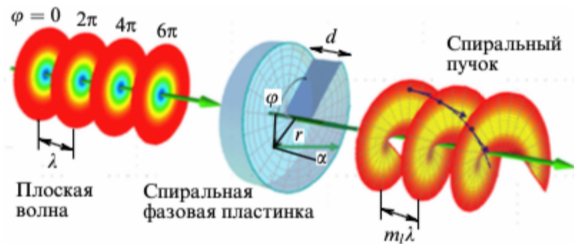
- Программный комплекс на базе SSFM может применяться для оптимизации детектирующих систем.
- Предложенные методы описания могут быть использованы в экспериментах на БАК (ATLAS, CMS) для поиска эффектов нарушения CP-инвариантности.

Классические и квантовые волны могут образовывать вихрь - фронт волны с геликоидной фазой и с циркулирующими плотностями тока.

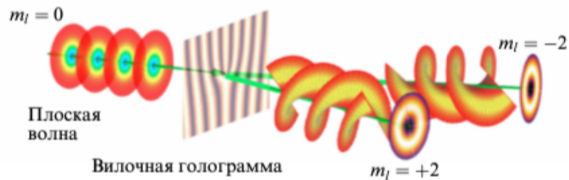
- 1 **Состояния со спиновым угловым моментом (СУМ):** возникают за счет вращения вектора поляризации. Проекция  $\hbar m_s$ , принимает значения  $m_s = \pm 1$ .
- 2 **Состояния с орбитальным угловым моментом (ОУМ):** возникают из-за вращения фазовой структуры. В отличие от спина, значение  $\hbar m_l$  теоретически неограничено и принимает значения  $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$
- 3 **Гибридные состояния:** спиновое и орбитальное взаимодействие взаимосвязаны. В таких пучках поляризация неоднородна по сечению.

Также закрученные состояния классифицируют по типу носителя: они могут быть как безмассовыми (фотонами), так и массивными (электроны и ионы).

## Спиральная фазовая пластинка



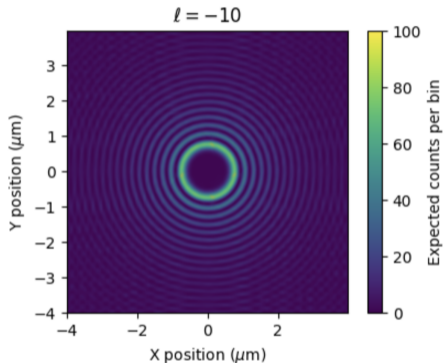
## Вилочная голограмма



# Численное моделирование дифракции (SSFM)

- Для анализа эволюции волновой функции закрученных состояний при прохождении через дифракционные маски применялся метод расщепления шага по Фурье (Split-Step Fourier Method, SSFM).
- Метод позволяет моделировать распространение волны в свободном пространстве и её взаимодействие с апертурами сложной формы.
- Исследовалась дифракция на различных апертурах (круговая, треугольная и др.) для определения величины и знака орбитального углового момента (ОУМ).

# Дифракция на круговой апертуре



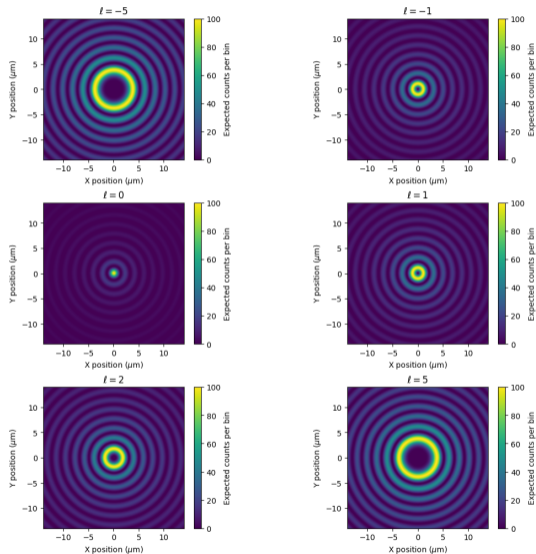
Радиус первого яркого кольца монотонно увеличивается с ростом  $|m|$ . Картина инвариантна к замене  $m \rightarrow -m$  (нечувствительность к знаку ОУМ).

**Аналитическое решение:**

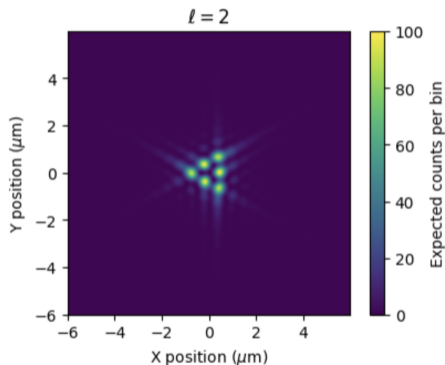
$$\Psi(x) \approx \frac{a \delta a}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\psi' \frac{e^{ikr}}{r} e^{-im\varphi} \times \left[ \left( ik - \frac{1}{r} \right) \frac{z}{r} + ik_z \right]$$

где  $a$  — радиус щели,  $\delta a$  — ширина щели,  $m$  — азимутальное квантовое число (ОУМ).

# Дифракция на круговой апертуре



# Дифракция на треугольной апертуре



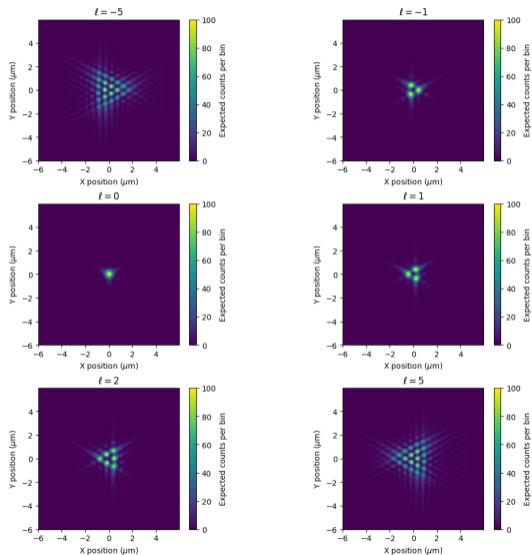
Нарушение осевой симметрии апертуры приводит к треугольной структуре паттерна и снимает вырождение по знаку ОУМ.

**Определение величины и знака  $m$ :**

- Величина  $|m|$  задает число точек (максимумов) на стороне треугольника:  
 $N_{\text{точек}} = |m| + 1$ .
- Ориентация треугольника картины относительно апертуры указывает на знак  $m$ .

где  $N_{\text{точек}}$  — количество главных интерференционных максимумов вдоль одной из сторон дифракционного треугольника.

# Дифракция на треугольной апертуре

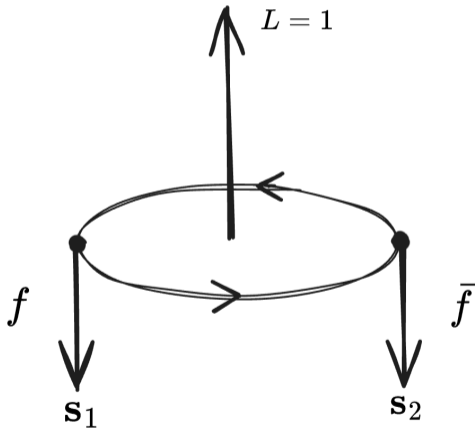


- Построена координатная волновая функция фермион-антифермионной пары, образующейся в двухчастичном распаде скалярной (псевдоскалярной) частицы.
- Для скалярного ( $0^+$ ) взаимодействия формируется чистое состояние с относительным орбитальным угловым моментом  $L = 1$ .
- Для псевдоскалярной ( $0^-$ ) связи реализуется состояние с  $L = 0$  в стандартной спин-синглетной конфигурации.
- Разрешено кажущееся противоречие между коллинеарным разлётом частиц в системе центра масс и ненулевым ОУМ: орбитальный момент  $L$  связан с относительной координатой пары.

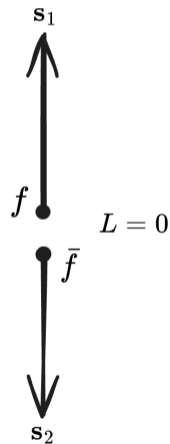
- **Поиск Новой физики:** в сценариях с нарушением  $CP$ -симметрии могут существовать состояния частицы с неопределённой  $CP$ -чётностью.
- **Интерференционный эффект:** ожидается интерференция между волновыми функциями с  $L = 1, S = 1$  (скалярный вклад) и  $L = 0, S = 0$  (псевдоскалярный вклад).
- **Новая методика:** предложен подход к определению  $CP$ -структуры взаимодействий путём анализа спин-орбитальных корреляций продуктов распада в координатном представлении.
- **Физический критерий:** доминирование конфигураций с антипараллельными спинами однозначно указывает на чисто псевдоскалярный характер связи ( $0^-$ ).

# Скаляр vs Псевдоскаляр

Скаляр



Псевдоскаляр



Для распада на пару фермиона  $f$  и антифермиона  $\bar{f}$  со спин-векторными 3-векторами  $\mathbf{s}_1$  и  $\mathbf{s}_2$ , соответственно.

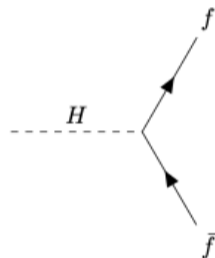
$$H \rightarrow f + \bar{f}, \quad (1)$$

Конечное состояние в импульсном пространстве

$$|f\bar{f}\rangle = \int \frac{d\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{p}_2}{(2\pi)^3} \frac{\tilde{\psi}_{r_1 r_2}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_1} 2E_{\mathbf{p}_2}}} |\mathbf{p}_1, r_1; \mathbf{p}_2, r_2\rangle, \quad (2)$$

Где двучастичное состояние

$$|\mathbf{p}_1, r_1; \mathbf{p}_2, r_2\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1} 2E_{\mathbf{p}_2}} a_{r_1}^\dagger(\mathbf{p}_1) b_{r_2}^\dagger(\mathbf{p}_2) |0\rangle, \quad (3)$$



# Волновая функция в импульсном пространстве

Поскольку  $S$ -матрица является оператором эволюции, проецируя квантовое состояние  $S|H\rangle$  на состояние Фока двух частиц  $\langle \mathbf{p}_1, r_1; \mathbf{p}_2, r_2 |$  получаем волновую функцию в импульсном представлении:

$$\tilde{\psi}_{r_1 r_2}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \frac{\langle \mathbf{p}_1, r_1; \mathbf{p}_2, r_2 | S | H \rangle}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_1} 2E_{\mathbf{p}_2}}} = (2\pi)^4 \delta^4(P - p_1 - p_2) \frac{i\mathcal{M}_{r_1 r_2}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_1} 2E_{\mathbf{p}_2}}}, \quad (4)$$

где  $P$  это 4-момент Бозона Хиггса. Плосковолновой элемент  $S$ -матрицы вычисляется в ведущем порядке в Стандартной Модели.

$$i\mathcal{M}_{r_1 r_2}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = i \frac{m_f}{v} \bar{u}_{r_1}(\mathbf{p}_1) v_{r_2}(\mathbf{p}_2), \quad (5)$$

# Волновая функция пары в координатном представлении

- Переход из импульсного пространства в конфигурационное осуществляется с помощью трехмерного преобразования Фурье.

$$\psi_{r_1 r_2}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \int \frac{d\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{p}_2}{(2\pi)^3} \tilde{\psi}_{r_1 r_2}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) e^{+i(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{x}_1 + \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{x}_2)} \quad (6)$$

- С учетом кинематики двухчастичного распада скалярного бозона в системе центра масс ( $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 = p\mathbf{n}$ ):

$$\psi_{r_1 r_2}(\mathbf{r}) = i \frac{m_f p}{16\pi^2 v} \int d\Omega_{\mathbf{n}} e^{ip\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}} \bar{u}_{r_1}(p\mathbf{n}) v_{r_2}(-p\mathbf{n}) \quad (7)$$

где  $\mathbf{r} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$  — относительная координата пары.

- Описание произвольных направлений осей квантования спинов  $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$  задается с помощью матриц  $SU(2)$ -вращений (D-матриц Вигнера).

# Плотность вероятности и структура конечного состояния

- Интегрирование по угловым переменным приводит к следующему выражению для волновой функции в координатном представлении:

$$\psi_{\rho_1\rho_2}(\mathbf{r}; \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = \frac{m_f p^2}{2\pi v} \chi_{\rho_1}^\dagger(\mathbf{s}_1) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \eta_{\rho_2}(\mathbf{s}_2) j_1(pr) \quad (8)$$

- Квадрат модуля волновой функции определяет пространственно-текстурное распределение плотности вероятности:

$$|\psi_{\rho_1\rho_2}|^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{m_f p^2}{2\pi v} \right)^2 j_1^2(pr) \left[ 1 + \rho_1\rho_2(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 - 2(\mathbf{s}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{s}_2 \cdot \hat{\mathbf{r}})) \right] \quad (9)$$

## Физические следствия:

- Множитель  $j_1(pr)$  и оператор  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{r}}$  в явном виде указывают на то, что относительное движение пары представляет собой чистую  $L = 1$  парциальную волну.
- Угловое распределение продуктов распада жестко коррелирует со спиновыми состояниями фермионов  $\rho_1, \rho_2$ .

# Орбитальный состав и правила отбора

- Разложение оператора спин-орбитальной связи по сферическим гармоникам  $Y_{1m}(\hat{r})$  позволяет явно выделить парциальные азимутальные вклады:

$$\psi_{\rho_1\rho_2}(\mathbf{r}; \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \frac{m_f p^2}{2\pi v} j_1(pr) \sum_{m=-1}^{+1} Y_{1m}(\hat{r}) A_m(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) \quad (10)$$

где  $A_m(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = \chi_{\rho_1}^\dagger(\mathbf{s}_1) \sigma_m^{(1)} \eta_{\rho_2}(\mathbf{s}_2)$  — чисто спиновые амплитуды.

- Правила отбора** при сонаправленных осях квантования ( $\mathbf{s}_1 = \mathbf{s}_2 \equiv \hat{\mathbf{s}}$ ):

## Параллельные спины ( $\rho_1 = \rho_2$ )

$$A_{\pm 1} \neq 0, \quad A_0 = 0$$

- Выделяется сектор ОУМ  $m = \pm 1$ .
- Волновая функция содержит угловую зависимость  $e^{\pm i\phi}$ .

## Антипараллельные спины ( $\rho_1 = -\rho_2$ )

$$A_0 \neq 0, \quad A_{\pm 1} = 0$$

- Вклад дает только проекция  $m = 0$ .
- Азимутальная зависимость отсутствует.

## Эталонные ориентации и $m$ -содержание

Оценивая два экстремума полярного угла  $\theta$  относительного вектора  $\hat{\mathbf{r}}$  к  $\mathbf{s}_1 = \mathbf{s}_2 \equiv \hat{\mathbf{s}}$  на основе (9), получаем:

- ①  $\mathbf{s}_1 = \mathbf{s}_2 = \hat{\mathbf{r}}$  ( $\theta = 0$ ): только антипараллельные результаты сохраняются,

$$|\psi|^2 \propto (1 - \rho_1 \rho_2),$$

и из правил отбора для (10) это проецируется на чистую  $m = 0$  компоненту,

$$\psi \propto j_1(pr) Y_{1,0}(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{s}}).$$

- ②  $\mathbf{s}_1 = \mathbf{s}_2 \perp \hat{\mathbf{r}}$  ( $\theta = \pi/2$ ): только параллельные результаты сохраняются,

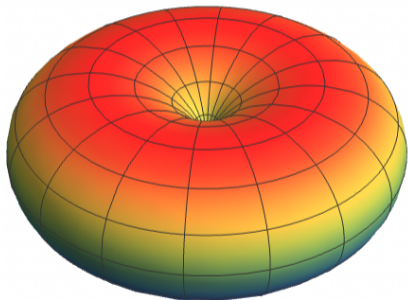
$$|\psi|^2 \propto (1 + \rho_1 \rho_2),$$

и правила отбора для (10) выбирают чистое  $m = \pm 1$  состояние,

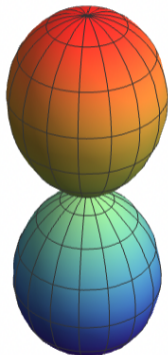
$$\psi \propto j_1(pr) [ Y_{1,+1}(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{s}}) \text{ or } Y_{1,-1}(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{s}}) ],$$

со знаком коррелирующем с  $(\rho_1, \rho_2)$  выбранными спинорными фазами.

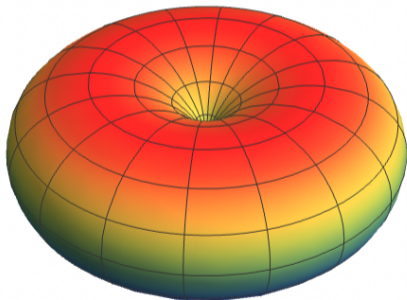
$$|Y_1^{-1}|^2$$



$$|Y_1^0|^2$$



$$|Y_1^1|^2$$



## Псевдоскалярный случай ( $0^-$ )

Для псевдоскалярной связи амплитуда это

$$i\mathcal{M}_{\rho_1\rho_2} = i \frac{m_f}{v} \bar{u}_{\rho_1}(\mathbf{p}\mathbf{n}, \mathbf{s}_1) \gamma^5 v_{\rho_2}(-\mathbf{p}\mathbf{n}, \mathbf{s}_2), \quad (11)$$

Тогда волновая функция для координатного представления

$$\psi_{\rho_1\rho_2}(\mathbf{r}; \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = \frac{m_f E_p}{2\pi v} j_0(pr) \chi_{\rho_1}^\dagger(\mathbf{s}_1) \eta_{\rho_2}(\mathbf{s}_2), \quad (12)$$

чистая  $L = 0$  волна. Модуль в квадрате выглядит как:

$$|\psi_{\rho_1\rho_2}|^2 = \left(\frac{m_f E_p}{2\pi v}\right)^2 j_0^2(pr) \frac{1}{2} [1 - \rho_1\rho_2 \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2]. \quad (13)$$

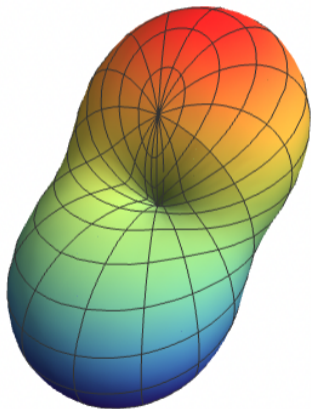
Для  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{C}$  мы можем разложить  $|\psi|^2$ , используя это равенство

$$\begin{aligned} |\psi|^2 &= |\varepsilon_1 \psi_S + \varepsilon_2 \psi_P|^2 \\ &= |\varepsilon_1|^2 |\psi_S|^2 + |\varepsilon_2|^2 |\psi_P|^2 + 2\Re(\varepsilon_1 \varepsilon_2^* \psi_S \psi_P^*) \end{aligned} \quad (14)$$

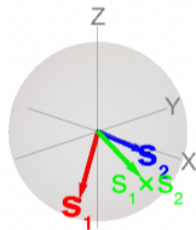
Полное выражение:

$$\begin{aligned} |\psi|^2 &= \frac{m_f^2}{4\pi^2 v^2} \left[ |\varepsilon_1|^2 p^4 j_1^2(pr) [1 + \rho_1 \rho_2 (\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 - 2(\mathbf{s}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{s}_2 \cdot \hat{\mathbf{r}}))] \right. \\ &\quad + |\varepsilon_2|^2 E_p^2 j_0^2(pr) [1 - \rho_1 \rho_2 (\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2)] \\ &\quad \left. + \varepsilon_1 \varepsilon_2^* j_0^2(pr) j_1^2(pr) \rho_1 \rho_2 \hat{\mathbf{r}} \cdot (\mathbf{s}_2 \times \mathbf{s}_1) \right] \end{aligned} \quad (15)$$





$$|\psi(\theta, \varphi)|^2$$










$$s_1 \cdot s_2 = 0.5, |s_1 \times s_2| = 0.9$$






- Успешно применен метод численного моделирования SSFM для анализа эволюции волновой функции при прохождении через дифракционные маски.
- Показано, что дифракция на треугольных апертурах позволяет однозначно определять величину и знак орбитального момента частиц.
- Построена координатно-пространственная волновая функция фермион–антифермионной пары из двухчастичного распада спин-нулевого бозона.
- Для скалярного ( $0^+$ ) взаимодействия получена чистая волна с  $L = 1$ :  
$$\psi(\mathbf{r}) \propto j_1(pr) \chi^\dagger(\mathbf{s}_1) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \eta(\mathbf{s}_2).$$
- Для псевдоскалярного ( $0^-$ ) взаимодействия получена чистая  $L = 0$  (S-волна).
- Исследована интерференция состояний смешанной четности, что дает новый метод определения CP-четности.

-  B A Knyazev and V G Serbo.  
Beams of photons with nonzero projections of orbital angular momenta: new results.  
*Physics-Uspexhi*, 61(5):449, may 2018.
-  Igor P. Ivanov, Nikolai Korchagin, Alexandr Pimikov, and Pengming Zhang.  
Twisted particle collisions: a new tool for spin physics.  
*Phys. Rev. D*, 101(9):096010, 2020.
-  D. V. Karlovets, S. S. Baturin, G. Geloni, G. K. Sizykh, and V. G. Serbo.  
Generation of vortex particles via generalized measurements.  
*The European Physical Journal C*, 82(11), November 2022.
-  Igor P. Ivanov, Nikolai Korchagin, Alexandr Pimikov, and Pengming Zhang.  
Kinematic surprises in twisted particle collisions.  
*Phys. Rev. D*, 101(1):016007, 2020.

-  A. Tumasyan et al.  
Cp structure of the tau yukawa coupling in  $h \rightarrow \tau\tau$  decays.  
In *Proceedings of the 2021 Large Hadron Collider Physics Conference*, volume 16 of *SciPost Phys. Proc.*, page 52, 2022.
-  Stefan Berge, Werner Bernreuther, and Sebastian Kirchner.  
Prospects of constraining the Higgs boson's CP nature in the tau decay channel at the LHC.  
*Phys. Rev. D*, 92:096012, 2015.
-  Stefan Berge and Werner Bernreuther.  
Determining the CP parity of Higgs bosons at the LHC in the tau to 1-prong decay channels.  
*Phys. Lett. B*, 671:470–476, 2009.

-  S. Berge, W. Bernreuther, B. Niepelt, and H. Spiesberger.  
How to pin down the CP quantum numbers of a Higgs boson in its tau decays at the LHC.  
*Phys. Rev. D*, 84:116003, 2011.
-  Stefan Berge, Werner Bernreuther, and Sebastian Kirchner.  
Determination of the Higgs CP-mixing angle in the tau decay channels at the LHC including the Drell-Yan background.  
*Eur. Phys. J. C*, 74(11):3164, 2014.
-  Stefan Berge, Werner Bernreuther, and Hubert Spiesberger.  
Higgs CP properties using the tau decay modes at the ILC.  
*Phys. Lett. B*, 727:488–495, 2013.
-  Serguei Chatrchyan et al.  
Measurement of the Properties of a Higgs Boson in the Four-Lepton Final State.  
*Phys. Rev. D*, 89(9):092007, 2014.

-  Georges Aad et al.  
Evidence for the spin-0 nature of the Higgs boson using ATLAS data.  
*Phys. Lett. B*, 726:120–144, 2013.
-  G. R. Bower, T. Pierzchala, Z. Was, and M. Worek.  
Measuring the Higgs boson's parity using tau  $\rightarrow$  rho nu.  
*Phys. Lett. B*, 543:227–234, 2002.
-  K. Desch, Z. Was, and M. Worek.  
Measuring the Higgs boson parity at a linear collider using the tau impact parameter and tau  $\rightarrow$  rho nu decay.  
*Eur. Phys. J. C*, 29:491–496, 2003.

 K. Desch, A. Imhof, Z. Was, and M. Worek.

Probing the CP nature of the Higgs boson at linear colliders with tau spin correlations:  
The Case of mixed scalar - pseudoscalar couplings.

*Phys. Lett. B*, 579:157–164, 2004.

 Z. Was and M. Worek.

Transverse spin effects in  $H/A \rightarrow \tau^+ \tau^-$ :  $\tau^+ \tau^- \rightarrow \nu X^{\pm}$ , Monte Carlo approach.

*Acta Phys. Polon. B*, 33:1875–1884, 2002.

 Malgorzata Worek.

Higgs CP from  $H / A_0 \rightarrow \tau \tau$  decay.

*Acta Phys. Polon. B*, 34:4549–4560, 2003.



Armen Tumasyan et al.

Analysis of the CP structure of the Yukawa coupling between the Higgs boson and  $\tau$  leptons in proton-proton collisions at  $\sqrt{s} = 13$  TeV.

*JHEP*, 06:012, 2022.



Albert M Sirunyan et al.

A measurement of the Higgs boson mass in the diphoton decay channel.

*Phys. Lett. B*, 805:135425, 2020.



Andrea Cardini.

Tau leptons as a tool to investigate the CP properties of the Higgs boson at CMS.

*SciPost Phys. Proc.*, 16:019, 2025.

## Приложение А: Вывод для круговой щели

Аналитическое решение для круговой апертуры в дальней зоне получается путем интегрирования по координатам щели  $(x', y')$  в полярном базисе  $(\rho', \phi')$  при условии узкой щели  $(\delta a \ll a)$ :

$$\Psi(x) \approx \frac{a \delta a}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\psi' \frac{e^{ikr}}{r} e^{-im\phi'} \left[ \left( ik - \frac{1}{r} \right) \frac{z}{r} + ik_z \right]$$

### Следствия из интегрального представления:

- В параксиальном приближении экспоненциальный набег фазы под интегралом приобретает вид  $e^{i(k_z z - m\phi')}$ .
- Интегрирование по азимутальному знаку  $d\psi'$  сводит выражение к функции Бесселя первого рода  $J_m(\kappa\rho)$ , где аргумент зависит от радиальной координаты детектора.
- Квадрат модуля  $|\Psi(x)|^2 \propto [J_m(\kappa\rho)]^2$  содержит только четные степени азимутального индекса, что математически доказывает инвариантность картины к замене  $m \rightarrow -m$ .

## Приложение Б: Математика интерференционных точек

Дифракция на равностороннем треугольнике со стороной  $L$  описывается через дифференциальный отбор  $|m|$ -го порядка в  $k$ -пространстве. Действие вихревого оператора на амплитуду Фурье  $\tilde{A}(k)$  имеет вид:

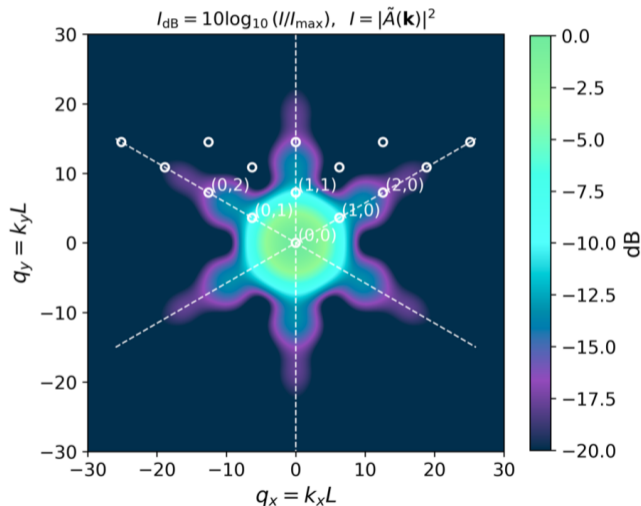
$$\tilde{A}_{\Psi_{in}}(k) \propto \sum_{p=0}^{|m|} \binom{|m|}{p} (\pm i)^{|m|-p} i^p \times \\ \times \partial_{k_x}^p \partial_{k_y}^{|m|-p} \tilde{A}(k)$$

### Вывод числа интерференционных максимумов ( $N$ ):

- Линейные формы обратной решетки  $\alpha = k \cdot e_1$  и  $\beta = k \cdot e_2$  формируют гексагональную сетку узлов пересечения линий конструктивной интерференции.
- Дифференцирование порядка  $|m|$  «подсвечивает» ограниченное подмножество узлов обратной решетки:  $p, q \geq 0$  и  $p + q \leq |m|$ .
- Итоговое число точек на стороне треугольника:

$$N_{\text{на стороне}} = |m| + 1$$

## Приложение Б: Гексагональная сетка узлов



### Структура обратного пространства:

- Пересечение семейств линий интерференции  $\alpha = 2\pi p$ ,  $\beta = 2\pi q$  формирует гексагональную симметрию паттерна.
- Вихревой оператор выделяет подмножество подсвеченных узлов  $(p, q)$ .
- Инверсия знака топологического заряда ( $m \rightarrow -m$ ) зеркально меняет ориентацию выделяемого треугольного мультиплета.

## Приложение В: Угловое интегрирование (Глава 2)

Переход от интеграла по единичной сфере к координатному представлению волновой функции  $L = 1$  для скалярной связи осуществляется через разложение плоской волны:

$$\psi_{\rho_1 \rho_2}(\mathbf{r}) = i \frac{m_f p}{16\pi^2 v} \int d\Omega_n e^{ip\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}} \left[ -2\rho \chi_{\rho_1}^\dagger(\mathbf{s}_1)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})\eta_{\rho_2}(\mathbf{s}_2) \right]$$

### Математический вывод:

- В силу нечетности подынтегральной функции вклад дает только первый порядок разложения плоской волны по сферическим гармоникам (Р-волна).
- Базовый угловой интеграл по сфере принимает векторный вид:

$$\int d\Omega_n e^{ip\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{n} = 4\pi i j_1(pr) \hat{\mathbf{r}}$$

- Подстановка данного интеграла в общее выражение сворачивает импульсный вектор  $\mathbf{n}$  в координатный орт  $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ , порождая оператор спин-орбитальной связи  $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{r}})$ :

$$\psi_{\rho_1 \rho_2}(\mathbf{r}; \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = \frac{m_f p^2}{2\pi v} \chi_{\rho_1}^\dagger(\mathbf{s}_1) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \eta_{\rho_2}(\mathbf{s}_2) j_1(pr)$$

## Приложение Г: Вывод СР-нечетного интерференционного члена

В смешанном случае  $(\epsilon_1\psi_S + \epsilon_2\psi_P)$  интерференционный вклад в плотность вероятности определяется перекрестным слагаемым  $2\Re(\epsilon_1\epsilon_2^*\psi_S\psi_P^*)$ :

$$\psi_S\psi_P^* \propto i j_0(pr)j_1(pr) \cdot \chi_{\rho_1}^\dagger(\mathbf{s}_1)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{r}})\eta_{\rho_2}(\mathbf{s}_2)\eta_{\rho_2}^\dagger(\mathbf{s}_2)\chi_{\rho_1}(\mathbf{s}_1)$$

### Алгебраические преобразования спинорных матриц:

- Использование матриц поляризации антифермиона  $\eta_{\rho_2}\eta_{\rho_2}^\dagger = \frac{1}{2}(1 - \rho_2\mathbf{s}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma})$  приводит к следующей свертке:

$$\begin{aligned} \chi_{\rho_1}^\dagger(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{r}})\frac{1}{2}(1 - \rho_2\mathbf{s}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma})\chi_{\rho_1} &= \frac{1}{2}\rho_1(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{s}_1) - \\ &- \frac{1}{2}\rho_2\chi_{\rho_1}^\dagger(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{r}})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{s}_2)\chi_{\rho_1} \end{aligned}$$

- Применяя тождество  $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{r}})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{s}_2) = \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{s}_2 + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{s}_2)$ , выделяем вещественную и мнимую части :

$$\chi_{\rho_1}^\dagger(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{r}})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{s}_2)\chi_{\rho_1} = \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{s}_2 + i\rho_1\mathbf{s}_1 \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{s}_2)$$

- Мнимая единица перед интегралом выделяет именно нечетное по спинам векторное произведение, давая итоговый вклад в плотность вероятности:

$m^2$