

# Всепетлевой эффективный потенциал произвольной массивной скалярной теории поля

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧЕРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В. ЛОМОНОСОВА»  
ФИЛИАЛ МГУ В Г. ДУБНА  
Направление подготовки 03.04.02 «Физика»  
Профиль «Физика элементарных частиц»

Студент: Головин А. Д.  
Научный руководитель: д.ф.-м.н., Ольшевский А. Г.  
Научный консультант: д.ф.-м.н., Казаков Д. И.

Дубна 2026

## Цель работы:

1. Получение решений уравнения Овсяникова-Калана-Симанчика на эффективный потенциал перенормируемой безмассовой  $\varphi^4$  модели в приближениях лидирующих логарифмов и следующих за лидирующими логарифмами.
2. Получение и решение уравнений обобщённой ренормализационной группы для неперенормируемой модели  $\varphi^6 \pm m^2\varphi^2$ .
3. Написание программы для численного решения уравнения обобщённой ренормализационной группы для неперенормируемой модели с нетривиальным минимумом, как уравнения в частных производных.

- Построение и решение уравнений обобщённой ренормализационной группы, суммирующих лидирующие вклады всех радиационных поправок в эффективный потенциал произвольной массивной скалярной теории поля, необходимо для обобщения данного подхода на более широкие классы моделей.
- Получение эффективного потенциала в модели степенного потенциала, содержащего нетривиальный минимум имеет теоретическое значение для подхода, в котором исследуются неперенормируемые модели, так как был разработан алгоритм получения численного решения уравнения обобщённой ренормализационной группы в приближении лидирующих логарифмов.

Динамику рассеяния в подходе внешнего поля определяет эффективное действие [Coleman, Weinberg '73]:

$$\Gamma(\varphi) = W(J) - \sum_i \int d^4x J_i(x) \varphi_i(x),$$

здесь  $W(J) = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_k} \frac{1}{n_1! n_2! \dots n_k!} \int d^4x_1 \dots d^4x_{n_1} d^4v_1 \dots d^4v_{n_2} \dots d^4\omega_1 \dots d^4\omega_{n_k} \times$

$$G^{(n_1, n_2, \dots, n_k)}(x_1, \dots, x_{n_1}, v_1, \dots, v_{n_2}, \dots, \omega_1, \dots, \omega_{n_k}) J(x_1) \dots J(x_{n_1}) J(v_1) \dots J(v_{n_2}) \dots J(\omega_1) \dots J(\omega_{n_k}),$$

Также  $W(J) = -i \log Z(J)$ , где

$$Z(J) = \int \mathcal{D}\varphi \exp \left[ i \int d^4x \left( \mathcal{L}(\varphi) + J_x \varphi_x \right) \right]$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi - g V^{tree}(\varphi) - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2$$

Здесь  $V^{tree}(\varphi)$  - эффективный потенциал произвольной скалярной теории поля в древесном приближении.

$$V_{eff} = \sum_{n=0}^{\infty} (-g)^n \left[ g V_n(\varphi) + \mathfrak{M}_n(\varphi) \right]$$

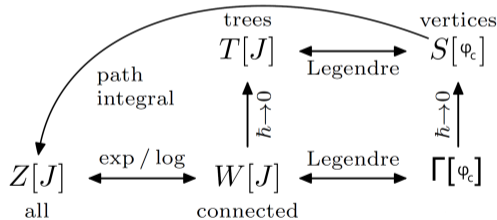
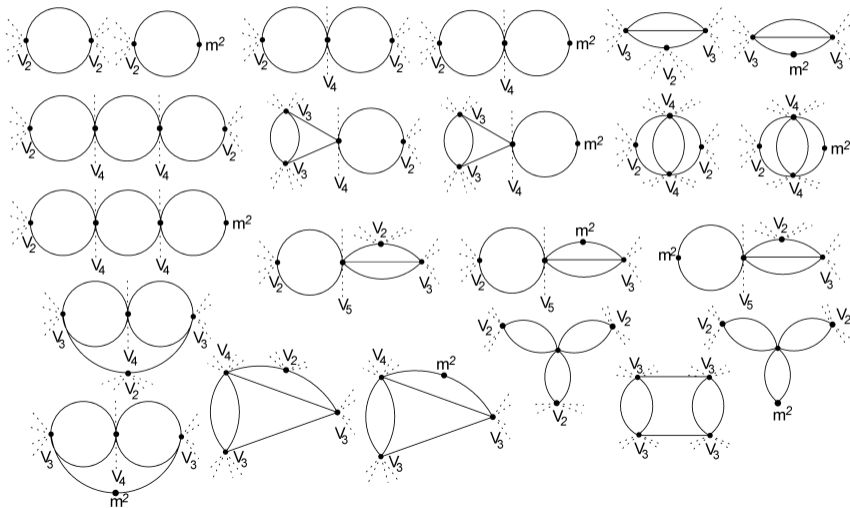


Figure 1 Данная иллюстрация взята из QFT II Lecture Notes [N. Beisert '2017] для пояснения связи между используемыми функционалами.

# Диаграммная техника

Диаграммы фейнмана в данном подходе даются набором вакуумных диаграмм с классическими внешними линиями (здесь и далее  $v_n = \frac{d^n V^{tree}}{d\varphi^n}$ ):



# $\mathcal{R}'$ -операция

Из теоремы Боголюбова-Парасюка после применения  $\mathcal{R}'$ -операции остаются лишь локальные контрчлены [Bogoliubow, Parasiuk'1957]

$$\mathcal{R}'G_n = \frac{A_n^{(n)}(\mu^2)^{n\varepsilon}}{\varepsilon^n} + \frac{A_{n-1}^{(n)}(\mu^2)^{(n-1)\varepsilon}}{\varepsilon^n} + \dots + \frac{A_1^{(n)}(\mu^2)^\varepsilon}{\varepsilon^n} \quad A_n^{(n)} = (-1)^{n+1} \frac{A_1^{(n)}}{n}$$

$$\mathcal{R}' \text{ n-loops} = \text{n-loops} + \text{n-1 loops} \text{ (1 loop)} + \dots + \text{1 loop} \text{ (n-1 loops)}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{R}'G = (1 - \sum_{\gamma} \mathcal{K}\mathcal{R}' - \sum_{\gamma\gamma'} \mathcal{K}\mathcal{R}'\mathcal{K}\mathcal{R}' - \dots)G$$

$$\mathcal{R}' \Delta V_n = \Delta V_n - \text{circle} \text{ (}\Delta V_{n-1}\text{)} - \text{circle} \text{ (}\Delta V_{n-1}\text{)} - \sum_{k=1}^{n-1} \text{circle} \text{ (}\Delta V_k\text{)} \text{ (circle) } \text{ (}\Delta V_{n-1-k}\text{)}$$

$$\mathcal{R}' \Delta \mathcal{M}_n = \Delta \mathcal{M}_n - \text{circle} \text{ (}\Delta V_{n-1}\text{)} - \text{circle} \text{ (}\Delta \mathcal{M}_{n-1}\text{)} - \sum_{k=1}^{n-1} \text{circle} \text{ (}\Delta \mathcal{M}_k\text{)} \text{ (circle) } \text{ (}\Delta V_{n-1-k}\text{)}$$

# Уравнения обобщенной ренормализационной группы

В символьном виде рекуррентные соотношения представляются выражениями:

$$n\Delta V_n = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \Delta V_k \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \Delta V_{n-1-k}, \quad n\Delta \mathfrak{M}_n = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \Delta \mathfrak{M}_k \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \Delta V_{n-1-k}.$$

Введём функции

$$\Sigma_g(z, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n \Delta V_n(\varphi) \quad \Sigma_m(z, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n \Delta \mathfrak{M}_n(\varphi), \quad z = \frac{g}{\varepsilon}$$

Тогда взяв производную по  $z$  от обеих частей рекуррентных соотношений, просуммированных по  $z$

$$\frac{\partial}{\partial z} \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n n \Delta V_n = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{4} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} (-z)^k \Delta V_k \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} (-z)^{n-1-k} \Delta V_{n-1-k}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n n \Delta \mathfrak{M}_n = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} (-z)^k \Delta \mathfrak{M}_k \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} (-z)^{n-1-k} \Delta V_{n-1-k}$$

получим систему уравнений обобщенной ренормализационной группы:

$$\frac{\partial \Sigma_g}{\partial z} = -\frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2 \Sigma_g}{\partial \varphi^2} \right)^2, \quad \Sigma_g(0, \varphi) = V_0(\varphi) = V^{tree}(\varphi),$$

$$\frac{\partial \Sigma_m}{\partial z} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Sigma_g}{\partial \varphi^2} \frac{\partial^2 \Sigma_m}{\partial \varphi^2}, \quad \Sigma_m(0, \varphi) = \mathfrak{M}_0(\varphi) = \frac{m^2 \varphi^2}{2}.$$

$$\frac{\partial \Sigma_g}{\partial z} = -\frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2 \Sigma_g}{\partial \varphi^2} \right)^2, \quad \Sigma_g(0, \varphi) = V_0(\varphi) = V^{tree}(\varphi), \quad (1)$$

$$\frac{\partial \Sigma_m}{\partial z} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Sigma_g}{\partial \varphi^2} \frac{\partial^2 \Sigma_m}{\partial \varphi^2}, \quad \Sigma_m(0, \varphi) = \mathfrak{M}_0(\varphi) = \frac{m^2 \varphi^2}{2}. \quad (2)$$

Эффективный потенциал даётся формулой:

$$V_{eff} = \left( g \Sigma_g(z, \varphi) + \Sigma_m(z, \varphi) \right) \Big|_{z \rightarrow -\frac{g}{16\pi^2} \log(gv_2 / \mu^2)}$$

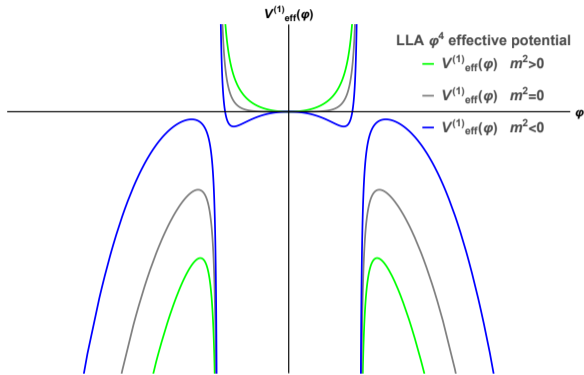
В случае степенного потенциала части, которого перенормируются поотдельности можно ввести новую безразмерную переменную  $y = \varphi^{4-p} z$ :

$$\Sigma_g(z, \varphi) = \frac{\varphi^p}{p!} f_1(y) \quad \Sigma_m(z, \varphi) = \frac{m^2 \varphi^2}{2} f_2(y)$$

Тогда система нелинейных УРЧП (1,2) становится системой ОДУ:

$$-4p! f_1'(y) = \left[ p(p-1) f_1(y) + (p-4)(3p-5) y f_1'(y) + (p-4)^2 y^2 f_1''(y) \right]^2, \quad f_1(0) = 1, \quad f_1'(0) = -\frac{p(p-1)}{4(p-2)!}$$

$$-2p! f_2'(y) = \left[ p(p-1) f_1(y) + (p-4)(3p-5) y f_1'(y) + (p-4)^2 y^2 f_1''(y) \right] \cdot \left[ 2f_2(y) + (p-4)(p-1) y f_2'(y) + (p-4)^2 y^2 f_2''(y) \right], \quad f_2(0) = 1, \quad f_2'(0) = -\frac{1}{(p-2)!}$$



**Figure 2** Зелёной, синей и серой кривыми изображены эффективные потенциалы в приближении лидирующих логарифмов в  $\varphi^4 + m^2 \varphi^2$ ,  $\varphi^4 - m^2 \varphi^2$  и безмассовой  $\varphi^4$  моделях соответственно.

$$V_{\text{eff}}^{(1)}(\varphi) = \frac{\varphi^4}{4!} \frac{g}{1 - \frac{3}{2} g \log \frac{gv_2}{\mu^2}} + \frac{m^2 \varphi^2}{2} \left( \frac{1}{1 - \frac{3}{2} g \log \frac{gv_2}{\mu^2}} \right)^{1/3}$$

При  $p = 4$  система нелинейных ОДУ упрощается до системы линейных ОДУ с разделяющимися переменными ( $y = \varphi^0 z = z$ ):

$$f_1'(z) = -\frac{3}{2} f_1(z)^2, \quad f_2'(z) = -\frac{1}{2} f_1(z) \cdot f_2(z)$$

$$f_1(\pm 0) = f_2(\pm 0) = 1,$$

И решения уравнений на  $f_1(z)$ ,  $f_2(z)$  воспроизводят хорошо известные в литературе перенормируемой  $\varphi^4$  теории.

$$f_1(z) = \frac{1}{1 + \frac{3}{2}z} \quad f_2(z) = \left( \frac{1}{1 + \frac{3}{2}z} \right)^{1/3}$$

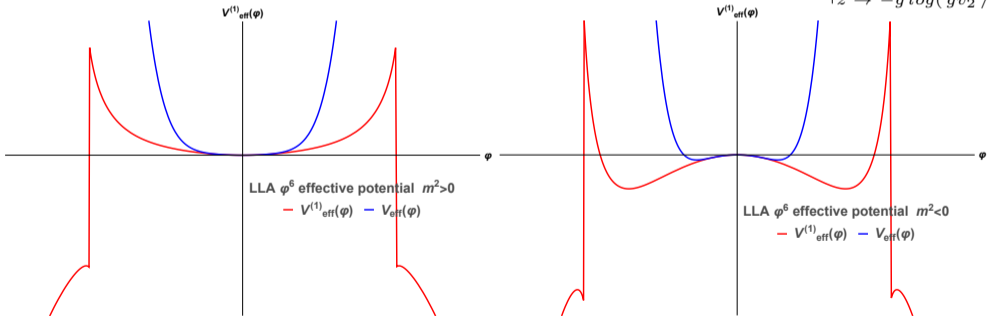
При  $p = 6$ , система ОДУ является существенно нелинейной:

$$-720 f_1'(y) = \left[ 15 f_1(y) + 13 y f_1'(y) + 2 y^2 f_1''(y) \right]^2, \quad (3)$$

$$-2p! f_2'(y) = \left[ 15 f_1(y) + 13 y f_1'(y) + 2 y^2 f_1''(y) \right] \cdot \left[ f_2(y) + 5 y f_2'(y) + 2 y^2 f_2''(y) \right], \quad (4)$$

с граничными условиями:  $f_1(0) = 1, f_1'(0) = -\frac{5}{16}$        $f_2(0) = 1, f_2'(0) = -\frac{1}{(p-2)!}$

Эффективный потенциал даётся выражением:  $V_{eff}^{(1)} = \left( \frac{g\varphi^6}{6!} f_1(y) + \frac{m^2\varphi^2}{2} f_2(y) \right) \Big|_{z \rightarrow -g \log(gv_2 / \mu^2)}$



**Figure 3** Красной кривой показан эффективный потенциал в приближении лидирующих логарифмов, синей кривой – древесный эффективный потенциал в массивной  $\varphi^6$  модели.

# Потенциал с нетривиальным минимумом

Исследуемый в работе эффективный потенциал содержит нетривиальный минимум:

$$V^{tree}(\varphi) = g \frac{\varphi^2}{m^2} (\varphi^2 - m^2)^2 = g \left( \frac{\varphi^6}{m^2} - 2\varphi^4 + m^2\varphi^2 \right), \quad (5)$$

$$\mathcal{R}' \Delta V_n = \Delta V_{n-1} - \text{circle} - \Delta V_{n-1} - \Delta V_{n-1} - \text{circle} - \sum_{k=1}^{n-1} \Delta V_k - \text{circle} - \Delta V_{n-1-k}$$

$$n\Delta V_n = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \Delta V_k \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \Delta V_{n-1-k}.$$

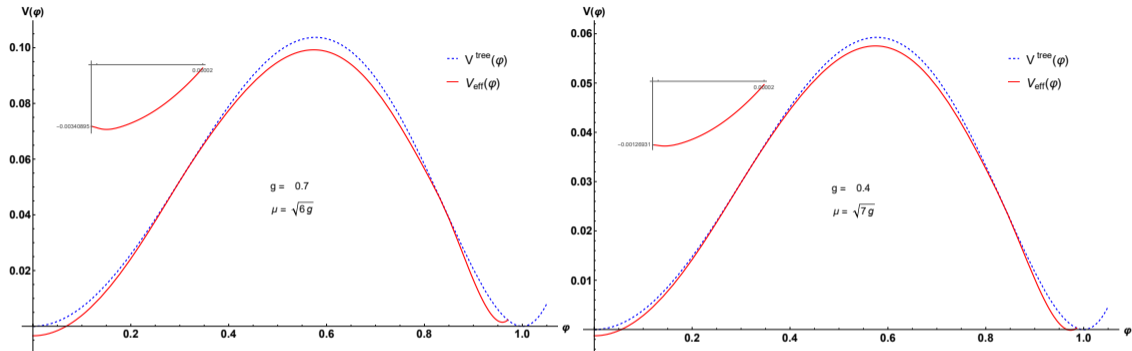
$$\frac{\partial \Sigma}{\partial z} = -\frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \varphi^2} \right)^2, \quad \Sigma(0, \varphi) = V^{tree}(\varphi), \quad (6)$$

$$V_{eff} = g\Sigma(z, \varphi)|_{z \rightarrow -g \log(g v_2 / \mu^2)}, \quad \text{где } v_2 = \frac{d^2 V^{tree}}{d\varphi^2}$$

Ширина распада ложного вакуума в истинный может быть вычислена по формуле [\[Coleman'1977\]](#):

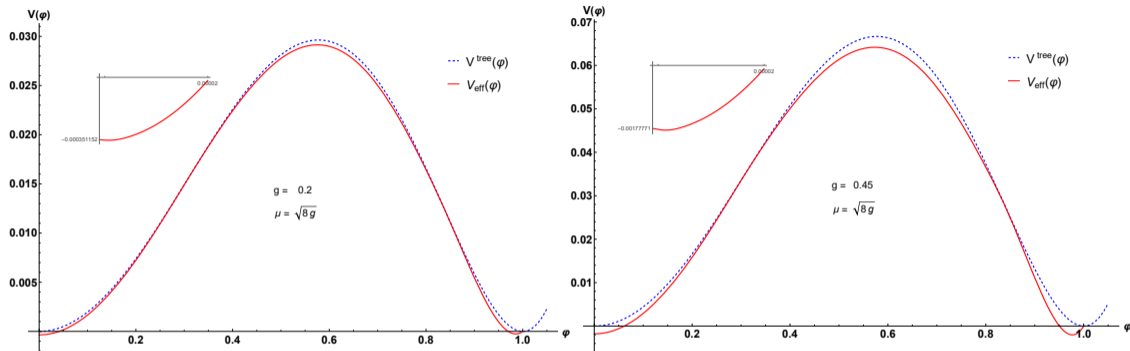
$$\Gamma \sim \exp \left[ -2 \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} d\varphi \sqrt{2mV_{eff}(\varphi)} \right].$$

# Потенциал с нетривиальным минимумом



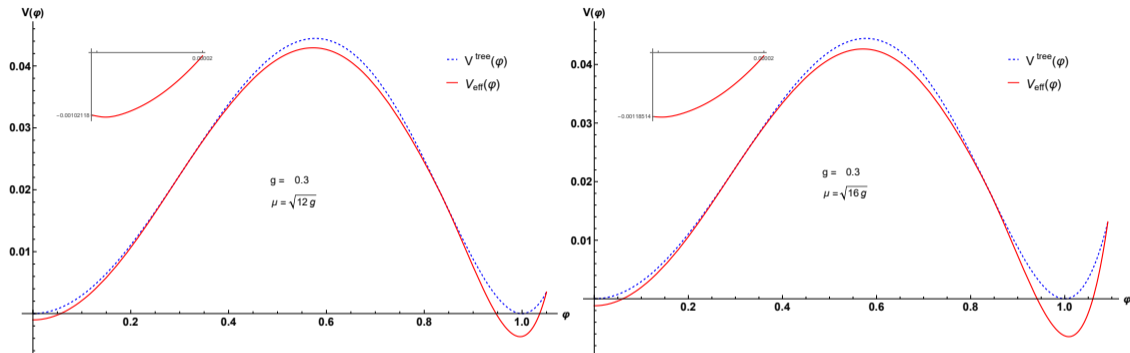
**Figure 4** Красной кривой показан эффективный потенциал в приближении лидирующих логарифмов, синей кривой – древесный эффективный потенциал в  $\varphi^2(\varphi^2 - m^2)^2$  модели.

# Потенциал с нетривиальным минимумом



**Figure 5** Красной кривой показан эффективный потенциал в приближении лидирующих логарифмов, синей кривой – древесный эффективный потенциал в  $\varphi^2(\varphi^2 - m^2)^2$  модели.

# Потенциал с нетривиальным минимумом



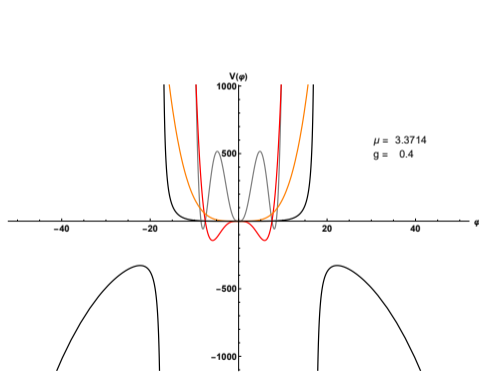
**Figure 6** Красной кривой показан эффективный потенциал в приближении лидирующих логарифмов, синей кривой – древесный эффективный потенциал в  $\varphi^2(\varphi^2 - m^2)^2$  модели.

- Были получены решения уравнения Овсяникова-Калана-Симанчика на эффективный потенциал перенормируемой безмассовой  $\varphi^4$  модели в приближениях лидирующих логарифмов и следующих за лидирующими логарифмами.
- Были построены и решены уравнения обобщённой ренормализационной группы, суммирующие лидирующие вклады в эффективный потенциал массивной скалярной теории поля для случая степенного потенциала.
- Был разработан метод решения нелинейного УРЧП (6).
- Был получен эффективный потенциал в модели потенциала с нетривиальным минимумом в приближении старших логарифмов, а также исследована его зависимость от параметров  $\mu$  и  $g$ .

Спасибо за внимание

Уравнение Овсянникова-Каллана-Симанчика:  $\left[ \mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} - 2\gamma_2(g) \right] V_{eff}(t, g) = 0$ , где  $t = \ln \frac{g\varphi^2}{\mu^2}$

Его решение:  $V_{eff}\left(\frac{\varphi^2}{\mu^2}, g\right) = V_{eff}(1, \bar{g}) \exp\left[\int_g^{\bar{g}} dg' \frac{\gamma_2(g')}{\beta(g')}\right]$ ,



$\beta$ -функция для безмассовой перенормируемой теории выражается через аномальные размерности 4- и 2- точечных функций Грина:  $\beta(g) = g(\gamma_4(g) + 2\gamma_2(g))$ .

В приближении ЛЛ имеем  $\gamma_4^{(0)}(g) = \frac{3}{2}g$

и  $\gamma_2^{(0)}(g) = 0$ , тогда ДУ на  $\bar{g}$ :

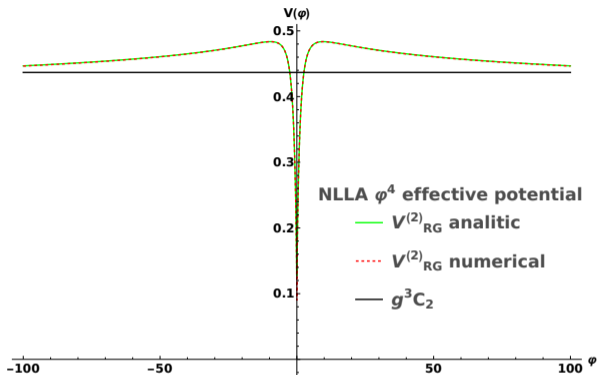
$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{g}(t, g) = \frac{3}{2}g^2, \quad \text{с г. у. : } \bar{g}(0, g) = g.$$

Его решение  $\bar{g} = \frac{g}{1 - \frac{3g}{2} \ln \frac{g\varphi^2}{\mu^2}}$ .

Эффективный потенциал в приближении ЛЛ:

$$V_{eff}\left(\frac{\varphi^2}{\mu^2}, g\right) = V_{eff}(1, \bar{g}).$$

**Figure 7** Оранжевой, черной, красной и серой кривыми изображены древесный эффективный потенциал, эффективный потенциал в ЛЛ приближении, первая и вторая радиационные поправки в безмассовой  $\varphi^4$  модели соответственно.



**Figure 8** Красной и зелёной кривыми изображены эффективный потенциал с аналитически и численно полученными решениями ДУ на эффективный заряд в СЛЛ приближении в безмассовой  $\varphi^4$  модели соответственно. Чёрной кривой изображена константа из диаграммы сансет умноженная на  $g^3$ .

Эффективный потенциал в приближении СЛЛ:

$$V_{eff}\left(\frac{\varphi^2}{\mu^2}, g\right) = V_{eff}(1, \bar{g}) \left| \frac{9/17 - \bar{g}(t, g)}{9/17 - g} \right|^{1/34}.$$

В СЛЛ приближении

$$\gamma_4^{(1)}(\bar{g}) = \frac{3}{2}g + 3g^2, \gamma_2^{(1)}(g) = \frac{1}{12}g^2$$

$$\beta(g) = g(\gamma_4(g) + 2\gamma_2(g)).$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{g}(t, g) = \frac{3}{2}g^2 - \frac{17}{6}g^3, \quad \text{с г. у.: } \bar{g}(0, g) = g.$$

Его решение:

$$\bar{g}\left(g, \frac{\varphi^2}{\mu^2}\right) = \frac{9}{17 \left( 1 + W_0 \left( \frac{(9 - 17g) \exp\left(\frac{9}{17g} - 1\right)}{17g \left(\frac{g\varphi^2}{\mu^2}\right)^{27/34}} \right) \right)}.$$

Вклад аномальной размерности:

$$\int_g^{\bar{g}} dg' \frac{\gamma_2(g')}{\beta(g')} = \frac{1}{34} \ln \left| \frac{9}{17} - \bar{g}(t, g) \right|.$$