

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
"МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
М.В.ЛОМОНОСОВА"
ФИЛИАЛ МГУ в г. Дубне

Направление: 03.04.02 "Физика"
Профиль: Физика элементарных частиц

Вакуумные эффекты и релятивистское вращение в столкновениях тяжелых ионов

Студент: Прохоров Д.В.
Научный руководитель: проф., д. ф.-м. н. Теряев О.В.

18.06.2026
Дубна

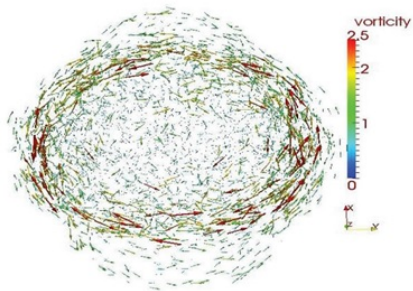
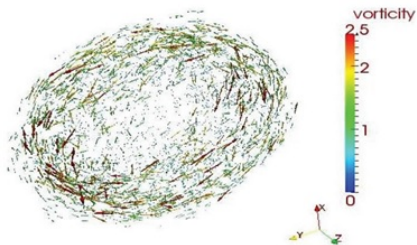
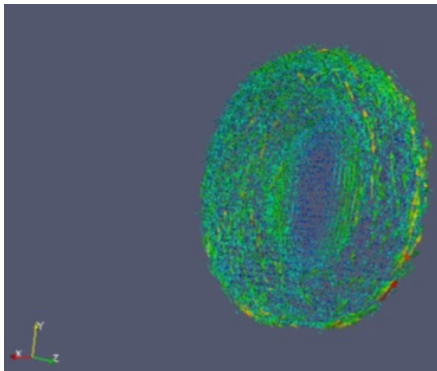
Введение

В настоящее время проводятся эксперименты по столкновению тяжелых ионов, где образуется вращающаяся плазма и, следовательно, система вращающихся полей. Другой важной областью являются вычисления КХД на решетке, где важны вакуумные эффекты. Это создает интерес к изучению вакуумных эффектов во вращающихся системах. Величина угловой скорости в нецентральных столкновениях, по некоторым оценкам, больше скорости вращения Земли на 27 порядков. Одним из вакуумных эффектов является эффект Казимира. Хотя он традиционно рассматривается для статических границ, его обобщение на вращающиеся системы отсчёта представляет собой относительно новую теоретическую задачу.

Моделью для изучения слоистой структуры, образующейся в столкновениях тяжелых ионов, были выбраны пластины.

Цель работы: Изучить эффект Казимира для вращающихся пластин.

Распределение завихренности (ЛТФ, 2013-18)



Эффект Казимира - проявление энергии вакуума

Рассмотрим безмассовое скалярное поле $\phi(t, x, y, z)$ с граничными условиями Дирихле:

$$\phi(z = 0) = \phi(z = a) = 0$$

Собственные частоты поля между пластинами:

$$\omega_k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Энергия рассчитывается как сумма по всем модам:

$$E = \frac{1}{2} \sum_{\text{моды}} \omega_k = \int \frac{A dk_x dk_y}{2(2\pi)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2} \xrightarrow{\text{reg}} -\frac{A\pi^2}{1440L^3}$$

Скалярное поле

Уравнение Клейна-Фока-Гордона описывает поведение скалярных (бесспиновых) частиц.

$$(\square - m^2)\phi = 0$$

Электромагнитное поле

ЭМ поле описывается уравнениями Максвелла. В калибровке Лоренца $\nabla_\mu A^\mu = 0$ они принимают вид:

$$\square A^\mu + R^\mu_\nu A^\nu = 0.$$

где \square - оператор Даламбера, а R^μ_ν - тензор Риччи

СТО:

$$\square = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2$$

ОТО:

$$\square = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu)$$

$$R_{\mu\nu} = \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda + \Gamma_{\lambda\sigma}^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma$$

Энергия Казимира при ненулевой температуре

Рассмотрим квантовую систему с отличной от нуля температурой T , находящуюся в тепловом равновесии. Она характеризуется статистической суммой Z .

$$Z = \sum_n e^{-E_n/k_B T}$$

Из статистической суммы можно получить свободную энергию.

$$\mathcal{F} = -k_B T \ln Z$$

Представление стат. суммы через континуальный интеграл:

$$Z = C \int D\phi e^{-S_E[\phi]}$$

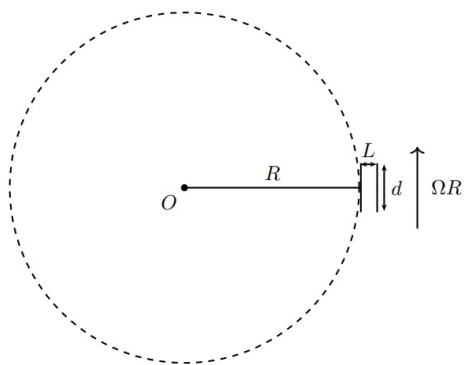
После некоторых вычислений:

$$\mathcal{F} = E_0 + \Delta_T \mathcal{F}_0 - f_{bb}$$

$$f_{bb} = k_B T \int \frac{dk}{(2\pi)^3} \ln(1 - e^{-\beta|k|}) = -\frac{\pi^2 (k_B T)^4}{90}$$

$$\Delta_T \mathcal{F}_0 = k_B T \sum_J \ln(1 - e^{-\beta\omega_J})$$

где $\beta = \frac{1}{k_B T}$



Вращение

Рассматривается метрика, соответствующая системе отсчета, равномерно вращающейся с угловой скоростью Ω .

$$L \ll d \ll R$$

$$ds^2 = (1 - \Omega^2 r^2) dt^2 - 2\Omega r^2 d\varphi dt - dz^2 - r^2 d\varphi^2 - dr^2$$

После перехода в локально-сопутствующую систему отсчета:

$$ds^2 = (1 + \Omega^2 r^2) dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad r = R + x$$

В нулевом порядке ($x \rightarrow 0$) соответствующее уравнение КФГ:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu) \phi = \left[\frac{1}{(1 + \Omega^2 R^2)} \partial_t^2 - \nabla^2 \right] \phi = 0 \quad (3)$$

Решение ищем в виде:

$$\phi_n = N \exp(i(k_y y + k_z z - \omega t)) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (4)$$

$$\omega_n = \left[(1 + \Omega^2 R^2) \left[k_y^2 + k_z^2 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \right] \right]^{1/2} \quad (5)$$

$$N^2 = \frac{\sqrt{1 + \Omega^2 R^2}}{\omega L (2\pi)^2}$$

Среднее значение локальной плотности энергии вакуума скалярного поля T_{tt} определяется следующим образом:

$$\epsilon_{vac,1} = \langle 0 | n^t n^t T_{tt}(\phi) | 0 \rangle = \int d^2 k_{\parallel} \sum_n n^t n^t T_{tt}(\phi) \quad (6)$$

$$T_{tt}(\phi) = \frac{1}{2} (\partial_t \phi \partial_t \phi^* - g_{tt} g^{ik} \partial_i \phi \partial_k \phi^*) \quad (7)$$

Плотность энергии вакуума $\bar{\epsilon}_{vac}$ получается путем усреднения ϵ_{vac} по пространственной области между пластинами:

$$\bar{\epsilon}_{vac} = \frac{1}{V_p} \int_{\Sigma} \sqrt{-g_{\Sigma}} \epsilon_{vac} d\Sigma \quad (8)$$

После всех вычислений получим, что в первом порядке вращение не влияет на энергию.

$$\bar{\epsilon}_{vac} = \frac{1}{2(2\pi)^2 L} \int d^2 k_{\parallel} \sum_n \sqrt{k_{\parallel}^2 + \frac{n^2 \pi^2}{L^2}} \quad (9)$$

Чтобы избавиться от расходимости нужно воспользоваться процедурой регуляризации (вычитание энергии вакуума Минковского из энергии вакуума с пластинами).

$$\bar{\epsilon}_{vac}^{ren} = -\frac{\pi^2}{1440 L^4} \quad (10)$$

Эта величина полностью совпадает со стандартной величиной плотности энергии Казимира.

Во следующем порядке $x^2 \rightarrow 0$

$$ds^2 = (1 + \Omega^2(R^2 + 2Rx))dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (11)$$

Введем обозначения:

$$A(x) \equiv 1 + \Omega^2(R^2 + 2Rx)$$

$$A_0 \equiv 1 + \Omega^2 R^2$$

$$\left(\frac{1}{A_0} \left(1 - \frac{2\Omega^2 R}{A_0} x \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 - \frac{\Omega^2 R}{A_0} \left(1 - \frac{2\Omega^2 R}{A_0} x \right) \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi = 0 \quad (12)$$

Ищем решение в виде:

$$\Psi(t, x, y, z) = Ne^{i(k_y y + k_z z - \omega t)} f(x) \quad (13)$$

Решение будет выражаться через функцию Эйри:

$$f(x) \sim Ai \left[\frac{\frac{\omega^2}{A_0} - \frac{2Rx\omega^2\Omega^2}{A_0^2} - k_{\perp}^2}{\left(\frac{2R\omega^2\Omega^2}{A_0^2}\right)^{2/3}} \right] \quad (14)$$

Используя их асимптотическое выражение:

$$Ai(-t) \sim \frac{\sin\left(\frac{2}{3}t^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\pi}t^{1/4}} \quad (15)$$

Можно найти собственные частоты ω_n^2 :

$$\omega_n^2 = A_0 \left(1 + \frac{LR\Omega^2}{A_0}\right) \left[\frac{\pi^2 n^2}{L^2} + k_{\perp}^2\right] \quad (16)$$

Выражение для плотности энергии можно записать:

$$\bar{\epsilon}_{vac,2} = \bar{\epsilon}_{vac} + \delta\bar{\epsilon}_{vac} \quad (17)$$

где

$$\bar{\epsilon}_{vac} = \frac{1}{V_p} \int d^2k_{\parallel} \sum_n \int_{\Sigma} \sqrt{-g_{\Sigma}} n^t n^t T_{tt}(\phi_{1,n}) d\Sigma \quad (18)$$

Величину $\delta\bar{\epsilon}_{vac}$ можно рассчитать следующим образом:

$$\delta\bar{\epsilon}_{vac} = \int \frac{d^2k_{\parallel}}{2(2\pi)^2 L} \sum_n (\omega_{n,2} - \omega_{n,0}) \quad (19)$$

где $\omega_{n,0} = \sqrt{k_{\parallel}^2 + \frac{n^2\pi^2}{L^2}}$

После всех вычислений величина плотности энергии вакуума будет равна:

$$\bar{\epsilon}_{vac,2}^{ren} = \bar{\epsilon}_{vac}^{ren} + \delta\bar{\epsilon}_{vac}^{ren} = -\sqrt{1 + R^2\Omega^2 + LR\Omega^2} \frac{\pi^2}{1440L^4} \quad (20)$$

Случай электромагнитного поля:

$$R_{tt} = -\frac{R^4\Omega^4}{R(R + R^3\Omega^2 + 2xR^2\Omega^2)} \rightarrow 0$$

$$R_{xx} = -\frac{R^4\Omega^4}{(R + R^3\Omega^2 + 2xR^2\Omega^2)^2} \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_{vac,EM}^{ren} &= -\frac{\pi^2}{720L^3} \sqrt{1 + \Omega^2 R^2 + LR\Omega^2} = \\ &= \sqrt{1 + \Omega^2 R^2 + LR\Omega^2} \cdot 2\bar{\epsilon}_{vac}^{ren} = 2\bar{\epsilon}_{vac,2}^{ren} \end{aligned} \quad (21)$$

$$T \neq 0$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{ren} &= AL\bar{\epsilon}_{vac}^{ren} + \Delta_T \mathcal{F}^{ren} = \\ &= AL\bar{\epsilon}_{vac}^{ren} - \frac{2A(k_B T)^3}{F^2(2\pi)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \tilde{\beta} \text{Li}_2(e^{-a_n \tilde{\beta}}) + \text{Li}_3(e^{-a_n \tilde{\beta}}) \right) + \\ &\quad + \frac{\pi^2 AL(k_B T)^4}{90F^{3/2}} \end{aligned} \tag{22}$$

Где $\tilde{\beta} = \frac{F}{k_B T}$, и $F^{(1)} = \sqrt{1 + \Omega^2 R^2}$,

$$F^{(2)} = \sqrt{(1 + \Omega^2 R^2) \left(1 + \frac{LR\Omega^2}{1 + \Omega^2 R^2} \right)}$$

$\text{Li}_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^n}$ - функции полилогарифма.

$$U^{ren} = -T^2 \frac{\partial(\mathcal{F}^{ren}/T)}{\partial T} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
U_0^{ren,1} \approx & -\sqrt{1 + R^2\Omega^2 + LR\Omega^2} \frac{A\pi^2}{1440L^3} - \frac{\pi^2 Ak_B^4 LT^4}{30F^3} \\
& + \frac{\left(e^{\frac{\pi F}{LTk_B}} - 1\right)^{-3}}{1440L^5 T^2 k_B^2} \left(\pi AF \left(e^{\frac{\pi F}{LTk_B}} (4\pi FLTk_B + 116L^2 T^2 k_B^2 + \pi^2 F^2) \right. \right. \\
& \left. \left. + e^{\frac{2\pi F}{LTk_B}} (-4\pi FLTk_B - 58L^2 T^2 k_B^2 + \pi^2 F^2) - 58L^2 T^2 k_B^2 \right) \right) \\
& + \frac{AT^2 k_B^2 \left(LTk_B \left(\text{Li}_3 \left(e^{-\frac{\pi F}{LTk_B}} \right) + \zeta(3) \right) + \pi FLi_2 \left(e^{-\frac{\pi F}{LTk_B}} \right) \right)}{2\pi^2 F^2 L} \\
& - \frac{ATk_B \log \left(1 - e^{-\frac{\pi F}{LTk_B}} \right)}{4L^2}
\end{aligned} \tag{24}$$

$$T \neq 0$$

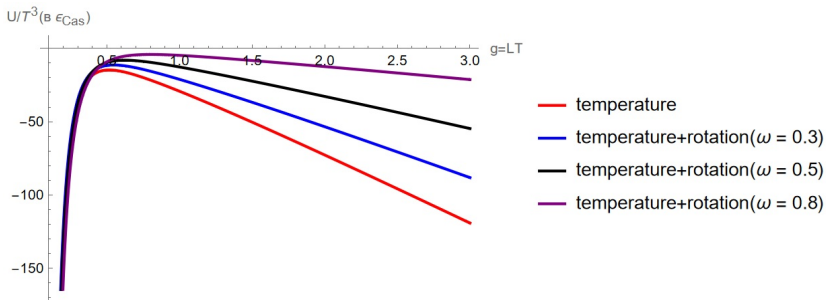


Рис. 1: Зависимость величины U/T^3 от безразмерного параметра $g = LT$

Значения, характерные для столкновений тяжелых ионов:

$$L \approx 1 \text{ фм}$$

$$\epsilon_{cas} \approx -28 \text{ МэВ.}$$

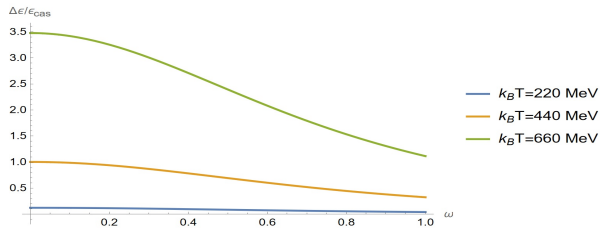


Рис. 2: Зависимость величины $\Delta\epsilon/\epsilon_{Cas}$ от угловой скорости $\omega = R\Omega$

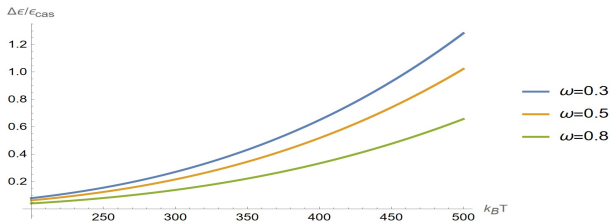


Рис. 3: Зависимость величины $\Delta\epsilon/\epsilon_{Cas}$ от температуры (в энергетических единицах) $k_B T$

Заключение

Был изучен эффект Казимира для вращающихся пластин в случае электромагнитного и безмассового скалярного полей. Были вычислены величины плотностей энергии и температурные поправки к ним для этих полей.

Как следует из графика, эффект, обусловленный вращением, противоположен температурному эффекту. Для сохранения причинности линейная скорость вращения не должна превышать скорость света: $\Omega R < 1$. При $\Omega R \lesssim 1$ этот эффект может быть довольно большим.

По теме дипломной работы был представлен постерный доклад на 63 сессии РАС.