Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
ФИЛИАЛ МГУ В Г. ДУБНЕ

УТВЕРЖДАЮ

И.о. директора

филиала МГУ в г. Дубне

_____/ Э.Э. Боос /

«01» сентября 2025г.

Филиал Московского государственного Университета имени М.В. Ломоносова в городе Дубне

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Наименование дисциплины:

Дифференциальные уравнения в прикладных задачах

Уровень высшего образования:

Магистратура

Направление подготовки / специальность:

01.04.02 «Прикладная математика и информатика»

Направленность (профиль) ОПОП:

Методы и технологии обработки данных в гетерогенных вычислительных средах

Форма обучения:

очная

Дубна 2025

Рабочая программа дисциплины (модуля) разработана в соответствии с самостоятельно установленным МГУ образовательным стандартом (ОС МГУ) для реализуемых основных профессиональных образовательных программ высшего образования по направлению подготовки 01.04.02 "Прикладная математика и информатика" программы магистратуры в редакции приказа МГУ от _____20__ г.

1. Место дисциплины (модуля) в структуре ОПОП ВО:
Дисциплина относится к базовой части ОПОП ВО.

2. Входные требования для освоения дисциплины (модуля), предварительные условия (если есть): Знания на уровне классических университетских математических курсов: математический анализ, линейная алгебра и аналитическая геометрия, дифференциальные уравнения.

3. Результаты обучения по дисциплине (модулю):

Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю)		
Содержание и код компетенции.	**Индикатор (показатель) достижения компетенции**	**Планируемые результаты обучения по дисциплине, сопряженные с индикаторами достижения компетенций**
УК-1. Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий, формулировать научно обоснованные гипотезы, применять методологию научного познания в профессиональной деятельности. УК-3. Способен разрабатывать, реализовывать и управлять проектом на всех этапах его жизненного цикла, предусматривать и учитывать проблемные ситуации и риски проекта.	Знать и уметь применять методы критического анализа, выработки обоснованной стратегии на основе методологии научного познания при решении задач в профессиональной деятельности Знать виды ресурсов и ограничений и методы оценки возможных альтернатив решения поставленных задач	Знает и уметь применять методы критического анализа, выработки обоснованной стратегии на основе методологии дифференциального исчисления при решении задач в профессиональной деятельности. Знает наиболее популярные применения дифференциального исчисления в ряде популярных современных прикладных задач, имеет практику самостоятельного применения.

Источники компетенций – образовательный стандарт и профиль.
Индикаторы и результаты обучения формулируются автором рабочей программы

4. Объем дисциплины составляет 3 з.е., в том числе 72 академических часов, отведённых на контактную работу обучающихся с преподавателем, 36 академических часов на самостоятельную работу обучающихся.

5. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведённого на них количества академических часов и виды учебных занятий:

5.1. Структура дисциплины (модуля) по темам (разделам) с указанием отведённого на них количества академических часов и виды учебных занятий (в строгом соответствии с учебным планом)

Наименование разделов и тем дисциплины (модуля), **Форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)**	**Номинальные трудозатраты обучающегося**			**Всего академических часов**	**Форма текущего контроля успеваемости* (наименование)**
	Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем) Виды контактной работы, академические часы		**Самостоятельная работа обучающегося, академические часы**		
	Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа			
Раздел 1. Простейшие дифференциальные уравнения	6	6	6	18	Т, З*
Раздел 2. Кривые преследования	6	6	6	18	Т, З*
Раздел 3. Задачи геометрической оптики	4	4	4	12	Т, З*
Раздел 4. Уравнения второго порядка	2	2	2	6	Т, З*
Раздел 5. Гравитационные задачи	4	4	4	12	Т, З*
Раздел 6. Колебательные системы	6	6	6	18	Т, З*
Раздел 7. Популяционные модели	4	4	4	12	Т, З*
Раздел 8. Химические модели	2	2	2	6	Т, З*
Раздел 9. Вариационные модели	2	2	2	6	
Другие виды самостоятельной работы (отсутствуют)	—	—			—
Промежуточная аттестация (экзамен)					
Итого	*36*	*36*	*36*	108	—

* Т — тестирование, З — решение задач на семинарских занятиях

5.2. Содержание разделов (тем) дисциплины

№ п/п	Наименование разделов (тем) дисциплины	Содержание разделов (тем) дисциплин
1.	Раздел 1. Простейшие дифференциальные уравнения	Модели, приводящие к простейшим обыкновенным дифференциальным уравнениям, уравнениям с разделяющимися переменными и линейным уравнениям первого порядка: вращение жидкости, муравей на ленте, закон Фебера-Фехнера, водяные часы, реактивное движение, квадратные колеса, барометрическая формула, радиоактивный распад, задачи на растворы, тепловые волны.
2.	Раздел 2. Кривые преследования	Различные модели преследования-уклонения: трактрисы, задача о четырёх жуках, игра в прятки, охота на подводную лодку, задача о пловце, кривая погони, локсодрома.
3.	Раздел 3. Задачи геометрической оптики	Модели, основанные на явлениях отражения и преломления света: математическая вышивка, каустики отражения, Шуховская башня, криволинейные зеркала, асферические линзы.
4.	Раздел 4. Уравнения второго порядка	Модели, приводящие к простейшим дифференциальным уравнениям второго порядка: переходные кривые, клотоида, цепная линия, кривая скакалки.
5.	Раздел 5. Гравитационные задачи	Различные модели, основанные на законе всемирного тяготения Ньютона: вторая космическая скорость, из пушки на Луну, гравитационный лифт, задачи n тел и законы Кеплера.
6.	Раздел 6. Колебательные системы	Модели гармонических, затухающих и вынужденных колебаний, а также автоколебательные модели: маятники, метроном, затухающие и вынужденные колебания, связанные маятники, таутохронная кривая, резонанс в электрических цепях, осциллятор Ван дер Поля.
7.	Раздел 7. Популяционные модели	Модели популяционной динамики: модель естественного роста, модель Ферхюльста, сбор урожая, модель Лотки-Вольтерры, эпидемиологические модели, принцип Гаузе.
8.	Раздел 8. Химические модели	Модели химической кинетики: элементарные химические реакции и их системы, цепная полимеризация, брюсселятор.
9.	Раздел 9. Вариационные модели	Задачи и модели вариационного исчисления: брахистохрона, геодезические линии, изопараметрическая задача.

6. Фонд оценочных средств (ФОС, оценочные и методические материалы) для оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю).

6.1. Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения текущего контроля успеваемости

Пример тестового задания:

1. Отметьте все верные утверждения относительно элементарной химической реакции A+B+C→2D: а) порядок реакции равен 3; б) молекулярность реакции равна 5; в) скорость реакции равна $kabc$; г) убыль вещества A равна убыли вещества C.
2. Какую скорость имеет химическая реакция третьего порядка 2A+B→C?
3. Рассмотрим химическую реакцию третьего порядка 2A+B→C. Пусть ее скорость равна v. Как будет выглядеть система дифференциальных уравнений для концентраций a, b и c веществ A, B и C соответственно?
4. Рассмотрим химическую реакцию первого порядка A->B с константой скорости k=0.1 (время измеряется в секундах). За какое время концентрация вещества A снизится в два раза?
5. Какой вид имеет дифференциальное уравнение, описывающее концентрацию $a(t)$ вещества A в обратимой элементарной химической реакции A→ B, B→A?
6. Чему равно преобразование L[1+2x]?
7. Чему равно обратное преобразование Лапласа $L^{-1}[2/(s^2+4)]$?
8. Примените преобразование Лапласа у начальной задаче $y'-2y=e^{2x}$, $y(0)=-1$ и выразите из полученного равенства образ функции $y(x)$ — функцию $z(s)$=L[y].
9. Отметьте все корректные применения преобразования Лапласа: а) L[2y-3z]=2L[y]-3L[z]; б) L[yz]=L[y]z+yL[z]; в) $L[y^2]=2L[y]$; г) L[-z]=-L[z].
10. Какой тип будет иметь точка покоя в модели брюсселятора при a=0.6, b=1.4: а) устойчивый фокус; б) неустойчивый фокус; в) устойчивый узел; г) неустойчивый узел?

Темы заданий для семинарских занятий:

1. Практическая реализация и исследование модели вращения жидкости
2. Практическая реализация и исследование модели вытекания жидкости
3. Практическая реализация и исследование модели элементарной химической реакции
4. Практическая реализация и исследование задачи о четырёх жуках
5. Практическая реализация и исследование барометрической задачи
6. Практическая реализация и исследование моделей естественного и логистического роста
7. Практическая реализация и исследование задачи табулирования функций
8. Практическая реализация и исследование задачи построения ортогональных траекторий
9. Практическая реализация и исследование задачи построения каустики отражения
10. Практическая реализация и исследование моделей криволинейных зеркал
11. Практическая реализация и исследование гравитационных задач
12. Практическая реализация и исследование модели колебаний метронома
13. Практическая реализация и исследование моделей затухающих и вынужденных колебаний пружинного маятника
14. Практическая реализация и исследование модели Лотки-Вольтерры
15. Практическая реализация и исследование задач химической кинетики
16. Практическая реализация и исследование задачи построения геодезических линий

6.2. Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения промежуточной аттестации по дисциплине, критерии и шкалы оценивания

Вопросы к экзамену

1. Модель вращения жидкости
2. Задача о муравье на ленте
3. Модель водяных часов
4. Барометрическая формула
5. Модель радиоактивного распада
6. Задачи на растворы
7. Задача о четырёх жуках
8. Модели трактрис
9. Задача о преследовании подводной лодки
10. Задача о пловце
11. Модели математической вышивки
12. Каустики отражения
13. Модели криволинейных зеркал
14. Гравитационные задачи
15. Модель гравитационного лифта
16. Законы Кеплера
17. Задача многих тел
18. Переходные кривые
19. Цепная линия
20. Кривая скакалки
21. Колебательные системы
22. Резонанс в электрических цепях
23. Осциллятор Ван дер Поля
24. Популяционные модели роста
25. Модель Лотки-Вольтерры
26. Эпидемиологические модели
27. Модель цепной полимеризации
28. Брюсселятор
29. Кривая наискорейшего спуска
30. Геодезические линии

ШКАЛА И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ результатов обучения (РО) по дисциплине				
Оценка виды оценочных	2 (не зачтено)	3 (зачтено)	4 (зачтено)	5 (зачтено)

средств				
Знания *(виды оценочных средств: опрос, тесты)*	Отсутствие знаний	Фрагментарные знания	Общие, но не структурированные знания	Сформированные систематические знания
Умения *(виды оценочных средств: практические задания)*	Отсутствие умений	В целом успешное, но не систематическое умение	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы умение (допускает неточности непринципиального характера)	Успешное и систематическое умение
Навыки (владения, опыт деятельности) *(виды оценочных средств: выполнение и защита курсовой работы, отчет по практике, отчет по НИР и т.п.)*	Отсутствие навыков (владений, опыта)	Наличие отдельных навыков (наличие фрагментарного опыта)	В целом, сформированные навыки (владения), но используемые не в активной форме	Сформированные навыки (владения), применяемые при решении задач

7. Ресурсное обеспечение:

7.1. Перечень основной и дополнительной литературы

Основная литература

1. Ершов Н. М. Дифференциальные уравнения в прикладных задачах. — ДМК Пресс Москва, 2020. — 364 с.
2. Ершов Н. М. Практическое введение в решение дифференциальных уравнений в Python. — ДМК Пресс Москва, 2022. — 176 с.

Дополнительная литература

1. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения: Учебник для физических и физико-математических факультетов университетов / Эльсгольц Лев Эрнестович. - 8-е изд. - М.: Издательство ЛКИ, 2014. - 312с.
2. Амелькин В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях / Амелькин Владимир Васильевич. - М.: Наука, 1987. - 160с.
3. Эрроусмит Д. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями / Эрроусмит Д., Плейс К.; Под ред.Н.Х. Розова; Пер. с англ.Т.Д. Вентцель. - Волгоград: ПЛАТОН, 1997. - 243с.

7.2. Перечень лицензионного программного обеспечения, в том числе отечественного производства

При реализации дисциплины может быть использовано следующее программное обеспечение:

1. Операционная система Ubuntu 18.04.
2. Программный продукт Dev-C++ Bloodshed Software
3. Программный продукт CodeBlocks The Code::Blocks Team
4. Программный продукт Free Pascal 3.0.0 Free Pascal Team
5. Программный продукт Python 3.5.1 (64-bit) Python Software Foundation

7.3. Перечень профессиональных баз данных и информационных справочных систем

1. http://www.edu.ru – портал Министерства образования и науки РФ
2. http://www.ict.edu.ru – система федеральных образовательных порталов «ИКТ в образовании»
3. http://www.openet.ru - Российский портал открытого образования
4. http://www.mon.gov.ru - Министерство образования и науки Российской Федерации
5. http://www.fasi.gov.ru - Федеральное агентство по науке и инновациям

7.4. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

1. Math-Net.Ru [Электронный ресурс] : общероссийский математический портал / Математический институт им. В. А. Стеклова РАН ; Российская академия наук, Отделение математических наук. - М. : [б. и.], 2010. - Загл. с титул. экрана. - Б. ц.
URL: http://www.mathnet.ru

2. Университетская библиотека Online [Электронный ресурс] : электронная библиотечная система / ООО "Директ-Медиа" . - М. : [б. и.], 2001. - Загл. с титул. экрана. - Б. ц. URL: www.biblioclub.ru

3. Универсальные базы данных East View [Электронный ресурс] : информационный ресурс / East View Information Services. - М. : [б. и.], 2012. - Загл. с титул. экрана. - Б. ц.
URL: www.ebiblioteka.ru

4. Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU [Электронный ресурс] : информационный портал / ООО "РУНЭБ" ; Санкт-Петербургский государственный университет. - М. : [б. и.], 2005. - Загл. с титул. экрана. - Б. ц.
URL: www.eLibrary.ru

7.5. Описание материально-технического обеспечения.

Филиал МГУ в г. Дубне, ответственный за реализацию данной Программы, располагает соответствующей материально-технической базой, включая современную вычислительную технику, объединенную в локальную вычислительную сеть, имеющую выход в Интернет. Используются специализированные компьютерные классы, оснащенные современным оборудованием.

Материальная база подразделения соответствует действующим санитарно-техническим нормам и обеспечивает проведение всех видов занятий (лабораторной, практической, дисциплинарной и междисциплинарной подготовки) и научно-исследовательской работы обучающихся, предусмотренных учебным планом.

8. Методические рекомендации по организации изучения дисциплины

8.1. Формы и методы преподавания дисциплины

(перечисляются в соответствии с таблицей 5.1.)

Используемые формы и методы обучения:

лекции

семинарские занятия

самостоятельная работа студентов.

В процессе преподавания дисциплины преподаватель использует как классические формы и методы обучения (лекции и семинарские занятия), так и активные методы обучения.

При проведении лекционных занятий преподаватель использует аудиовизуальные, компьютерные и мультимедийные средства обучения, а также демонстрационные и наглядно-иллюстрационные (в том числе раздаточные) материалы.

Семинарские занятия проводятся в форме проблемной ситуации, когда некоторый аспект рассмотренной темы излагается преподавателем более подробно. Часть информации конспектируется. Большая часть времени выделена на работу с использованием компьютерной техники и программного обеспечения.

В рамках курса используются активные и интерактивные методы обучения в процессе проведения занятий. Основными особенностями интерактивных занятий являются интерактивные практические упражнения и задания, которые выполняются обучающимися не только и не столько на закрепление изученного материала, но и на самостоятельное изучение нового.

8.2. Методические рекомендации преподавателю

Перед началом изучения дисциплины преподаватель должен ознакомить студентов с видами учебной и самостоятельной работы, перечнем литературы и интернет-ресурсов, формами текущей и промежуточной аттестации, с критериями оценки качества знаний для итоговой оценки по дисциплине.

При проведении лекций, преподаватель:

1) формулирует тему и цель занятия;

2) излагает основные теоретические положения;

3) с помощью мультимедийного оборудования и/или под запись дает определения основных понятий, расчетных формул;

4) проводит примеры из отечественного и зарубежного опыта, дает текущие статистические данные для наглядного и образного представления изучаемого материала;

5) в конце занятия дает вопросы для самостоятельного изучения.

Для семинарских занятий

Подготовка к проведению занятий проводится регулярно. Организация преподавателем семинарских занятий должна удовлетворять следующим требования: количество занятий должно соответствовать учебному плану программы, содержание планов должно соответствовать программе, план занятий должен содержать перечень рассматриваемых вопросов.

Во время семинарских занятий используются словесные методы обучения, как беседа и дискуссия, что позволяет вовлекать в учебный процесс всех слушателей и стимулирует творческий потенциал обучающихся.

При подготовке семинарскому занятию преподавателю необходимо знать план его проведения, продумать формулировки и содержание учебных вопросов, выносимых на обсуждение.

В начале занятия преподаватель должен раскрыть теоретическую и практическую значимость темы занятия, определить порядок его проведения, время на обсуждение каждого учебного вопроса. В ходе занятия следует дать возможность выступить всем желающим и предложить выступить тем слушателям, которые проявляют пассивность.

Целесообразно, в ходе обсуждения учебных вопросов, задавать выступающим и аудитории дополнительные и уточняющие вопросы с целью выяснения их позиций по существу обсуждаемых проблем, а также поощрять выступление с места в виде кратких дополнений. На занятиях проводится отработка практических умений под контролем преподавателя

8.3. Методические рекомендации студентам по организации самостоятельной работы.

Приступая к изучению новой учебной дисциплины, студенты должны ознакомиться с учебной программой, учебной, научной и методической литературой, имеющейся в библиотеке университета, встретиться с преподавателем, ведущим дисциплину, получить в библиотеке рекомендованные учебники и учебно-методические пособия, осуществить запись на соответствующий курс в среде электронного обучения университета.

Глубина усвоения дисциплины зависит от активной и систематической работы студента на лекциях и практических занятиях, а также в ходе самостоятельной работы, по изучению рекомендованной литературы.

На лекциях важно сосредоточить внимание на ее содержании. Это поможет лучше воспринимать учебный материал и уяснить взаимосвязь проблем по всей дисциплине. Основное содержание лекции целесообразнее записывать в тетради в виде ключевых фраз, понятий, тезисов, обобщений, схем, опорных выводов. Необходимо обращать внимание на термины, формулировки, раскрывающие содержание тех или иных явлений и процессов, научные выводы и практические рекомендации. Желательно оставлять в конспектах поля, на которых делать пометки из рекомендованной литературы, дополняющей материал прослушанной лекции, а также подчеркивающие особую важность тех или иных теоретических положений. С целью уяснения теоретических положений, разрешения спорных ситуаций необходимо задавать преподавателю уточняющие вопросы. Для закрепления содержания лекции в памяти, необходимо во время самостоятельной работы внимательно прочесть свой конспект и дополнить его записями из учебников и рекомендованной литературы. Конспектирование читаемых лекций и их последующая доработка способствует более глубокому усвоению знаний, и поэтому являются важной формой учебной деятельности студентов.

Методические указания для самостоятельной работы обучающихся

Прочное усвоение и долговременное закрепление учебного материала невозможно без продуманной самостоятельной работы. Такая работа требует от студента значительных усилий, творчества и высокой организованности. В ходе самостоятельной работы студенты выполняют следующие задачи: дорабатывают лекции, изучают рекомендованную литературу, готовятся к практическим занятиям, к коллоквиуму, контрольным работам по отдельным темам дисциплины. При этом эффективность учебной деятельности студента во многом зависит от того, как он распорядился выделенным для самостоятельной работы бюджетом времени.

Результатом самостоятельной работы является прочное усвоение материалов по предмету согласно программы дисциплины. В итоге этой работы формируются профессиональные умения и компетенции, развивается творческий подход к решению возникших в ходе учебной деятельности проблемных задач, появляется самостоятельности мышления.

Решение задач

При самостоятельном решении задач нужно обосновывать каждый этап решения, исходя из теоретических положений курса. Если студент видит несколько путей решения проблемы (задачи), то нужно сравнить их и выбрать самый рациональный. Полезно до начала вычислений составить краткий план решения проблемы (задачи).

Решение проблемных задач или примеров следует излагать подробно, вычисления располагать в строгом порядке, отделяя вспомогательные вычисления от основных. Решения при необходимости нужно сопровождать комментариями, схемами, чертежами и рисунками.

Следует помнить, что решение каждой учебной задачи должно доводиться до окончательного логического ответа, которого требует условие, и по возможности с выводом.

Полученный ответ следует проверить способами, вытекающими из существа данной задачи. Полезно также (если возможно) решать несколькими способами и сравнить полученные результаты.

Решение задач данного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

Задача — это цель, заданная в определенных условиях, решение задачи — процесс достижения поставленной цели, поиск необходимых для этого средств.

Алгоритм решения задач:

1. Внимательно прочитайте условие задания и уясните основной вопрос, представьте процессы и явления, описанные в условии.
2. Повторно прочтите условие для того, чтобы чётко представить основной вопрос, проблему, цель решения, заданные величины, опираясь на которые можно вести поиски решения.
3. Произведите краткую запись условия задания.
4. Если необходимо составьте таблицу, схему, рисунок или чертёж.
5. Определите метод решения задания, составьте план решения.
6. Запишите основные понятия, формулы, описывающие процессы, предложенные заданной системой.
7. Найдите решение в общем виде, выразив искомые величины через заданные.
9. Проверьте правильность решения задания.
10. Произведите оценку реальности полученного решения.
11. Запишите ответ.

9. Разработчик (разработчики) программы.

к.ф.-м.н. Ершов Н. М.