

Жесткие процессы с быстрой эволюцией в подходе факторизации при высоких энергиях

А. Чернышев

Филиал МГУ в г. Дубне & ЛТФ ОИЯИ

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., О.В. Теряев

Научный консультант:
проф., д.ф.-м.н., В.А. Салеев

Дубна
18 Июня 2026

Уравнение Балицкого–Фаина–Кураева–Липатова (БФКЛ):

$$[\partial_Y - \mathcal{H}] \mathcal{O} = 0,$$

где $\bar{\alpha}_\mu Y \propto \mathcal{O}(1)$, ядро

$$\mathcal{H} = \underbrace{\bar{\alpha}_\mu \mathcal{K}^{(0)}}_{\text{ЛП [BFKL '76-78]} \text{ ЛЛ} \propto \bar{\alpha}_\mu^l Y^l} + \underbrace{\bar{\alpha}_\mu^2 \mathcal{K}^{(1)}}_{\text{СЛП [FL '98]} \text{ СЛЛ} \propto \bar{\alpha}_\mu^{1+l} Y^l} + \mathcal{O}(\bar{\alpha}_\mu^3). \quad [\text{FL '18; B \& G. Chirilli '23; ...}]$$

- Конформная инвариантность $SL(2, \mathbb{C})$ [L. Lipatov '86];
- Интегрируемость $N_c \rightarrow \infty$ [L. Lipatov '93, 94; L. Faddeev & G. Korchemsky '95];
- $\mathcal{N} = 4$ SYM [A. Kotikov & L. Lipatov '00–13; S. Caron-Huot & M. Herranen '18];
- Аномальная размерность операторов твиста 2 [T. Jaroszewicz '82];
- Эффекты бега константы связи [... ; G. Chirilli & Y. Kovchegov '13, 14; A. Grabovsky '13; ...] ... (?);
- Нелинейные эффекты – уравнение Балицкого–Ковчегова (БК) [B '96; K '99].
- ...

“White paper” [M. Hentschinski *et al.* '23]: DESY HERA, FNAL Tevatron, CERN LHC и BNL EIC.

Струи Мюллера–Навелле (МН) [A. Mueller & H. Navelet '87]: $p + p \rightarrow \underbrace{j + \dots + j}_{Y \gg 1/\bar{\alpha}_\mu}$.

“Стандартная” схема расчетов:

- Коллинеарная факторизация ($\mu_F^2 \propto |\mathbf{p}_{\perp 1}| |\mathbf{p}_{\perp 2}| \gg \Lambda^2$):

$$\sigma = \sum_{\bar{i}_1, \bar{i}_2} \int \frac{dx_1}{x_1} \tilde{f}_{\bar{i}_1}(x_1, \mu_F^2) \int \frac{dx_2}{x_2} \tilde{f}_{\bar{i}_2}(x_2, \mu_F^2) H_{\bar{i}_1 \bar{i}_2}(x_{1,2}, \alpha_\mu) + \mathcal{O}\left(\frac{\Lambda^\#}{\mu_F^\#}\right);$$

- Коэффициентная функция при $Y \gg 1/\bar{\alpha}_\mu$:

$$H_{\bar{i}_1 \bar{i}_2}(x_{1,2}, \alpha_\mu) = \int_{\mathbf{l}_{\perp 1}} I_{\bar{i}_1}(\mathbf{p}_{\perp 1}, \mathbf{l}_{\perp 1}, y_1) \int_{\mathbf{l}_{\perp 2}} I_{\bar{i}_2}(\mathbf{p}_{\perp 2}, \mathbf{l}_{\perp 2}, y_2) O(\mathbf{l}_{\perp 1}, \mathbf{l}_{\perp 2}, Y) + \mathcal{O}\left(\bar{\alpha}_\mu^3 Y, e^{-Y}\right).$$

Известные “патологии”:

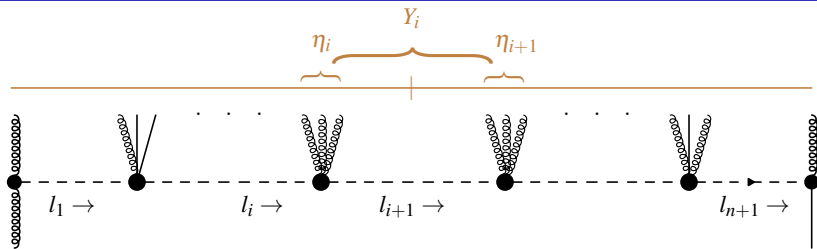
- СЛП ИФ: $I_{\bar{i}}(\mathbf{p}_\perp, \mathbf{l}_\perp, y) \supset \bar{\alpha}_\mu^2 b_0 \ln \mathbf{p}_\perp^2 / \mathbf{l}_\perp^2$, пересуммирование?
- СЛП функция Грина: точное решение?
- Область $Y \ll 1/\bar{\alpha}_\mu$?

Цели: исследование решения уравнения БФКЛ с бегущей константой связи и развитие концептуальной схемы расчетов жестких КХД процессов с быстрой эволюцией в подходе ФВЭ, ее применение к описанию рождения МН струй.

Задачи:

- 1 Построение замкнутой формы РГ-инвариантного решения уравнения БФКЛ с бегущей константой связи в произвольном порядке теории возмущений;
- 2 Расчет СЛЛ функции Грина, исследование ее свойств;
- 3 Расчет ФВЭ коэффициентных функций для рождения МН струй в подходе эффективного действия;
- 4 Построение схемы расчетов, связывающей локальные и нелокальные по быстрой эволюции ФВЭ коэффициентные функции;
- 5 Анализ результатов расчетов и их сравнение с экспериментальными данными FNAL Tevatron и CERN LHC.

Часть 1. Быстротная эволюция



Быстротный интервал: $Y = \left(\bigcup_{i=0}^{n+1} \eta_i \right) \cup \left(\bigcup_{i=0}^n Y_i \right)$.

Реджевский предел: $\eta_i \ll Y_i \ll Y$ и $1/\bar{\alpha}_\mu \ll Y$.

Факторизация амплитуд:

$$A_{\mu_0 \dots \mu_{n+1}}^{b_0 \dots b_{n+1}} = \text{tr} \left[\gamma_{\mu_0 -}^{b_0} (-l_1) \left[\prod_{i=1}^n D_\perp(l_i^2) \Gamma_{\mu_i + -}^{b_i}(l_i, -l_{i+1}) \right] S_\perp(l_{n+1}) \gamma_{\mu_{n+1} +}^{b_{n+1}}(l_{n+1}) \right] + \mathcal{O}(\bar{\alpha}_\mu^3 Y_i, e^{-Y_i})$$

- Реджезованные глюоны $\propto \mathcal{O}(1)$: ЛП [L. Lipatov '76] и СЛП [V. Fadin et al. '95];
- Реджезованные кварки $\propto \mathcal{O}(e^{-Y_i})$: ЛП [V. Fadin et al. '78] и СЛП [V. Fadin et al. '06];
- Нарушается в \mathcal{C}^2 ЛП [V. Fadin & L. Lipatov '18].

КХД в реджевском пределе_[L. Lipatov '95; et.al. '02, 05]: $S = \int d^4x \mathcal{L}(x)$.

КХД в реджевском пределе [L. Lipatov '95; et.al. '02, 05]: $S = \int d^4x \mathcal{L}(x)$.

Векторный потенциал: $A_\mu(x) + \frac{1}{2} \mathfrak{A}_+(x) n_\mu^- + \frac{1}{2} \mathfrak{A}_-(x) n_\mu^+$;

Поля глюонов: $A_\mu(x) = A_\mu^a(x) T_a$ и $\delta A_\mu(x) = \frac{i}{g} [\mathcal{D}_\mu, \theta(x)] + \mathcal{O}(\theta^2)$

$\mathcal{L}(x) \supset -\frac{1}{2} \text{tr} F^2(x) - \frac{1}{\xi} \text{tr} G^2(A) + c^*(x) \frac{\delta G(\delta A(x))}{\delta \theta(x)} c(x)$;

Поля реджезованных глюонов: $\mathfrak{A}_\pm(x) = \mathfrak{A}_\pm^a(x) T_a$, $\partial_\mp \mathfrak{A}_\pm(x) = 0$ и $\delta \mathfrak{A}_\pm(x) = 0$

$\mathcal{L}_0(x) \supset 4 \text{tr} \mathfrak{A}_+(x) \partial_\perp^2 \mathfrak{A}_-(x)$;

Индукцированные взаимодействия:

$\mathcal{L}_1(x) \supset \frac{i}{g} \text{tr} \left[\mathfrak{A}_+(x) \partial_\perp^2 \partial_- ([-\infty, x_+] - [x_+, -\infty]) + \mathfrak{A}_-(x) \partial_\perp^2 \partial_+ ([-\infty, x_-] - [x_-, -\infty]) \right]$,

где калибровочная линия:

$$[\pm\infty, x_\mp] = \text{P exp} \left[-\frac{ig}{2} \int_{\pm\infty}^{x_\mp} dx'_\mp A_\pm(x_\pm, x'_\mp, x_\perp) \right].$$

КХД в реджевском пределе_[L. Lipatov '95; et.al. '02, 05]: $S = \int d^4x \mathcal{L}(x)$.

Спинорное поле: $Q(x) + \Omega_+(x) + \Omega_-(x)$;

Поля кварков: $\delta Q(x) = i\theta(x)Q(x) + \mathcal{O}(\theta^2)$

$\mathcal{L}(x) \supset i\bar{Q}(x)\not{D}Q(x), \quad \mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + igA_\mu(x)$

Поля реджезованных кварков: $\partial_\mp \Omega_\pm(x) = 0, \not{n}_\mp \Omega_\pm(x)$ и $\delta \Omega_\pm(x) = 0$

$\mathcal{L}_0(x) \supset i\bar{\Omega}_+(x)\not{\partial}_\perp \Omega_-(x) + \text{h.c.};$

Индукцированные взаимодействия:

$\mathcal{L}_1(x) \supset \frac{i}{2} \bar{\Omega}_+(x) \not{\partial} ([x_+, -\infty] + [x_+, +\infty]) Q(x) + \frac{i}{2} \bar{\Omega}_-(x) \not{\partial} ([x_-, -\infty] + [x_-, +\infty]) Q(x) + \text{h.c.}$

где калибровочная линия:

$$[\pm\infty, x_\mp] = \text{P exp} \left[-\frac{ig}{2} \int_{\pm\infty}^{x_\mp} dx'_\mp A_\pm(x_\pm, x'_\mp, x_\perp) \right].$$

Квазиконформное представление (следует [v. Fadin et.al. 'late 2000s]):

$$\langle h' | \mathcal{K} | h \rangle = \sum_l \left[\bar{\alpha}_s^{l+1} [\mathcal{D}_\gamma] \delta(h - h') \right] \mathcal{X}^{(l)}(n, \gamma) + \mathcal{O}(\bar{\alpha}_\mu^{N+2}),$$

где $h = \gamma + n/2$ – голоморфный вес $SL(2, \mathbb{C})$, $\gamma = 1/2 + i\text{Im } \gamma$ и $n \in \mathbb{Z}$.

NB: голоморфная сепарабельность $\mathcal{X}^{(l)}(n, \gamma) = \#(h) + \#(h^*)$.

Квазиконформное представление (следуя [V. Fadin et al. 'late 2000s]):

$$\langle h' | \mathcal{K} | h \rangle = \sum_l \left[\bar{\alpha}_s^{l+1} [\mathcal{D}_\gamma] \delta(h-h') \right] \mathcal{X}^{(l)}(n, \gamma) + \mathcal{O}(\bar{\alpha}_\mu^{N+2}),$$

где $h = \gamma + n/2$ – голоморфный вес $SL(2, \mathbb{C})$, $\gamma = 1/2 + i\text{Im } \gamma$ и $n \in \mathbb{Z}$.

NB: голоморфная сепарабельность $\mathcal{X}^{(l)}(n, \gamma) = \#(h) + \#(h^*)$.

■ Бегущая константа связи:

$$\bar{\alpha}_s[\mathcal{D}_\gamma] = \exp \left[\mathcal{D}_\gamma \beta(\bar{\alpha}_\mu) \frac{d}{d\bar{\alpha}_\mu} \right] \bar{\alpha}_\mu, \quad \mathcal{D}_\gamma = \partial_\gamma - \ln \mu_R^2, \quad \beta(\bar{\alpha}_\mu) = - \sum_l b_l \bar{\alpha}_\mu^{l+2};$$

Квазиконформное представление (следуя [V. Fadin et al. 'late 2000s]):

$$\langle h' | \mathcal{K} | h \rangle = \sum_l \left[\bar{\alpha}_s^{l+1} [\mathcal{D}_\gamma] \delta(h-h') \right] \mathcal{X}^{(l)}(n, \gamma) + \mathcal{O}(\bar{\alpha}_\mu^{N+2}),$$

где $h = \gamma + n/2$ – голоморфный вес $SL(2, \mathbb{C})$, $\gamma = 1/2 + i\text{Im } \gamma$ и $n \in \mathbb{Z}$.

NB: голоморфная сепарабельность $\mathcal{X}^{(l)}(n, \gamma) = \#(h) + \#(h^*)$.

■ Бегущая константа связи:

$$\bar{\alpha}_s[\mathcal{D}_\gamma] = \exp \left[\mathcal{D}_\gamma \beta(\bar{\alpha}_\mu) \frac{d}{d\bar{\alpha}_\mu} \right] \bar{\alpha}_\mu, \quad \mathcal{D}_\gamma = \partial_\gamma - \ln \mu_R^2, \quad \beta(\bar{\alpha}_\mu) = - \sum_l b_l \bar{\alpha}_\mu^{l+2};$$

■ Структура ядра:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(n, \gamma) &= \chi(n, \gamma) + \check{\chi}(n, \gamma) = \text{“конф. + не конф. + } b_l\text{-члены”}, \\ \chi(n, \gamma) &= +\chi(n, 1-\gamma) \\ \check{\chi}(n, \gamma) &= -\check{\chi}(n, 1-\gamma) \end{aligned}$$

Инвариантно относительно $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{M}^{-1} \mathcal{K} \mathcal{M}$, где $\mathcal{M} = I - \sum_l \bar{\alpha}_\mu^{l+1} \mathcal{M}^{(l)}$.

Замкнутое (w.r.t. $\bar{\alpha}_\mu$) решение:

$$\langle h' | \mathcal{O}(Y) | h \rangle = \langle h' | \tilde{\mathcal{O}}(Y) | h \rangle \exp [\bar{\alpha}_\mu \chi(n, \gamma) Y],$$

где

$$\langle h' | \tilde{\mathcal{O}}(Y) | h \rangle = \exp [\bar{\alpha}_\mu \check{\chi}(n, \gamma) Y + \mathcal{P}[\mathcal{D}_\gamma + \bar{\alpha}_\mu \partial_\gamma \chi(n, \gamma) Y] Y] \delta(h - h').$$

Эффекты бега константы связи:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}[\mathcal{D}_\gamma] &= \sum_l \bar{\alpha}_\mu^{l+1} \sum_{l_1=0}^{l-1} \sum_{l_2=1}^{l-l_1} b_{l_1, l-l_1, l_2} \mathcal{X}^{(l_1)}(n, \gamma) \mathcal{D}_\gamma^{l_2}, \\ b_{l_1, l-l_1, l_2} &= \sum_{l'=1}^{l_1+1} C_{l'}^{l_1+1} \sum_{|l'_1|, |l'_2|=l'} \prod_{i=1}^{l'} b_{l'_{1,i}, l'_{2,i}}, \end{aligned}$$

здесь $l'_j = (l'_{j,i})$, $l'_{1,i} = \overline{1, l-l_1}$ и $l'_{2,i} = \overline{1, l_2}$.

- Реджевский предел $Y \rightarrow \infty$: $\langle h' | \mathcal{O}(Y) | h \rangle \propto (1/\sqrt{Y}) \exp[\omega Y]$;

- Реджевский предел $Y \rightarrow \infty$: $\langle h' | \mathcal{O}(Y) | h \rangle \propto (1/\sqrt{Y}) \exp[\omega Y]$;
- Конформный предел $\beta \rightarrow 0$: $\langle h' | \tilde{\mathcal{O}}(Y) | h \rangle \rightarrow I$;

- Реджевский предел $Y \rightarrow \infty$: $\langle h' | \mathcal{O}(Y) | h \rangle \propto (1/\sqrt{Y}) \exp[\omega Y]$;
- Конформный предел $\beta \rightarrow 0$: $\langle h' | \tilde{\mathcal{O}}(Y) | h \rangle \rightarrow I$;
- РГ-инвариантность: $\left[\mu_R^2 \partial_{\mu_R^2} - \beta(\bar{\alpha}_\mu) \partial_{\bar{\alpha}_\mu} \right] \langle h' | \mathcal{O}(Y) | h \rangle = \mathcal{O}(\bar{\alpha}_\mu^{N+2})$.

- Реджевский предел $Y \rightarrow \infty$: $\langle h' | \mathcal{O}(Y) | h \rangle \propto (1/\sqrt{Y}) \exp[\omega Y]$;
- Конформный предел $\beta \rightarrow 0$: $\langle h' | \tilde{\mathcal{O}}(Y) | h \rangle \rightarrow I$;
- РГ-инвариантность: $\left[\mu_R^2 \partial_{\mu_R^2} - \beta(\bar{\alpha}_\mu) \partial_{\bar{\alpha}_\mu} \right] \langle h' | \mathcal{O}(Y) | h \rangle = \mathcal{O}(\bar{\alpha}_\mu^{N+2})$.
- Схемно-независимые антисимметричные члены:

$$\check{\chi}^{(l)}(n, \gamma) \supset \sum_{l_1=0}^{l-1} \sum_{l_2=1}^{l-l_1} \frac{\delta_{1, l_2 \bmod 2}}{2^{l_2}} b_{l_1, l-l_1, l_2} \partial_\gamma^{l_2} \chi^{(l_1)}(n, \gamma).$$

Сравнение:

$$\text{СЛП}_{[V. Fadin \& L. Lipatov '95]} : \quad \check{\chi}^{(1)}(n, \gamma) = -\frac{1}{2} b_0 \partial_\gamma \chi^{(0)}(n, \gamma),$$

$$\text{С}^2\text{ЛП}_{[G. Chirilli \& Y. Kovchegov '14]} : \quad \check{\chi}^{(2)}(n, \gamma) = -\frac{1}{2} b_1 \partial_\gamma \chi^{(0)}(n, \gamma) - b_0 \partial_\gamma \chi^{(1)}(n, \gamma);$$

- Реджевский предел $Y \rightarrow \infty$: $\langle h' | \mathcal{O}(Y) | h \rangle \propto (1/\sqrt{Y}) \exp[\omega Y]$;
- Конформный предел $\beta \rightarrow 0$: $\langle h' | \tilde{\mathcal{O}}(Y) | h \rangle \rightarrow I$;
- РГ-инвариантность: $\left[\mu_R^2 \partial_{\mu_R^2} - \beta(\bar{\alpha}_\mu) \partial_{\bar{\alpha}_\mu} \right] \langle h' | \mathcal{O}(Y) | h \rangle = \mathcal{O}(\bar{\alpha}_\mu^{N+2})$.
- Схемно-независимые антисимметричные члены:

$$\check{\chi}^{(l)}(n, \gamma) \supset \sum_{l_1=0}^{l-1} \sum_{l_2=1}^{l-l_1} \frac{\delta_{1, l_2 \bmod 2}}{2^{l_2}} b_{l_1, l-l_1, l_2} \partial_\gamma^{l_2} \chi^{(l_1)}(n, \gamma).$$

Сравнение:

$$\text{СЛП}_{[V. Fadin \& L. Lipatov '95]} : \quad \check{\chi}^{(1)}(n, \gamma) = -\frac{1}{2} b_0 \partial_\gamma \chi^{(0)}(n, \gamma),$$

$$\text{С}^2\text{ЛП}_{[G. Chirilli \& Y. Kovchegov '14]} : \quad \check{\chi}^{(2)}(n, \gamma) = -\frac{1}{2} b_1 \partial_\gamma \chi^{(0)}(n, \gamma) - b_0 \partial_\gamma \chi^{(1)}(n, \gamma);$$

- Область применимости:

$$\ln \tilde{\mathcal{O}}_h(Y) \supset \frac{1}{8} \bar{\alpha}_\mu^5 Y^3 b_0^2 (\chi^{(0)}(n, \gamma))^2 d_\gamma^2 \chi^{(0)}(n, \gamma) \quad \longrightarrow \quad 1/\bar{\alpha}_\mu \ll Y \leq \#/\bar{\alpha}_\mu^{5/3},$$

где $\# = (56b_0^2 \zeta(3) \ln^2 2)^{1/3} \propto \mathcal{O}(1)$, в согласии с $_{[Y. Kovchegov \& A. Mueller '98; E. Levin '98]}$.

СЛЛ функция Грина:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(\mathbf{l}_{\perp 1}, \mathbf{l}_{\perp 2}, Y) &= \sum_n \int \frac{d\gamma}{2\pi^2 i |\mathbf{l}_{\perp 1}| |\mathbf{l}_{\perp 2}|} \exp [\bar{\alpha}_\mu (\chi(n, \gamma) + \Delta\chi(n, \gamma)) Y + in\Delta\psi] \\ &\times \left[1 - \bar{\alpha}_\mu^2 Y b_0 \chi^{(0)}(n, \gamma) \ln \frac{|\mathbf{l}_{\perp 1}| |\mathbf{l}_{\perp 2}|}{\mu_R^2} \right] \left(\frac{\mathbf{l}_{\perp 1}^2}{\mathbf{l}_{\perp 2}^2} \right)^{\gamma-1/2} + \mathcal{O}(\bar{\alpha}_\mu^2). \end{aligned}$$

СЛЛ функция Грина:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(\mathbf{l}_{\perp 1}, \mathbf{l}_{\perp 2}, Y) &= \sum_n \int \frac{d\gamma}{2\pi^2 i |\mathbf{l}_{\perp 1}| |\mathbf{l}_{\perp 2}|} \exp [\bar{\alpha}_\mu (\chi(n, \gamma) + \Delta\chi(n, \gamma)) Y + in\Delta\psi] \\ &\times \left[1 - \bar{\alpha}_\mu^2 Y b_0 \chi^{(0)}(n, \gamma) \ln \frac{|\mathbf{l}_{\perp 1}| |\mathbf{l}_{\perp 2}|}{\mu_R^2} \right] \left(\frac{\mathbf{l}_{\perp 1}^2}{\mathbf{l}_{\perp 2}^2} \right)^{\gamma-1/2} + \mathcal{O}(\bar{\alpha}_\mu^2). \end{aligned}$$

■ Характеристическая функция [А. Kotikov & L. Lipatov '00]:

$$\begin{aligned} \chi(n, \gamma) &= \chi^{(0)}(n, \gamma) + \bar{\alpha}_\mu \chi^{(1)}(n, \gamma) \\ \chi^{(0)}(n, \gamma) &= 2\psi(1) - 2\text{Re} \psi\left(\gamma + \frac{n}{2}\right), \\ \chi^{(1)}(n, \gamma) &= \Gamma_g^{(1)} \chi^{(0)}(n, \gamma) - \frac{1}{2} b_0 (\chi^{(0)}(n, \gamma))^2 + \frac{1}{4} \partial_\gamma^2 \chi^{(0)}(n, \gamma) + \frac{3}{2} \zeta(3) \\ &- \frac{\pi^2 \cos(\pi\gamma)}{4(1-2\gamma) \sin^2(\pi\gamma)} \left[\left(3 + \left(1 + \frac{N_f}{N_c^3} \right) \frac{2+3\gamma(1-\gamma)}{(1+2\gamma)(3-2\gamma)} \right) \delta_{0,n} \right. \\ &- \left. \left(1 + \frac{N_f}{N_c^3} \right) \frac{\gamma(1-\gamma)}{2(1+2\gamma)(3-2\gamma)} \delta_{2,n} \right] - \frac{1}{2} [F(n, \gamma) + \{\gamma \rightarrow 1-\gamma\}]. \end{aligned}$$

СЛЛ функция Грина:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(\mathbf{l}_{\perp 1}, \mathbf{l}_{\perp 2}, Y) &= \sum_n \int \frac{d\gamma}{2\pi^2 i |\mathbf{l}_{\perp 1}| |\mathbf{l}_{\perp 2}|} \exp [\bar{\alpha}_\mu (\chi(n, \gamma) + \Delta\chi(n, \gamma)) Y + in\Delta\Psi] \\ &\times \left[1 - \bar{\alpha}_\mu^2 Y b_0 \chi^{(0)}(n, \gamma) \ln \frac{|\mathbf{l}_{\perp 1}| |\mathbf{l}_{\perp 2}|}{\mu_R^2} \right] \left(\frac{\mathbf{l}_{\perp 1}^2}{\mathbf{l}_{\perp 2}^2} \right)^{\gamma-1/2} + \mathcal{O}(\bar{\alpha}_\mu^2). \end{aligned}$$

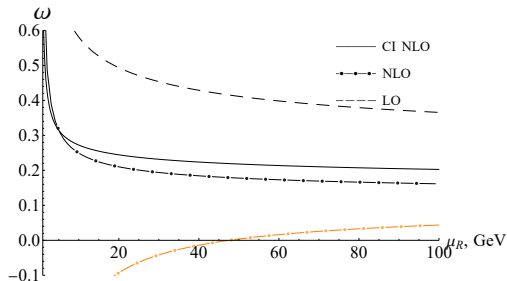
■ Коллинеарное пересуммирование (следуя [G. Salam '98]):

$$\begin{aligned} \Delta\chi(n, \gamma) &= \frac{1}{\bar{\alpha}_\mu} \sum_{l=1}^{\infty} \left[c_{1,2}(n) \bar{\alpha}_\mu - d_l(n, \gamma) - \sum_{l_1=0}^1 \sum_{l_2=1}^{2l_1+1} c_{l_1, l_2}(n) d_{l_1}^{-l_2}(n, \gamma) \bar{\alpha}_\mu^{l_1+1} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{2\bar{\alpha}_\mu [c_{0,1}(n) + c_{1,1}(n) \bar{\alpha}_\mu] + [c_{1,2}(n) \bar{\alpha}_\mu - d_l(n, \gamma)]^2} \right] + \{\gamma \rightarrow 1 - \gamma\}, \end{aligned}$$

где $d_l(n, \gamma) = l + \gamma + n/2$, $c_{0,1}(n) = 1$, $c_{1,3}(n) = -1/2$,

$$\begin{aligned} c_{1,1}(n) &= \Gamma_g^{(1)} + b_0 H_n + \frac{1}{4} \left[\psi' \left(\frac{n+2}{2} \right) - \psi' \left(\frac{n+1}{2} \right) \right] - \psi'(n+1) \\ &\quad - \frac{1}{36} \left(67 + 13 \frac{N_f}{N_c^3} \right) \delta_{0,n} - \frac{47}{1800} \left(1 + \frac{N_f}{N_c^3} \right) \delta_{2,n}, \\ c_{1,2}(n) &= -\frac{1}{2} b_0 + H_n - \frac{1}{12} \left(11 + 2 \frac{N_f}{N_c^3} \right) \delta_{0,n} - \frac{1}{60} \left(1 + \frac{N_f}{N_c^3} \right) \delta_{2,n}. \end{aligned}$$

NB: $\Delta\chi(n, \gamma) \propto \mathcal{O}(\bar{\alpha}_\mu^2)$.



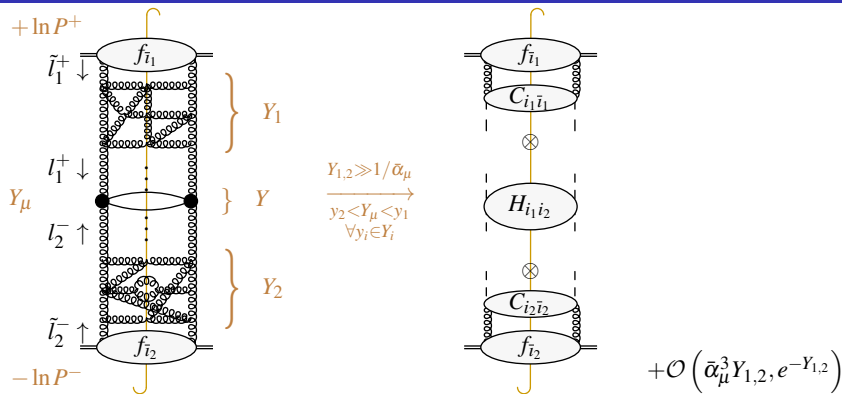
Интерсепт: $\omega = \bar{\alpha}_\mu \chi(n_*, \gamma_*) + \bar{\alpha}_\mu \Delta\chi(n_*, \gamma_*)$.

Седловая точка (n_*, γ_*) :

- ЛП: $n_* = 0$ и $\gamma_* = 1/2$;
- СЛП: $n_* = 0$ и $\gamma_* = \gamma_*(\bar{\alpha}_\mu)$ vs. $\gamma_* = 1/2$;
- Коллинеарно пересуммированное СЛП: $n_* = 0$ и $\gamma_* = 1/2$.

Часть 2. Быстрая факторизация

Быстротная факторизация



Быстротный интервал: $\ln P^+ P^- \simeq Y_1 + Y + Y_2$.

$$Y_1 \propto \ln \frac{1-z_1}{z_1} \frac{\mu Y}{|\mathbf{l}_{\perp 1}|},$$

$$Y \propto \frac{1}{2} \ln \frac{p_1^+}{p_2^+} \frac{p_2^-}{p_1^-},$$

$$Y_2 \propto \ln \frac{1-z_2}{z_2} \frac{\mu Y}{|\mathbf{l}_{\perp 2}|}.$$

где $z_1 = l_1^+ / \tilde{l}_1^+$ и $z_2 = l_2^- / \tilde{l}_2^-$.

NB: Y – произвольный.

Факторизация при высоких энергиях (ФВЭ)_[S. Catani *et al.* '90-94; J. Collins & R. Ellis '91]:

$$\sigma = \sum_{i_1, i_2} \int \frac{dx_1}{x_1} \frac{d^2 \mathbf{l}_{\perp 1}}{\pi} \Phi_{i_1} \left(x_1, \mathbf{l}_{\perp 1}^2, \mu_Y^2 \right) \\ \times \int \frac{dx_2}{x_2} \frac{d^2 \mathbf{l}_{\perp 2}}{\pi} \Phi_{i_2} \left(x_2, \mathbf{l}_{\perp 2}^2, \mu_Y^2 \right) H_{i_1 i_2} \left(x_{1,2}, \mathbf{l}_{\perp 1,2}, \bar{\alpha}_\mu \right) + \mathcal{O} \left(\frac{\Lambda^\#}{\mu_F^\#}, \bar{\alpha}_\mu^3 Y_{1,2}, e^{-Y_{1,2}} \right).$$

■ Коэффициентная функция:

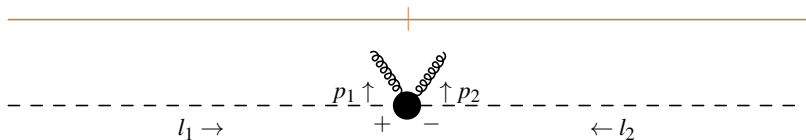
$$H_{i_1 i_2} \left(x_{1,2}, \mathbf{l}_{\perp 1,2}, \bar{\alpha}_\mu \right) \xleftarrow{\text{LSZ}} \langle T \dots \rangle \xleftarrow{Z} S.$$

■ Неинтегрированные ПФР:

$$\Phi_i \left(x, \mathbf{l}_\perp^2, \mu_Y^2 \right) = \sum_{\bar{i}} \int_x^1 \frac{dz}{z} C_{i\bar{i}} \left(x, z, \mathbf{l}_\perp^2, \mu_F^2, \mu_Y^2 \right) \tilde{f}_{\bar{i}} \left(\frac{x}{z}, \mu_F^2 \right).$$

Пересуммирование $\propto \alpha_\mu^l [Y_{1,2} - \ln |\mathbf{l}_{\perp 1,2}| / \mu_F]^l$.

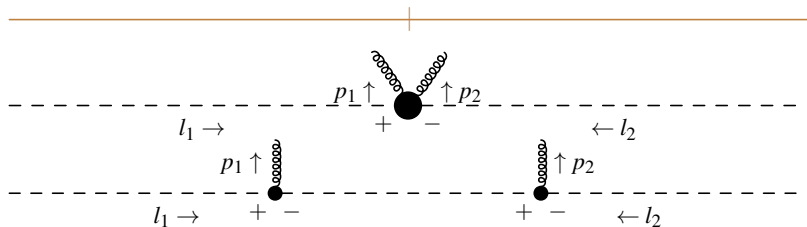
Часть 3. Струи Мюллера–Навеле



“ФВЭ” коэффициентная функция:

$$\frac{dH_{i_1 i_2}^{\text{HEF}}}{d^2 \mathbf{p}_{\perp 1} dy_1 d^2 \mathbf{p}_{\perp 2} dy_2} = \delta^{(4)}(l_1 + l_2 - p_1 - p_2) \frac{\overline{|A_{i_1 i_2}|^2}}{32\pi^2 l_1^+ l_2^-},$$

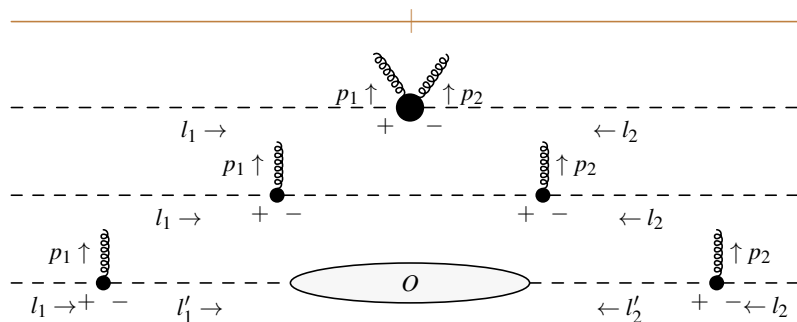
где $Y \ll 1/\bar{\alpha}_\mu$ и $Y \ll Y_{1,2}$.



“БФКЛ₀” коэффициентная функция:

$$\frac{dH_{i_1 i_2}^{\text{BFKL}_0}}{d^2 \mathbf{p}_{\perp 1} dy_1 d^2 \mathbf{p}_{\perp 2} dy_2} = \int_{\mathbf{l}'_{1,2}} I_{i_1}^+ (\mathbf{l}_{\perp 1}, \mathbf{l}'_{\perp 1}, y_1) \delta^{(2)} (\mathbf{l}'_{\perp 1} - \mathbf{l}'_{\perp 2}) I_{i_2}^- (\mathbf{l}_{\perp 2}, \mathbf{l}'_{\perp 2}, y_2) + \mathcal{O} (\bar{\alpha}_\mu^3 Y, e^{-Y}),$$

где $Y \propto 1/\bar{\alpha}_\mu$ и $Y \propto Y_{1,2}$.



“ФВЭ+БФКЛ” коэффициентная функция:

$$\frac{dH_{i_1 i_2}^{\text{BFKL}}}{d^2 \mathbf{p}_{\perp 1} dy_1 d^2 \mathbf{p}_{\perp 2} dy_2} = \int_{\mathbf{Y}'_{1,2}} I_{i_1}^+(\mathbf{Y}'_{\perp 1}, y_1) O(\mathbf{Y}'_{\perp 1}, \mathbf{Y}'_{\perp 2}, Y) I_{i_2}^-(\mathbf{Y}'_{\perp 2}, y_2) + \mathcal{O}(\bar{\alpha}_\mu^3 Y, e^{-Y}),$$

где $Y \gg 1/\bar{\alpha}_\mu$ и $Y \geq Y_{1,2}$.

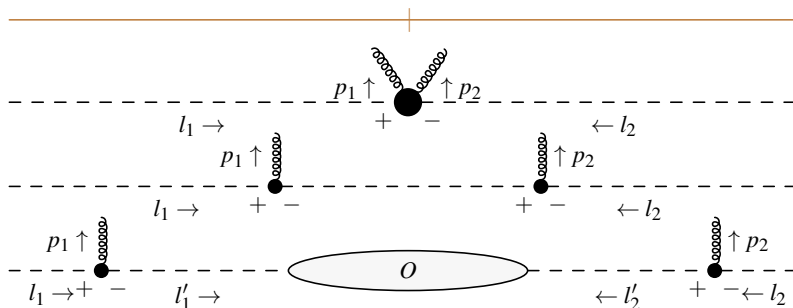


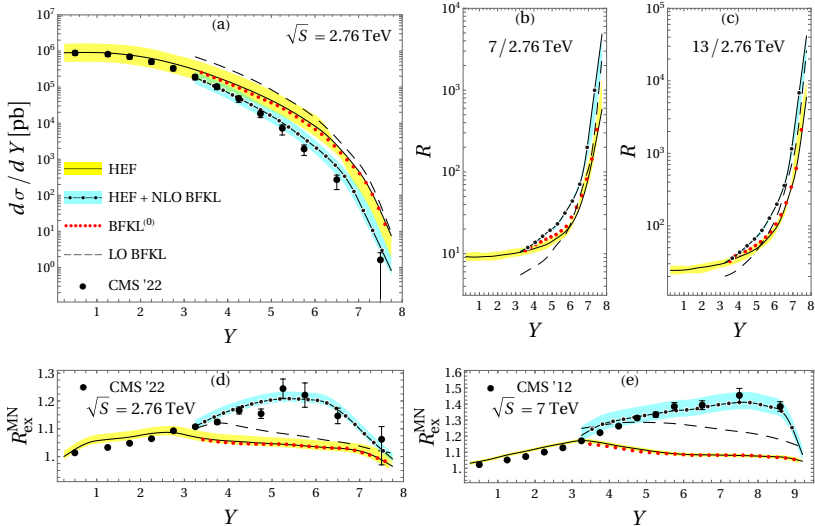
Схема сшивка коэффициентных функций:

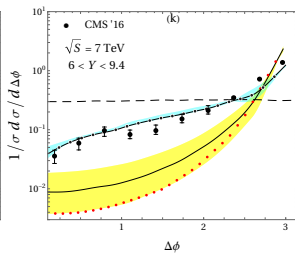
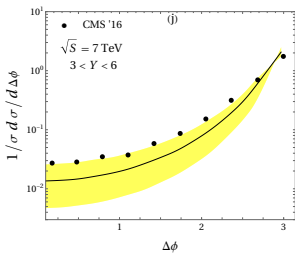
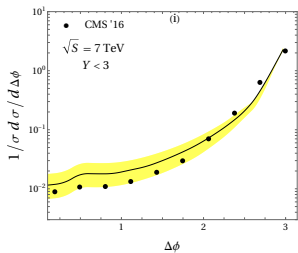
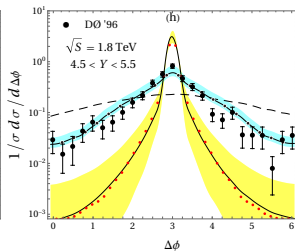
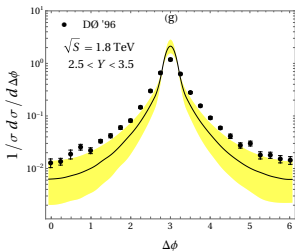
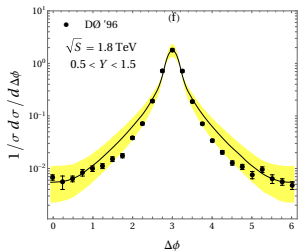
$$H_{i_1 i_2}^{\text{HEF+BFKL}} = H_{i_1 i_2}^{\text{HEF}} + H_{i_1 i_2}^{\text{BFKL}} - H_{i_1 i_2}^{\text{BFKL}_0}.$$

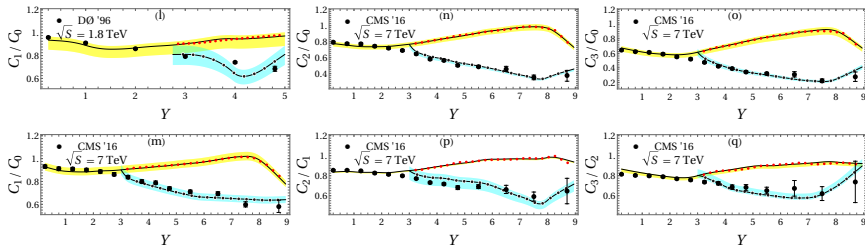
■ $\lim_{Y \rightarrow 0} H_{i_1 i_2}^{\text{BFKL}} - H_{i_1 i_2}^{\text{BFKL}_0} = \mathcal{O}(e^{-Y})$ – начальное условие;

■ $\lim_{Y \rightarrow \infty} H_{i_1 i_2}^{\text{HEF}} - H_{i_1 i_2}^{\text{BFKL}_0} = \mathcal{O}(e^{-Y})$ – определение.

NB: вклады определены при $Y \propto 1/\bar{\alpha}_\mu$, эйкональные поправки малы.







Угловые коэффициенты:

$$\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{d\Delta\phi} = \frac{1}{2\pi} \left[1 + 2 \sum_{l \geq 1} C_l(Y) \cos(l(\Delta\phi - \pi)) \right].$$

Публикации:

- **A. Chernyshev** and V. Saleev. Single isolated photon production in the NLO* approximation of the parton Reggeization approach // *Phys.Rev. D.* – 2024 – Vol. 110, no. 11. – P. 114031;
- **A. Chernyshev** and V. Saleev. Mueller–Navelet Dijet Production in the High–Energy Factorization Approach. // *Phys.Atom.Nucl.* – 2025 – Vol. 88, no. 4. – P. 773-778;
- **A. Chernyshev**, M. Nefedov and V. Saleev. New evidence for the rapidity evolution in Mueller–Navelet dijet production: BFKL, Sudakov, and RG–invariance // *arXiv:2506.10458*
- **A. Chernyshev**. Solution of the BFKL equation with running coupling // In preparation. – 2026.

Выступления (устные):

- 7th. *ICPPA* (МИФИ, Москва, РФ, Октябрь 2024);
- 25th. *QFTHEP* (МГУ, Москва, РФ, Июль 2025);
- *AQFT* (ЛТФ ОИЯИ, Дубна, РФ, Август 2025);
- *QCD@Extremes* (Цюрих, Швейцария (online), Сентябрь 2025);
- 12th. *REF Workshop* (INFN, Милан, Италия, Октябрь 2025).

Гранты:

- Фонд “БАЗИС”, грант “Лидер” #24–1–1–16–5;
- Фонд “БАЗИС”, трэвел грант #25–3–8–28–1.

- 1 Построено замкнутое решение уравнения БФКЛ с бегущей константой связи в произвольном порядке теории возмущений. Проведено его сравнение с другими известными результатами, показана их согласованность;
- 2 С полученным решением проведены расчеты СЛЛ функции Грина. Продемонстрировано отсутствие патологий фиксированного порядка;
- 3 Развита схема расчетов жестких КХД процессов с быстрой эволюцией в рамках подхода ФВЭ, включающая сшивку локальных и нелокальных по быстрой коэффициентных функций;
- 4 Вычислены локальные и нелокальные по быстрой ФВЭ коэффициентные функции для рождения МН струй в рамках подхода эффективного действия;
- 5 Развита схема расчетов применена для описания рождения МН струй. Анализ результатов расчетов и их сравнение с экспериментальными данными FNAL Tevatron и CERN LHC предоставляют недвусмысленные доказательства в поддержку проявления БФКЛ динамики в азимутальных декорреляциях и угловых коэффициентах.

Спасибо за внимание!