

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА**

Научно-исследовательский институт ядерной физики  
имени Д.В.Скобельцына

А.К.ПОПОВ

**ОСНОВЫ УПРАВЛЕНИЯ  
ЯДЕРНЫМ РЕАКТОРОМ**

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ имени Д.В.СКОБЕЛЬЦЫНА

А.К.ПОПОВ

ОСНОВЫ УПРАВЛЕНИЯ

ЯДЕРНЫМ РЕАКТОРОМ

Москва

2012

УДК 621.039.514(075.8)

ББК 31.46

ISBN 978-5-

Попов А.К. Основы управления ядерным реактором: Учебное пособие / Московский государственный университет – М., 2012. – 208 с.

Изложены основные теоретические аспекты управления реактором. А именно, физические основы управления реактором, характерные особенности динамики реактора нулевой и ненулевой мощности, особенности динамики импульсного реактора периодического действия как реактора, работающего в экстремальных условиях, общие принципы регулирования реактора. Изложены также избранные разделы общей теории автоматического управления, используемые при исследовании динамики реактора.

Учебное пособие предназначено для студентов высших учебных заведений физического направления, для которых знание вопросов динамики ядерного реактора существенно для их будущей профессиональной деятельности, а также может быть полезно специалистам по управлению реактором.

Табл. 3. Ил. 119. Библиогр.: 14 назв.

Рецензент: доктор физ.-мат. наук Е.П. Шабалин.

© МГУ

© НИИЯФ МГУ

© А.К.Попов

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Ядерный реактор – это источник энергии и нейтронов. Реакторы подразделяются на исследовательские и энергетические. Исследовательский реактор – прежде всего генератор нейтронов. Энергетический реактор является частью энергетического комплекса. Вырабатываемая энергетическим реактором энергия преобразуется далее в электрическую, которая и является конечным продуктом комплекса. Несомненно, реактор – важнейшая часть комплекса. И не только потому, что именно он является источником энергии, но и потому, что он является потенциально наиболее опасной частью комплекса.

Независимо от назначения реакторов всем им как объектам управления присущи общие черты. Ниже изложены основные теоретические аспекты управления реактором. А именно, физические основы управления реактором, характерные особенности динамики реактора нулевой и ненулевой мощности, особенности динамики импульсного реактора периодического действия как реактора, работающего в экстремальных условиях, общие принципы регулирования реактора. Поскольку при анализе динамики реактора используются методы, разработанные в общей теории автоматического управления, изложены также избранные элементы этой теории.

Учебное пособие предназначено для студентов высших учебных заведений физического направления, для которых знание вопросов динамики ядерного реактора существенно для их будущей профессиональной деятельности. Оно также может быть полезно специалистам по управлению реактором.

Учебное пособие написано на основе лекций по курсу “Основы управления ядерным реактором”, прочитанным автором на кафедре нейтронографии студентам физического факультета Мо-

сковского государственного университета. При написании использован опыт преподавания автором одноименного курса студентам Тульского государственного университета и курсов “Теория автоматического управления” и “Основы теории управления” студентам филиала Московского института радиотехники, электроники и автоматики (технического университета) в Дубне. При написании использованы также опыт участия автора в проектных работах по созданию уникальных импульсных реакторов на быстрых нейтронах в международном ядерном центре – в Объединенном институте ядерных исследований в Дубне и результаты исследования автором динамики этих реакторов в процессе их эксплуатации.

Автор выражает благодарность заведующему кафедрой профессору д. ф.-м. н. В.Л.Аксенову и д. ф.-м. н. С.А.Гончарову за организацию лекций на кафедре нейтронографии физического факультета МГУ и д. ф.-м. н. Е.П.Шабалину, прочитавшему рукопись и сделавшему ряд полезных замечаний, которые автором учтены.

## 1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Ядерный реактор представляет собой сложное инженерное устройство. Центральная часть реактора, где обеспечивается деление ядер, называется активной зоной. Главной составляющей активной зоны является делящееся вещество (топливо).

Реактор проектируется таким образом, чтобы нейтроны, захваченные ядрами топлива, в основном вызывали деление ядер топлива. В результате деления выделяется большое количество энергии. При этом каждое делящееся ядро испускает в среднем от двух до трех нейтронов. Эти вторичные нейтроны вновь должны вызвать деление ядер и т.д. Так возникает *цепная реакция*.

Однако не каждое взаимодействие нейтрона с ядром приводит к делению ядра. Так, возможно поглощение нейтрона ядром без последующего деления. Возможен также отскок нейтрона от ядра (рассеяние), что сопровождается уменьшением скорости нейтрона, т.е. уменьшением его энергии. Помимо этого возможен также выход нейтрона из активной зоны без взаимодействия с ядром топлива (“утечка”). Цепная реакция возможна лишь при условии, что масса делящегося вещества не меньше определенной величины, называемой *критической массой*.

Возникающие при делении ядер нейтроны имеют большую скорость (большую энергию) и называются *быстрыми*. Быстрый нейтрон обладает энергией в среднем 2 МэВ. Вообще под быстрыми понимают нейтроны с энергией выше 0,1 МэВ (максимальные значения энергии и скорости быстрого нейтрона могут достигать соответственно 10 МэВ и  $4,5 \cdot 10^7$  м/с). Соотношение между энергией в мега-электрон-вольтах, электрон-вольтах и джоулях таково:

$$1 \text{ МэВ} = 10^6 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-13} \text{ Дж.}$$

Реакторы, в которых основная масса делений происходит под воздействием быстрых нейтронов, называются *реакторами на быстрых нейтронах* или *быстрыми* реакторами. В качестве топлива в быстрых реакторах используются уран-233 ( $^{233}\text{U}$ ), уран-235 ( $^{235}\text{U}$ ) и плутоний ( $^{239}\text{Pu}$ ). Уран-233 и плутоний получают искусственным путем. Уран-235 содержится в природном уране, но его доля очень мала и составляет лишь 0,7%. На 99,3% природный уран состоит из урана-238 ( $^{238}\text{U}$ ). В обогащенном уране доля урана-235 для уран-графитовых реакторов обычно составляет 1,5 – 3%. Для реакторов других типов эта доля может быть значительно большей.

Уран-238 может делиться только быстрыми нейтронами. Однако быстрые нейтроны, взаимодействуя с ураном-238, лишь в 10% случаев вызывают деление ядер. Основная же масса быстрых нейтронов при встрече с ядрами  $^{238}\text{U}$  рассеивается (неупругое рассеяние). При этом скорость нейтронов уменьшается настолько, что их энергия становится меньше 1 МэВ. А при такой энергии эти нейтроны уже не могут вызвать деление ядер урана-238. Из тех же быстрых нейтронов, что образовались в результате деления, лишь 10% вновь вызовут деление. В результате преобладания процесса рассеяния над процессом деления осуществить цепную реакцию в уране-238 невозможно. Кроме того, происходит поглощение нейтронов ураном-238 с образованием плутония-239. Уран-238, таким образом, играет роль сырья для накопления нового искусственного делящегося материала – плутония.

Помимо урана-238 только быстрыми нейтронами может делиться торий ( $^{232}\text{Th}$ ), причем взаимодействию его с быстрыми нейтронами присущи те же особенности, что и урану-238. Как и уран-238, торий играет роль сырья, но для накопления урана-233.

Уран-235, содержащийся в природном уране, может делиться нейтронами любых энергий. При этом наиболее интенсивно он делится так называемыми *тепловыми нейтронами*, под которыми понимают нейтроны с энергией меньше 0,1 эВ. Реакторы, в которых основная масса делений осуществляется тепловыми нейтронами, называются *реакторами на тепловых нейтронах*. Наиболее распространенным топливом для таких реакторов является природный или обогащенный уран.

Тепловые нейтроны получают из быстрых нейтронов благодаря наличию в активной зоне реактора замедлителя. Замедлитель выполняется из материалов, содержащих легкие элементы с массовым числом не более 12. Попавшие в замедлитель нейтроны

в результате столкновений с легкими ядрами (упругое рассеяние) *не захватываются ядрами*, а теряют скорость и возвращаются из замедлителя в топливо уже тепловыми нейтронами. В качестве материала для замедлителя используют графит, обычную воду, тяжелую воду, бериллий. Итак, в реакторах на тепловых нейтронах активную зону образуют топливо и замедлитель. Естественно, в реакторах на быстрых нейтронах замедлитель отсутствует.

Существуют также реакторы на *промежуточных нейтронах*. Эти довольно редкие реакторы используются для проведения специальных исследований. Под промежуточными нейтронами понимают нейтроны с энергией от 10 эВ до 0,1 МэВ.

Выделяющееся в топливе тепло отводится теплоносителем. Он прокачивается по замкнутому контуру через активную зону и передает воспринимаемое от топлива тепло во внешнюю по отношению к реактору среду. В большинстве действующих реакторов в качестве теплоносителя используется обычная вода ( $\text{H}_2\text{O}$ ). Используется также тяжелая вода ( $\text{D}_2\text{O}$ ), углекислый газ ( $\text{CO}_2$ ), водород ( $\text{H}_2$ ), гелий ( $\text{He}$ ). Кроме того, используются жидкие металлы натрия ( $\text{Na}$ ) и калия ( $\text{K}$ ), а также органические жидкости. Теплоноситель находится в активной зоне и, естественно, взаимодействует с нейтронами. В частности, теплоносители, содержащие водород, интенсивно замедляют нейтроны. В связи с этим такие теплоносители нельзя использовать в реакторах на быстрых нейтронах, в них используют жидкие металлы, характеризующиеся слабым рассеянием и слабым замедлением нейтронов.

Активная зона реактора окружается отражателем, препятствующим утечке нейтронов из активной зоны и возвращающим их вновь в активную зону. В реакторах на тепловых нейтронах в качестве отражателя используются те же материалы, что и для замедлителя. В реакторах на быстрых нейтронах активная зона мо-



жет окружаться не только отражателем (сталь, вольфрам), но и воспроизводящим материалом (например, так называемый от- вальный уран – уран, который для предприятий по обогащению ядерного топлива, является отходом). Взаимодействие нейтронов, утекающих из активной зоны, с воспроизводящим материалом приводит к образованию в нем нового ядерного топлива.

Наконец, отражатель окружается биологической защитой, снижающей ионизирующее излучение реактора до уровня, безопасного для персонала, обслуживающего реактор. В результате работы реактора все материалы, размещающиеся внутри биологической защиты, становятся радиационно-опасными.

Внутри активной зоны располагаются органы управления для регулирования мощности и органы аварийной защиты для экстренной остановки реактора. Эти органы выполняются подвижными. В результате перемещения органов управления достигается желаемая корректировка течения цепной реакции, а в результате перемещения органов аварийной защиты – прекращение цепной реакции. Действие органов управления и защиты основано либо на поглощении нейтронов, либо на изменении утечки нейтронов из активной зоны. В реакторах на тепловых нейтронах органы управления и защиты выполняются из материалов, хорошо поглощающих нейтроны (это сплавы, содержащие бор (В), гафний (Hf), сплав серебра с индием и кадмием (Ag – In – Cd) и другие материалы). В реакторах других типов эти органы могут представлять собой части отражателей. Для надежности экстренная остановка реактора осуществляется в результате перемещения органов аварийной защиты под действием силы тяжести. Для убыстрения падения может применяться первоначальный толчок органов аварийной защиты.

В качестве измерителей мощности реактора используются детекторы плотности потока нейтронов. Детекторы, являющиеся

датчиками электрических сигналов для системы управления и защиты, могут помещаться и в отражателе, и за ним, и даже в активной зоне. Все зависит от мощности и конструкции реактора.

Необходимую массу топлива (делящегося материала в активной зоне) набирают из тепловыделяющих элементов, которые сокращенно называют *ТВЭлами*. Чаще всего ТВЭл выполняют в виде длинного и тонкого стержня из делящегося материала, заключенного в герметичную металлическую оболочку. Внутри этой оболочки делящийся материал обычно имеет вид не сплошного стержня, а набора таблеток. Поскольку оперировать каждым ТВЭлом крайне неудобно, ТВЭлы объединяют по несколько штук в отдельные конструктивные элементы, называемые *кассетами*. Количество ТВЭлов в кассете диктуется конструкцией реактора.

Работа реактора сопровождается уменьшением количества ядер, которые в данном реакторе способны делиться. Этот процесс называется *выгоранием* топлива. Для увеличения времени, в течение которого реактор может работать без обновления топлива (т.е. без перегрузки реактора), масса топлива в активной зоне должна превышать критическую массу. Избыток над критической массой должен компенсироваться компенсирующими органами (их вместе с регулятором называют *органами управления*).

Исполнительный элемент регулятора выполняется в виде регулирующих стержней (регулирующего стержня). Они всегда находятся в пределах активной зоны. Регулирование мощности обеспечивается посредством соответствующего перемещения их вверх-вниз относительно их штатного положения.

Компенсирующие органы, осуществляющие компенсацию избытка массы топлива над критическим уровнем, обычно выполняются в виде стержней. Компенсация осуществляется посредством изменения поглощения нейтронов. На начальном этапе работы реактора избыток топлива наибольший, поэтому компен-

сирующие органы предельно введены в активную зону. По мере выгорания топлива компенсирующие органы выводятся из активной зоны. Когда цепная реакция становится возможной лишь при полностью выведенных компенсирующих органах, это означает, что имевшийся избыток топлива исчерпан и что дальнейшая работа реактора возможна лишь после его перегрузки.

Исследовательские реакторы имеют свои особенности. Так, к исследовательскому реактору на быстрых нейтронах может предъявляться требование компактности активной зоны. В этом случае компенсирующие органы могут представлять собой перемещающиеся части отражателя и компенсировать избыток топлива посредством изменения утечки нейтронов из активной зоны.

Отметим некоторые принципиальные особенности ядерного реактора, не свойственные генераторам энергии, основанным на иных принципах работы.

1. Высокая плотность тепловыделения (выделение большого количества энергии в сравнительно небольшом объеме топлива).

2. Потенциальная опасность увеличения выделяемой энергии до катастрофического уровня за очень короткое время.

3. В выключенном реакторе с количеством топлива, достаточным для поддержания цепной реакции, всегда сохраняется потенциальная опасность стремительного роста выделяемой энергии.

4. Цепная реакция в выключенном реакторе прекращается, однако выделение тепла продолжается за счет  $\beta$ - и  $\gamma$ -излучений из продуктов деления. Поэтому если реактор остановлен после работы на большой мощности, система охлаждения топлива определенное время должна находиться в работе, обеспечивая отбор тепла от топлива.

5. Оборудование реактора работает в условиях высокого радиационного излучения, что приводит к изменению параметров оборудования и к сокращению срока его службы. Работа персо-

нала по обслуживанию оборудования существенно усложняется, а часть оборудования вообще недоступна для обслуживания.

## 2. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ УПРАВЛЕНИЯ РЕАКТОРОМ

### 2.1. Реакция деления

При бомбардировке нейтронами ядра делящегося вещества делятся, что сопровождается выделением значительной энергии.

При каждом акте деления, вызванном одним нейтроном, в среднем испускается от *двух* до *трех* нейтронов (а вообще – от 0 до 6 нейтронов). Так, при делении тепловыми нейтронами одного ядра плутония  $^{239}\text{Pu}$  в среднем рождается 2,87 нейтрона, урана  $^{233}\text{U}$  – 2,49, урана  $^{235}\text{U}$  – 2,43. Это *мгновенные* нейтроны. Они образуются практически сразу же после деления (через  $10^{-17}$  с). Их энергия в среднем составляет 2 МэВ

Ядра изотопов  $^{233}\text{U}$ ,  $^{235}\text{U}$  и  $^{239}\text{Pu}$  могут делиться нейтронами любых энергий (в отличие, например, от ядер тория  $^{232}\text{Th}$  и урана  $^{238}\text{U}$ , которые делятся только быстрыми нейтронами).

При делении ядра образуются два осколка с различными массами. В осколках содержится избыточное количество нейтронов. Такое состояние осколков является неустойчивым. В стабильных ядрах сравнимой массы отношение числа нейтронов к числу протонов меньше, чем в осколках ядер. Неустойчивое соотношение нейтронов к протонам в ядрах-осколках переходит в устойчивое соотношение либо путем превращения избытка нейтронов в протоны в результате серии  $\beta$ -распадов, либо путем выброса излишка нейтронов. Осколки испускают избыточные нейтроны не сразу, а с задержкой. Такие нейтроны называются *запаздывающими*. Осколки деления называют также ядрами-

излучателями или предшественниками запаздывающих нейтронов. Запаздывающие нейтроны имеют энергию около 0,5 МэВ.

## 2.2. Энергия деления

Основную часть энергии, которая освобождается при делении ядер, несут осколки деления (кинетическая энергия осколков). Существенно меньшую часть энергии несут мгновенные нейтроны, появившиеся в результате деления, и  $\beta$ - и  $\gamma$ -излучение, сопровождающее акт деления.

## 2.3. Мощность реактора

При делении каждого ядра, например, урана-235, выделяется около 190 МэВ тепловой энергии (в джоулях это примерно  $190 \cdot 1,6 \cdot 10^{-13} \approx 3 \cdot 10^{-11}$  Дж).

Мощность реактора в Вт равна

$$P = 3 \cdot 10^{-11} N,$$

где  $N$  – общее количество делений в реакторе за 1 с. Мощности  $P$  в 1 Вт соответствует примерно  $N \approx 3 \cdot 10^{10}$  делений в секунду.

Итак, мощность пропорциональна числу делений в секунду, а число делений пропорционально числу нейтронов в активной зоне. Таким образом, выходная мощность реактора пропорциональна числу нейтронов в активной зоне и, следовательно, плотности нейтронов  $n$ , т.е. среднему числу нейтронов в  $1 \text{ см}^3$ :

$$P = k_n n,$$

где  $k_n$  – коэффициент пропорциональности между мощностью и плотностью нейтронов.

## 2.4. Время жизни нейтронов

Временем жизни нейтронов  $\bar{\tau}$  называется среднее время между двумя последовательными поколениями нейтронов в реакторе. Иначе говоря, это средний промежуток времени от момента образования нейтронов в акте деления до того момента, когда

они снова вызовут деление или выйдут из реакции. Точнее это время следовало бы именовать временем жизни поколения нейтронов, но для краткости слово “поколения” обычно опускают.

В реакторах, в которых в качестве замедлителя используется графит или тяжелая вода, среднее время жизни нейтронов  $\bar{\tau}$  примерно равно  $10^{-3}$  с. Если для замедления быстрых нейтронов используется обычная вода, то  $\bar{\tau} \approx 10^{-4}$  с. В реакторах на быстрых нейтронах  $\bar{\tau} = 10^{-7} \div 10^{-8}$  с.

## 2.5. Коэффициент размножения

Для характеристики цепной реакции, происходящей в реакторе, вводится понятие *коэффициента размножения*  $k$ . Это отношение числа нейтронов данного поколения к числу нейтронов предшествующего поколения или, что то же самое, отношение плотностей нейтронов двух соседних поколений  $n_i$  и  $n_{i-1}$ :

$$k = \frac{n_i}{n_{i-1}}. \quad (2.1)$$

При  $k = 1$  в единицу времени количество исчезающих нейтронов равно количеству рождающихся – плотность нейтронов (и мощность реактора) постоянна (рис. 2.1). Такое состояние реактора называют *критическим*. При  $k > 1$  плотность нейтронов (а следовательно, и мощность реактора) увеличивается (рис. 2.1). Такое состояние реактора называют *надкритическим*. При  $k < 1$  плотность нейтронов (и мощность реактора) непрерывно уменьшается, цепная реакция в конечном счете прекращается (рис. 2.1).

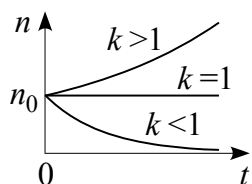


Рис. 2.1. Зависимость плотности нейтронов  $n$  от времени  $t$  при различных значениях коэффициента размножения  $k$

Такое состояние реактора называют *подкритическим*.

Для реактора бесконечных размеров коэффициент размножения  $k$  определялся бы только свойствами и расположением материалов в активной зоне. В реакторе конечных размеров учитывают утечку нейтронов из активной зоны и используют понятие эффективного коэффициента размножения  $k_{эф}$ . Далее под обозначением  $k$  мы будем подразумевать *эффективный* коэффициент размножения реактора конечных размеров.

Используя понятия коэффициента размножения (2.1) и времени жизни нейтронов, можно записать выражение для скорости изменения плотности нейтронов в произвольный момент времени  $t$ . Эта скорость равна отношению разности плотностей нейтронов в соседних поколениях к времени жизни поколения:

$$\frac{dn}{dt} = \frac{kn - n}{\bar{\tau}} = \frac{(k-1)n}{\bar{\tau}}. \quad (2.2)$$

Разделив в уравнении (2.2) переменные, придем к выражению

$$\frac{dn}{n} = \frac{k-1}{\bar{\tau}} dt,$$

проинтегрировав которое, получим  $\ln n - \ln n_0 = \ln \frac{n}{n_0} = \frac{k-1}{\bar{\tau}} t$  или

$$n = n_0 e^{\frac{k-1}{\bar{\tau}} t}, \quad (2.3)$$

где  $n_0$ ,  $n$  – плотность нейтронов соответственно в начальный (нулевой) момент времени и в момент времени  $t$ . Как видно из формулы (2.3), при  $k \neq 1$  плотность нейтронов и, следовательно, мощность реактора изменяется по экспоненте: при  $k > 1$  наблюдается рост, при  $k < 1$  – уменьшение (рис. 2.1). Таким образом, путем изменения коэффициента размножения можно осуществлять регулирование мощности (рис. 2.2).

Отметим, что в приведенных рассуждениях мы исходили из

упрощенного предположения, что все нейтроны являются мгновенными. Влияние запаздывающих нейтронов на кинетику реактора рассмотрим ниже.

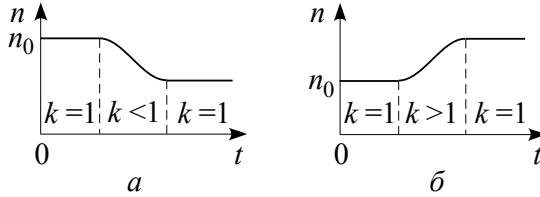


Рис. 2.2. Изменение плотности нейтронов при переводе реактора на более низкий (а) и более высокий (б) уровень мощности

## 2.6. Избыточный коэффициент размножения

Удобно использовать отклонение коэффициента размножения  $k$  от единицы, т.е. от того значения  $k$ , при котором мощность поддерживается на стабильном уровне:

$$\Delta k = k - 1. \quad (2.4)$$

При  $\Delta k > 0$  это отклонение называют также *избыточным коэффициентом размножения*.

С учетом обозначения (2.4) уравнение (2.3) примет вид

$$n = n_0 e^{\frac{\Delta k}{\bar{\tau}} t}. \quad (2.5)$$

При  $\Delta k = 0$  плотность нейтронов  $n$  стабильная, при  $\Delta k > 0$   $n$  увеличивается, а при  $\Delta k < 0$  уменьшается.

## 2.7. Период реактора

В уравнениях (2.3) и (2,5) введем обозначение

$$T_R = \frac{\bar{\tau}}{k-1} = \frac{\bar{\tau}}{\Delta k}. \quad (2.6)$$

Параметр  $T_R$  (2.6) называется *периодом реактора*. Тогда уравнения (2.3) и (2,5) примут вид

$$n = n_0 e^{\frac{t}{T_R}}. \quad (2.7)$$



Из формулы (2.7) следует, что период реактора представляет собой время, в течение которого мощность реактора изменяется в  $e = 2,718$  раз.

Из уравнения (2.2) следует, что  $\frac{n}{dn/dt} = \frac{\bar{\tau}}{k-1}$ . Отсюда и из

формулы (2.6) получим выражение периода реактора через плотность нейтронов и ее производную:

$$T_R = \frac{n}{dn/dt}. \quad (2.8)$$

При  $T_R > 0$  (этому случаю, как видно из формулы (2.6), соответствует  $\Delta k > 0$ ) мощность реактора непрерывно возрастает. При  $T_R < 0$  (т.е. при  $\Delta k < 0$ ) мощность реактора падает. Из формулы (2.8) видно, что при постоянном уровне мощности (когда  $dn/dt = 0$ ) период реактора равен бесконечности.

### 2.8. Установившийся уровень подкритического реактора

До какого уровня упадет мощность реактора при  $\Delta k < 0$ ? Считаем, что в реакторе имеется внешний (независимый) источник нейтронов с интенсивностью  $S_{вн}$  (нейтрон/см<sup>3</sup>/с). Этот источник увеличивает плотность нейтронов (нейтр./см<sup>3</sup>) на величину  $S_{вн}$  в течение одной секунды, т.е. увеличивает скорость изменения плотности нейтронов  $dn/dt$  дополнительно на величину  $S_{вн}$ . Для этого случая уравнение (2.2) следует видоизменить, добавив в его правую часть дополнительный член  $S_{вн}$ :

$$\frac{dn}{dt} = \frac{k-1}{\bar{\tau}} n + S_{вн}. \quad (2.9)$$

Для установившегося состояния, когда плотность нейтронов не меняется, т.е. когда  $dn/dt = 0$ , уравнение (2.9) примет вид

$$\frac{k-1}{\bar{\tau}} n + S_{вн} = 0.$$

Отсюда получим

$$n = -\frac{S_{\text{вн}}\bar{\tau}}{k-1}. \quad (*)$$

Мы рассматриваем подкритическое состояние реактора, когда  $k < 1$ . Учитывая это, запишем формулу (\*) для установившейся плотности нейтронов в следующем виде:

$$n = \frac{S_{\text{вн}}\bar{\tau}}{1-k} = \frac{S_{\text{вн}}\bar{\tau}}{|\Delta k|}. \quad (2.10)$$

Формула (2.10) показывает, что чем больше  $|\Delta k|$ , тем меньше установившаяся плотность нейтронов в подкритическом реакторе. Таким образом, в установившемся подкритическом состоянии реактор ведет себя как усилитель (“умножитель”) нейтронов, генерируемых внешним источником.

В формуле (2.10)  $S_{\text{вн}}$  – плотность нейтронов, создаваемая источником за 1 с. Произведение  $S_{\text{вн}}\bar{\tau}$  есть плотность нейтронов, создаваемая источником за время жизни мгновенных нейтронов  $\bar{\tau}$ . Обозначим ее  $n_{S\tau}$  и запишем уравнение (2.10) в виде

$$\frac{n}{n_{S\tau}} = \frac{1}{1-k} = \frac{1}{|\Delta k|}. \quad (2.11)$$

Коэффициент усиления (умножения)

$$Y = \frac{1}{|\Delta k|} = \frac{1}{1-k} \quad (2.12)$$

для краткости называют *умножением*.

Когда  $k < 1$  и, следовательно,  $\Delta k < 0$ , величину

$$|\Delta k| = 1 - k \quad (2.13)$$

называют *подкритичностью* реактора.

Из формулы (2.10) видно, что зависимость установившейся плотности нейтронов от коэффициента размножения графически представляет собой гиперболу. Причем  $n \rightarrow \infty$  при  $k \rightarrow 1$ . На рис. 2.3 эта зависимость показана для диапазона коэффициента

размножения от 0,9 до 0,995. Установившаяся плотность нейтронов выражена в относительных единицах.

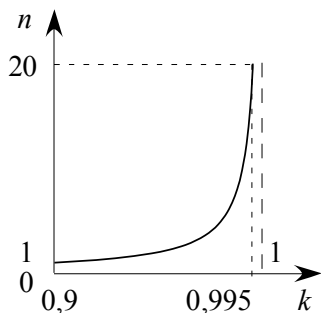


Рис. 2.3. Установившееся значение плотности нейтронов в подкритическом реакторе как функция коэффициента размножения

## 2.9. Период реактора в подкритическом режиме

Формула (2.10) соответствует постоянному значению коэффициента размножения  $k$  в подкритическом состоянии. Однако этой формулой в качестве приближенной можно пользоваться и при достаточно медленном изменении коэффициента размножения. Из формулы (2.10) получим выражение производной

$$\frac{dn}{dt} = S_{\text{вн}} \bar{\tau} \frac{d}{dt} (1-k)^{-1} = -S_{\text{вн}} \bar{\tau} \frac{1}{(1-k)^2} \left( -\frac{dk}{dt} \right) = \frac{S_{\text{вн}} \bar{\tau}}{(1-k)^2} \frac{dk}{dt}$$

и, подставив его и выражение (2.10) в формулу (2.8), получим

$$T_R = \frac{n}{dn/dt} = \frac{1-k}{dk/dt}. \quad (2.14)$$

Из формулы (2.14) видно, что при  $dk/dt = \text{const}$ , т.е. при постоянной скорости изменения коэффициента размножения, период реактора пропорционален подкритичности  $|\Delta k| = 1-k$ . При крайне медленном увеличении коэффициента размножения  $k$  и приближении его к единице период реактора стремится к нулю.

**Замечание.** *Еще раз отметим, что приведенные выше соотношения получены в предположении, что все нейтроны являются мгновенными (запаздывающие нейтроны не учитывались).*

## 2.10. Запаздывающие нейтроны

Из всего количества нейтронов, образовавшихся в результате деления ядер, запаздывающие нейтроны составляют очень малую часть (доли процента). Долю запаздывающих нейтронов от всех образовавшихся нейтронов обозначают буквой  $\beta$ . Подавляющую часть образовавшихся нейтронов составляют мгновенные нейтроны, доля которых равна  $1 - \beta$ .

Обычно запаздывающие нейтроны представляют в виде  $N_i$  групп. Параметры каждой группы помечают индексом  $i$ . Чаще всего используют шесть групп ( $N_i = 6$ ). Как показывает практика, такого представления вполне достаточно для описания кинетики реактора. Каждая  $i$ -я группа характеризуется двумя параметрами. Во-первых, это *постоянная распада* предшественников (ядер-излучателей) запаздывающих нейтронов  $\lambda_i$ . Обратная величина  $T_i = 1/\lambda_i$  есть время жизни запаздывающих нейтронов группы  $i$ . За это время количество предшественников запаздывающих нейтронов  $i$ -й группы уменьшается в  $e$  раз. Во-вторых,  $i$ -я группа характеризуется *долей*  $\beta_i$ , которую эта группа составляет среди суммарной доли всех запаздывающих нейтронов  $\beta$ . Полная доля запаздывающих нейтронов выражается суммой

$$\beta = \sum_{i=1}^6 \beta_i. \quad (2.15)$$

Часто используют не *полные* доли  $\beta_i$ , а *относительные* доли  $\mu_i$ :

$$\mu_i = \frac{\beta_i}{\beta}. \quad (2.16)$$

Очевидно, что

$$\sum_{i=1}^6 \mu_i = 1. \quad (2.17)$$

**Таблица 2.1.** Параметры 6 групп запаздывающих нейтронов при делении  $^{235}\text{U}$  тепловыми нейтронами ( $\beta = 0,0065$ )

№ гр.	$\mu_i = \frac{\beta_i}{\beta}$	$\lambda_i, \text{c}^{-1}$	$T_i = \frac{1}{\lambda_i}, \text{c}$	$\beta_i = \beta\mu_i$	$\frac{\beta_i}{\lambda_i}, \text{c}$
1	0,033	0,0124	80,6	0,000214	0,0173
2	0,219	0,0305	32,8	0,001424	0,04667
3	0,196	0,111	9,01	0,001274	0,01148
4	0,395	0,301	3,32	0,002567	0,00853
5	0,115	1,13	0,885	0,000748	0,000662
6	0,042	3,00	0,333	0,000273	0,000091
	$\sum_{i=1}^6 \mu_i =$ $= \mu = 1$			$\sum_{i=1}^6 \beta_i = \beta =$ $= 0,0065$	$\sum_{i=1}^6 \frac{\beta_i}{\lambda_i} =$ $= 0,0847$

**Таблица 2.2.** Параметры 6 групп запаздывающих нейтронов при делении  $^{239}\text{Pu}$  быстрыми нейтронами ( $\beta = 0,00216$ )

№ гр.	$\mu_i = \frac{\beta_i}{\beta}$	$\lambda_i, \text{c}^{-1}$	$T_i = \frac{1}{\lambda_i}, \text{c}$	$\beta_i = \beta\mu_i$	$\frac{\beta_i}{\lambda_i}, \text{c}$
1	0,038	0,0129	77,5	0,000082	0,00636
2	0,28	0,0311	32,2	0,000605	0,01944
3	0,216	0,134	7,46	0,000467	0,00348
4	0,328	0,331	3,02	0,000708	0,00214
5	0,103	1,26	0,794	0,000222	0,000177
6	0,035	3,21	0,312	0,000076	0,000024
	$\sum_{i=1}^6 \mu_i =$ $= \mu = 1$			$\sum_{i=1}^6 \beta_i = \beta =$ $= 0,00216$	$\sum_{i=1}^6 \frac{\beta_i}{\lambda_i} =$ $= 0,0316$

В качестве иллюстрации в табл. 2.1 и 2.2 приведены параметры запаздывающих нейтронов для урана-235 и плутония-239.

Предшественники запаздывающих нейтронов распадаются по экспоненциальному закону.

$$C_i(t) = C_{i0} e^{-\frac{t}{T_i}}, \quad (2.18)$$

где  $C_{i0} = C_i(t=0)$  – начальное значение плотности предшественников запаздывающих нейтронов  $i$ -й группы. Вместо времени

жизни  $T_i$  можно рассматривать постоянную распада предшественников  $i$ -й группы  $\lambda_i$ :

$$\lambda_i = \frac{1}{T_i}. \quad (2.19)$$

Тогда

$$C_i(t) = C_{i0} e^{-\lambda_i t}. \quad (2.20)$$

Естественно, для суммарной плотности предшественников всех шести групп запаздывающих нейтронов справедливо выражение

$$C(t) = \sum_{i=1}^6 C_i(t) = \sum_{i=1}^6 C_{i0} e^{-\lambda_i t}. \quad (2.21)$$

Иногда скорость распада предшественников  $i$ -й группы запаздывающих нейтронов характеризуют не временем жизни  $T_i$ , а *периодом полураспада*  $T_{1/2i}$ , т.е. временем, за которое плотность предшественников  $i$ -й группы уменьшится в два раза. Связь  $T_i$  с  $T_{1/2i}$  получим из формулы (2.18), записав ее для  $t = T_{1/2i}$ :

$$C_i(t = T_{1/2i}) = C_{i0} e^{-T_{1/2i}/T_i} = C_{i0}/2.$$

Отсюда вытекает искомое соотношение:

$$T_i = \frac{1}{\lambda_i} = \frac{T_{1/2i}}{\ln 2}. \quad (2.22)$$

Напомним, что  $\ln 2 = 0,693$ .

Существуют рекомендации использовать в расчетах не шесть групп запаздывающих нейтронов, а восемь. Считается, что в этом случае точность расчетов несколько увеличивается, а их сложность остается практически той же. Иллюстрацией одной из таких рекомендаций является табл. 2.3. В ней приведены рекомендованные значения  $\mu_i$  и  $T_{1/2i}$  (чтобы выполнялось равенство

$\sum_{i=1}^8 \mu_i = 1$ , значение  $\mu_1$ , помеченное звездочкой, принято равным

0,0287, а не 0,0288, как в отчете МАГАТЭ). В табл. 2.3 приведены также значения  $\lambda_i$ , вычисленные по формуле (2.22).

**Таблица 2.3.** Параметры 8 групп запаздывающих нейтронов при делении  $^{239}\text{Pu}$  быстрыми нейтронами (данные МАГАТЭ, 1992 г.)

№ группы	$\mu_i = \beta_i / \beta$	$T_{1/2 i}, \text{с}$	$\lambda_i, \text{с}^{-1}$
1	0,0287*	55,6	0,0125
2	0,225	24,5	0,0283
3	0,0951	16,3	0,0425
4	0,149	5,21	0,133
5	0,351	2,37	0,293
6	0,0370	1,04	0,667
7	0,0974	0,424	1,63
8	0,0168	0,195	3,55

Запаздывающие нейтроны, не имеющие существенного значения при стационарном режиме работы, играют исключительную роль при нестационарных (переходных) режимах, характеризующихся изменением мощности реактора (т.е. плотности нейтронов в активной зоне).

**Замечание.** Ранее отмечалось, что средние энергии мгновенных и запаздывающих нейтронов различны (2 и 0,5 МэВ соответственно). Поэтому различны как вероятности утечки и поглощения для мгновенных и запаздывающих нейтронов в процессе замедления, так и эффективности мгновенных и запаздывающих нейтронов в процессе деления ядер. В связи с этим вводят понятие эффективной доли запаздывающих нейтронов  $\beta_{\text{эф}} = \gamma\beta$ , где  $\gamma$  – эффективность запаздывающих нейтронов. Практически для всех реакторов  $\gamma > 1$ . Что касается энергетических реакторов с большими активными зонами, то для них с хорошим при-

ближением можно считать  $\gamma = 1$  как для суммарной доли запаздывающих нейтронов, так и для каждой  $i$ -й группы. Далее, используя обозначения  $\beta$  и  $\beta_i$ , будем понимать под ними эффективные доли запаздывающих нейтронов.

### 2.11. Мгновенная критичность

Если коэффициент размножения реактора  $k$  превысит величину  $1 + \beta$ , то цепная реакция в реакторе будет происходить независимо от запаздывающих нейтронов. В этом случае коэффициент размножения только на мгновенных нейтронах (без учета запаздывающих) уже превысит единицу, и мощность реактора будет стремительно возрастать по экспоненте, как показывает формула (2.3). Поэтому такое увеличение коэффициента размножения совершенно недопустимо. Состояние реактора, когда его коэффициент размножения  $k = 1 + \beta$ , называется состоянием *мгновенной критичности* (реактор критичен по отношению к мгновенным нейтронам).

### 2.12. Уравнения кинетики реактора

Кинетика реактора описывается уравнениями

$$\frac{dn}{dt} = \frac{k(1-\beta)-1}{\bar{\tau}}n + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i + S_{\text{вн}}, \quad (2.23)$$

$$\frac{dC_i}{dt} = \frac{k\beta_i}{\bar{\tau}}n - \lambda_i C_i. \quad (2.24)$$

С помощью простейших рассуждений поясним, как получены эти уравнения.

Составим уравнения для скорости изменения плотности нейтронов  $dn/dt$ . Эта скорость равна сумме трех составляющих. Во-первых, это скорость изменения плотности нейтронов за счет образования в  $1 \text{ см}^3$  мгновенных нейтронов  $dn_{\text{м}}/dt$ . Во-вторых, это скорость образования в  $1 \text{ см}^3$  запаздывающих нейтронов



$dn_3/dt$ . В-третьих, это скорость образования в  $1 \text{ см}^3$  нейтронов, генерируемых внешним источником нейтронов с интенсивностью (скоростью генерации)  $S_{\text{вн}}$ . Таким образом,

$$\frac{dn}{dt} = \frac{dn_M}{dt} + \frac{dn_3}{dt} + S_{\text{вн}}. \quad (2.25)$$

Рассмотрим первую составляющую. Запишем выражение для скорости образования нейтронов за счет размножения *мгновенных* нейтронов. В рассматриваемом поколении в  $1 \text{ см}^3$  всего содержится  $n$  нейтронов, из них  $n(1 - \beta)$  мгновенных. В следующем поколении (оно образуется спустя время жизни мгновенных нейтронов  $\bar{\tau}$ ) мгновенные нейтроны размножатся в  $k$  раз и их станет  $kn(1 - \beta)$ . Таким образом, скорость образования нейтронов благодаря размножению *мгновенных* нейтронов будет равна

$$\frac{dn_M}{dt} = \frac{kn(1 - \beta) - n}{\bar{\tau}} = \frac{k(1 - \beta) - 1}{\bar{\tau}} n. \quad (2.26)$$

Рассмотрим вторую составляющую в сумме (2.25). Скорость образования запаздывающих нейтронов  $i$ -й группы равна по модулю скорости распада соответствующих предшественников и *противоположна по знаку*. Действительно, количество предшественников уменьшается за счет испускания ими запаздывающих нейтронов, а количество образовавшихся вследствие этого запаздывающих нейтронов увеличивается. Поэтому, взяв уравнение (2.20) с обратным знаком и продифференцировав его, получим скорость образования запаздывающих нейтронов  $i$ -й группы:

$$\frac{dn_{zi}}{dt} = -\frac{dC_i}{dt} = \lambda_i C_i e^{-\lambda_i t} = \lambda_i C_i. \quad (2.27)$$

Скорость образования запаздывающих нейтронов всех шести групп будет равна сумме

$$\frac{dn_3}{dt} = \sum_{i=1}^6 \frac{dn_{zi}}{dt} = \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i. \quad (2.28)$$

Подставляя соотношения (2.26) и (2.28) в уравнение (2.25), получим уравнение (2.23);

$$\frac{dn}{dt} = \frac{k(1-\beta)-1}{\bar{\tau}} n + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i + S_{вн}. \quad (2.23)$$

Это первое уравнение из семи уравнений кинетики реактора.

Теперь запишем уравнение для скорости изменения предшественников запаздывающих нейтронов  $i$ -й группы в  $1 \text{ см}^3$   $dC_i/dt$ . Она равна алгебраической сумме скорости производства предшественников запаздывающих нейтронов  $(dC_i/dt)^+$  (положительная величина) и скорости их распада  $(dC_i/dt)^-$  (отрицательная величина):

$$\frac{dC_i}{dt} = \left( \frac{dC_i}{dt} \right)^+ + \left( \frac{dC_i}{dt} \right)^-. \quad (+-)$$

Сначала о скорости производства предшественников. Итак, содержащиеся в  $1 \text{ см}^3$  топлива  $n$  нейтронов данного поколения спустя время  $\bar{\tau}$  вступят в реакцию деления ядер, что приведет в конечном итоге к образованию  $kn$  нейтронов. Но не все эти  $kn$  нейтронов появятся сразу. Сразу появятся  $k(1-\beta)n$  мгновенных нейтронов и  $k\beta n$  предшественников запаздывающих нейтронов. Запаздывающие нейтроны в том же количестве  $k\beta n$  какое-то время будут находиться в предшественниках и выйдут из них только спустя это время. Суммарно эти предшественники состоят из шести групп:  $k\beta n = \sum_{i=1}^6 k\beta_i n$ . Таким образом, скорость производства предшественников  $i$ -й группы в  $1 \text{ см}^3$  равна

$$\left( \frac{dC_i}{dt} \right)^+ = \frac{k\beta_i n}{\bar{\tau}}. \quad (+)$$

Скорость распада предшественников  $i$ -й группы в  $1 \text{ см}^3$  получим из уравнения (2.20) путем его дифференцирования:

$$\left(\frac{dC_i}{dt}\right)^- = -\lambda_i C_{i0} e^{-\lambda_i t} = -\lambda_i C_i. \quad (-)$$

Подставляя выражения (+) и (-) в уравнение (+-), получим уравнение (2.24) для скорости изменения плотности предшественников запаздывающих нейтронов  $i$ -й группы:

$$\frac{dC_i}{dt} = \frac{k\beta_i}{\bar{\tau}} n - \lambda_i C_i. \quad (2.24)$$

Уравнение (2.23) и шесть уравнений вида (2.24) описывают кинетику реактора. Уравнения кинетики (2.23) и (2.24) не содержат каких-либо членов, зависящих от пространственных координат. Они получены из предположения, что условия деления одинаковы в любом месте реактора (это справедливо для реактора бесконечных размеров). Поэтому уравнения (2.23) и (2.24) называют уравнениями *одноточечной* модели кинетики реактора или, иначе, *одноточечными уравнениями кинетики*. На практике одноточечная модель реактора используется очень широко, поскольку эта модель достаточно хорошо описывает изменение плотности нейтронов во времени. Еще раз отметим, что плотность нейтронов и мощность реактора пропорциональны.

### 2.13. Об определении критической массы реактора

Количество кассет, соответствующее критической массе реактора, оценивается расчетным путем на этапе проектирования реактора. Это количество рассматривается как теоретическая оценка. Реальное количество кассет определяется при физическом пуске реактора, при котором активная зона поэтапно заполняется кассетами до достижения реактором критической массы. Такое поэтапное заполнение активной зоны называется загрузкой топлива. Таким образом, в процессе загрузки осуществляется поэтапное увеличение коэффициента размножения от нуля до единицы. Принцип загрузки поясним исходя из уравнений кинетики.

Просуммировав уравнения (2.24) для всех шести групп, получим уравнение

$$\sum_{i=1}^6 \frac{dC_i}{dt} = \frac{k\beta}{\bar{\tau}} n - \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i.$$

Объединив его с первым уравнением кинетики (2.23), получим следующее уравнение

$$\frac{dn}{dt} = \frac{k-1}{\bar{\tau}} n - \sum_{i=1}^6 \frac{dC_i}{dt} + S_{\text{вн}}. \quad (2.29)$$

При любом фиксированном значении  $k < 1$  в реакторе с течением времени установится равновесное состояние, т.е. состояния с нулевыми значениями производных:  $\frac{dn}{dt} = 0$  и  $\frac{dC_i}{dt} = 0$ . Для такого

состояния уравнение (2.29) упростится и примет вид

$$0 = \frac{k-1}{\bar{\tau}} n + S_{\text{вн}}.$$

Запишем это уравнение в следующем виде

$$1 - k = S_{\text{вн}} \bar{\tau} \frac{1}{n}.$$

Из этого уравнения следует важная закономерность: если  $k \rightarrow 1$ , то  $1/n \rightarrow 0$ . Эта закономерность позволяет оценивать количество кассет, соответствующее критическому состоянию реактора, в процессе загрузки активной зоны.

После каждого этапа загрузки активной зоны очередной порцией кассет определяют плотность нейтронов  $n$  и строят кривую зависимости  $1/n$  от количества загруженных кассет  $N$ . Линейно экстраполируя кривую  $1/n$  к нулю по двум последним этапам загрузки, оценивают то количество кассет, которое соответствует критическому состоянию реактора.

**Замечание.** На самом деле после каждого этапа загрузки активной зоны измеряют не плотность нейтронов  $n$ , а связанную с ней скорость счета, т.е. число нейтронов, зарегистриро-

ванных датчиком нейтронов за одну секунду. Вычисляют обратную ей величину (обратный счет) и строят кривую “количество загруженных кассет – обратный счет”. Метод определения количества кассет, соответствующих критическому состоянию реактора, от этого не меняется. На рис. 2.4, поясняющем этот метод, под обозначением  $1/n$  понимается обратный счет.

Каждому этапу (шагу) загрузки соответствует свое экстраполированное значение кассет. На рис. 2.4 отмечены два экстраполированных критических значения кассет  $N_{m-1}^0$  и  $N_m^0$ , соответствующих двум соседним этапам загрузки (индексами  $m-1$  и  $m$  помечены порядковые номера этапов). При глубокой подкритичности ( $k < 0,9$ ) разброс экстраполированных критических значений кассет получается довольно большим. По мере увеличения коэффициента размножения точность экстраполяции повышается.

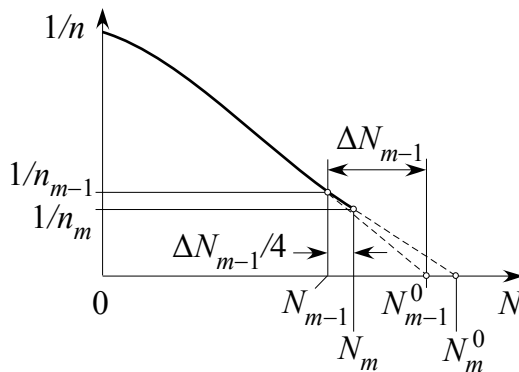


Рис. 2.4. Зависимость обратного счета  $1/n$  от количества загруженных кассет  $N$ . Кривая в виде сплошной линии соответствует проведенным этапам загрузки, две пунктирные прямые – экстраполяция кривой  $1/n$  по двум последним соседним этапам загрузки

После каждого этапа загрузки вычисляют разность между экстраполированным критическим количеством кассет и реально загруженным количеством. Из соображений ядерной безопасности количество кассет для следующего этапа загрузки принимают

равным  $1/4$  от этой вычисленной разности. На рис. 2.4 помечена разность между экстраполированным критическим и загруженным количеством кассет  $\Delta N_{m-1} = N_{m-1}^0 - N_{m-1}$ , вычисленная после  $(m-1)$ -го этапа загрузки, а также количество кассет  $\Delta N_{m-1}/4$ , загруженное во время следующего ( $m$ -го) этапа.

Загрузку реактора начинают с заполнения кассетами центра активной зоны. Затем продвигаются к периферии, последовательно окружая по периметру уже набранную часть активной зоны новыми кассетами.

При загрузке стержни и аварийной защиты, и органов регулирования располагают так, чтобы перемещение этих стержней при аварийном сигнале (от автоматики или от оператора) обеспечивало перевод реактора в надежное подкритическое состояние.

#### **2.14. Одна эквивалентная группа запаздывающих нейтронов**

Нередко для упрощенных (оценочных) расчетов шесть групп запаздывающих нейтронов заменяют одной эквивалентной. Параметры эквивалентной группы обычно определяют из условия эквивалентности установившихся состояний.

Изменение плотности предшественников запаздывающих нейтронов  $i$ -й группы описывается уравнением (2.24):

$$\frac{dC_i}{dt} = \frac{k\beta_i}{\bar{\tau}} n - \lambda_i C_i. \quad (2.24)$$

Поскольку в *установившемся* состоянии  $dC_i/dt = 0$ , из уравнения (2.24) получим плотность предшественников  $i$ -й группы:

$$C_i(t \rightarrow \infty) = \frac{k}{\bar{\tau}} n \frac{\beta_i}{\lambda_i}.$$

Плотность предшественников всех шести групп равна сумме

$$\sum_{i=1}^6 C_i(t \rightarrow \infty) = \frac{k}{\bar{\tau}} n \sum_{i=1}^6 \frac{\beta_i}{\lambda_i}. \quad (2.30)$$

При переходе от шести групп запаздывающих нейтронов к

одной эквивалентной с параметрами  $\beta_{\text{э}}$  и  $\lambda_{\text{э}}$  шесть уравнений (2.24) заменяются одним аналогичным уравнением:

$$\frac{dC_{\text{э}}}{dt} = \frac{k\beta_{\text{э}}}{\bar{\tau}} n - \lambda_{\text{э}} C_{\text{э}}. \quad (2.31)$$

Отсюда для установившегося состояния ( $dC_{\text{э}}/dt = 0$ ) получим

$$C_{\text{э}}(t \rightarrow \infty) = \frac{k}{\bar{\tau}} n \frac{\beta_{\text{э}}}{\lambda_{\text{э}}}. \quad (2.32)$$

Сначала определимся с долей запаздывающих нейтронов для эквивалентной группы  $\beta_{\text{э}}$ . Примем ее равной суммарной доле всех шести исходных групп:

$$\beta_{\text{э}} = \beta = \sum_{i=1}^6 \beta_i. \quad (2.33)$$

После этого определим постоянную распада предшественников запаздывающих нейтронов эквивалентной группы  $\lambda_{\text{э}}$ . Потребуем, чтобы установившееся состояние плотности предшественников не изменилось при замене шести групп одной эквивалентной:

$$C_{\text{э}}(t \rightarrow \infty) = \sum_{i=1}^6 C_i(t \rightarrow \infty).$$

Из этого равенства с учетом выражений (2.30) и (2.32) получим

$$\beta_{\text{э}} / \lambda_{\text{э}} = \sum_{i=1}^6 \beta_i / \lambda_i,$$

откуда с учетом соотношения (2.33) определим постоянную распада предшественников эквивалентной группы:

$$\lambda_{\text{э}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^6 \frac{\beta_i / \beta}{\lambda_i}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^6 \frac{\mu_i}{\lambda_i}}, \quad (2.34)$$

где  $\mu_i = \beta_i / \beta$ . В качестве примера приведем значения  $\lambda_{\text{э}}$ , соответствующие параметрам запаздывающих нейтронов, приведенным в табл. 2.1 и 2.2. Для урана-235 при делении его тепловыми нейтронами получим  $\lambda_{\text{э}} \approx 0,077 \text{ с}^{-1}$ . Для плутония-239, деляще-

гося быстрыми нейтронами,  $\lambda_3 \approx 0,068 \text{ с}^{-1}$ .

### 2.15. Реактивность. Уравнение обратных часов

Вернемся к уравнениям кинетики (2.23) и (2.24). Рассмотрим случай, когда до момента времени  $t = 0$  коэффициент размножения равен единице ( $k = 1$ ), затем в момент  $t = 0$  изменяется скачком на величину  $\Delta k$  и далее (при  $t \geq 0$ ) поддерживается на этом уровне  $k = 1 + \Delta k$ . Считаем, что мощность реактора не настолько мала, чтобы влияние внешнего источника было заметно. Итак, поскольку  $S_{\text{вн}} \ll \sum_i \lambda_i C_i$ , внешним источником нейтронов в уравнении (2.23) пренебрегаем, считая  $S_{\text{вн}} \approx 0$ .

Будем искать решение уравнений (2.23) и (2.24) в виде

$$n = A e^{st}, \quad (2.35)$$

$$C_i = C_{i0} e^{st}, \quad (2.36)$$

где  $A$  – некоторая постоянная величина,  $C_{i0} = C_i(t = 0)$  – начальное значение плотности предшественников запаздывающих нейтронов  $i$ -й группы,  $s$  – некий параметр. Запишем производные от этих выражений:

$$\frac{dn}{dt} = s A e^{st} = s n, \quad (2.37)$$

$$\frac{dC_i}{dt} = s C_{i0} e^{st} = s C_i. \quad (2.38)$$

Подставив выражения (2.35)–(2.38) в уравнение (2.23) (при этом учтем, что  $k - 1 = \Delta k$ ) и в уравнение (2.24), получим

$$s n = \frac{\Delta k - k\beta}{\bar{\tau}} n + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i, \quad (2.39)$$

$$s C_i = \frac{k\beta_i}{\bar{\tau}} n - \lambda_i C_i. \quad (2.40)$$

Выразим  $C_i$  из уравнения (2.40):  $C_i = \frac{k\beta_i n}{\bar{\tau}(s + \lambda_i)}$ . Подставив это



выражение в уравнение (2.39), получим

$$sn = \frac{\Delta k - k\beta}{\bar{\tau}} n + \sum_{i=1}^6 \lambda_i \frac{k\beta_i n}{\bar{\tau}(s + \lambda_i)} \quad \text{или} \quad s\bar{\tau} = \Delta k - k\beta + \sum_{i=1}^6 \lambda_i \frac{k\beta_i}{s + \lambda_i}.$$

Из последнего уравнения получим выражение

$$\frac{\Delta k}{k} = \frac{s\bar{\tau}}{k} + \beta - \sum_{i=1}^6 \frac{\lambda_i \beta_i}{s + \lambda_i},$$

которое (учитывая, что  $\beta = \sum_{i=1}^6 \beta_i$ ) перепишем в следующем виде:

$$\frac{\Delta k}{k} = \frac{s\bar{\tau}}{k} - \sum_{i=1}^6 \left( \frac{\lambda_i \beta_i}{s + \lambda_i} - \beta_i \right) = \frac{s\bar{\tau}}{k} + \sum_{i=1}^6 \frac{s\beta_i}{s + \lambda_i}. \quad (2.41)$$

Величина в левой части уравнения (2.41) называется *реактивно-стью*, обозначим ее  $\rho$ :

$$\rho = \frac{\Delta k}{k} = \frac{k-1}{k}. \quad (2.42)$$

С учетом этого запишем уравнение (2.41) в виде

$$\rho = \frac{s\bar{\tau}}{k} + \sum_{i=1}^6 \frac{s\beta_i}{s + \lambda_i}. \quad (2.43)$$

Из соотношения (2.42) выразим коэффициент размножения через реактивность:

$$k = \frac{1}{1 - \rho}. \quad (2.44)$$

Подставив выражение (2.44) в формулу (2.43), получим

$$\rho = s\bar{\tau}(1 - \rho) + \sum_{i=1}^6 \frac{s\beta_i}{s + \lambda_i}.$$

Это уравнение после элементарных преобразований примет вид

$$\rho = \frac{\bar{\tau}s}{\bar{\tau}s + 1} + \frac{1}{\bar{\tau}s + 1} \sum_{i=1}^6 \frac{s\beta_i}{s + \lambda_i}. \quad (2.45)$$

Уравнение (2.45) называется *уравнением обратных часов*. Оно является алгебраическим уравнением седьмой степени относительно параметра  $s$ . Каждому фиксированному значению реак-

тивности  $\rho$  соответствует набор семи корней  $s_0, s_1, \dots, s_6$ , т.е. набор семи значений параметра  $s$ , при которых удовлетворяется уравнение (2.45). Это значит, что плотность нейтронов описывается суммой семи слагаемых вида (2.35):

$$n(t) = A_0 e^{s_0 t} + \sum_{i=1}^6 A_i e^{s_i t}. \quad (2.46)$$

Из этой формулы видно, что начальное значение плотности нейтронов (когда  $t = 0$ ) равно

$$n_0 = A_0 + \sum_{i=1}^6 A_i. \quad (2.47)$$

Величины  $A_0, A_1, \dots, A_6$  представляют собой начальные значения соответствующих слагаемых в формуле (2.46).

Задаваясь в формуле (2.45) значениями  $s$  легко построить график зависимости  $\rho$  от  $s$  (рис. 2.5).

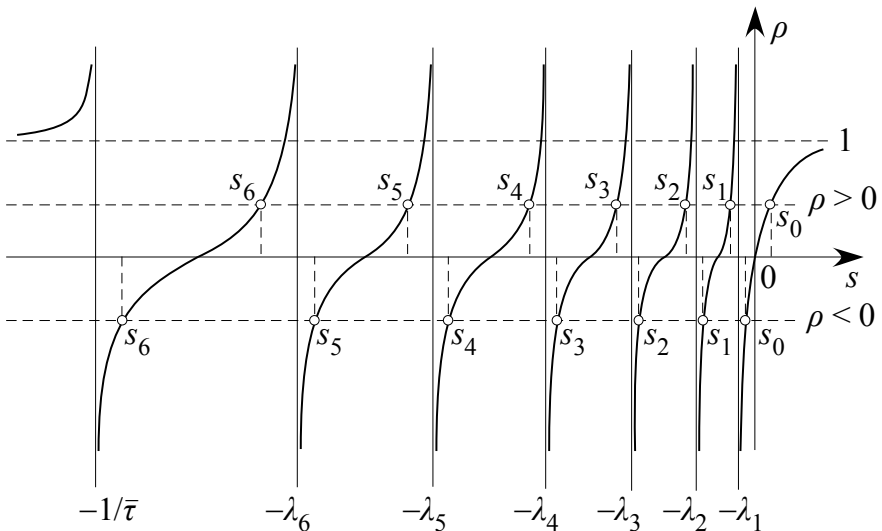


Рис. 2.5. Качественный вид зависимости  $\rho$  от параметра  $s$

При некоторых значениях  $s$  наблюдается разрыв  $\rho$  (мгновенное изменение от  $-\infty$  до  $+\infty$ ). Некоторые значения  $\rho$  на рис.

2.5 не соответствуют физическим соображениям. Это очевидно из самого определения  $\rho$  согласно формуле (2.42). Действительно,  $\rho = (k-1)/k$  и никак не может быть больше единицы: при  $k \rightarrow 0 \rho \rightarrow -\infty$ , при  $k=1 \rho=0$ , при  $k \rightarrow \infty \rho \rightarrow 1$ . Однако рассмотрение более широкого диапазона придает кривым на рис. 2.5 большую наглядность.

### 2.16. Положительная реактивность

Из рис. 2.5 видно, что при  $\rho > 0$  уравнение (2.45) имеет шесть отрицательных корней ( $s_1 < 0, s_2 < 0, \dots, s_6 < 0$ ) и один положительный ( $s_0 > 0$ ). Это значит, что с течением времени шесть слагаемых в уравнении (2.46) будут затухать (стремиться к нулю), а одно слагаемое, соответствующее положительному корню, будет непрерывно возрастать. Таким образом, плотность нейтронов будет непрерывно возрастать.

Отметим, что кривые на рис. 2.5 имеют асимптоты в виде вертикальных прямых, которым соответствуют уравнения

$$s = -\lambda_1, \dots, s = -\lambda_6, s = -\frac{1}{\tau}.$$

Рис. 2.5 наглядно показывает, что модуль каждого из отрицательных корней  $|s_i|$  имеет тот же порядок, что и соответствующая постоянная распада предшественников запаздывающих нейтронов  $\lambda_i$ . По истечении некоторого промежутка времени  $t^*$

(порядка  $1/\lambda_1$ ) можно пренебречь суммой  $\sum_{i=1}^6 A_i e^{s_i t}$  в формуле

(2.46). Напомним, что  $\lambda_1$  это *наименьшая* постоянная распада, соответствующая первой группе запаздывающих нейтронов с наибольшим временем жизни  $T_1 = 1/\lambda_1$ . Итак, *по прошествии некоторого времени  $t^*$*  изменение плотности нейтронов определяется лишь положительным корнем  $s_0$  и происходит по закону

$$n(t) = A_0 e^{s_0 t}. \quad (2.48)$$

Обозначив

$$s_0 = \frac{1}{T_R}, \quad (2.49)$$

перепишем формулу (2.48) в виде

$$n(t) = A_0 e^{\frac{t}{T_R}}. \quad (2.50)$$

В уравнениях (2.49) и (2.50)  $T_R$  представляет собой период реактора, который, как говорилось ранее, есть время, в течение которого плотность нейтронов увеличивается в  $e$  раз.

На рис. 2.6.а показан качественный вид изменения плотности нейтронов в линейном масштабе при положительном скачке реактивности. По прошествии некоторого времени  $t^*$  рост плотности нейтронов определяется лишь одной экспонентой. Этот рост в логарифмическом масштабе для моментов времени  $t > t^*$  представляет собой прямую линию (рис. 2.6.б).

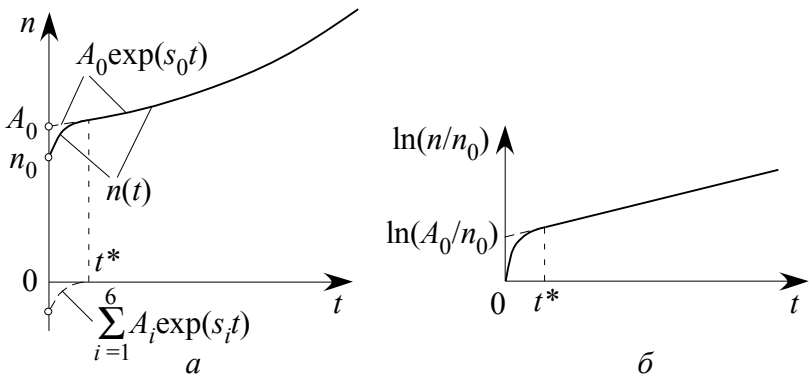


Рис. 2.6. Рост мощности реактора в линейном (а) и в логарифмическом (б) масштабе при положительном скачке реактивности

Итак, по прошествии некоторого времени  $t^*$  влияние шести отрицательных корней уже не проявляется и достаточно учитывать влияние лишь положительного корня. В связи с этим для  $t > t^*$  уравнение обратных часов (2.45) можно записать в виде

$$\rho = \frac{\bar{\tau}/T_R}{\bar{\tau}/T_R + 1} + \frac{1}{\bar{\tau}/T_R + 1} \beta \sum_{i=1}^6 \frac{\beta_i/\beta}{1 + \lambda_i T_R}. \quad (2.51)$$

В штатных режимах работы реактора период реактора  $T_R$  составляет десятки секунд и более, т.е. на много порядков больше времени жизни мгновенных нейтронов  $\bar{\tau}$ . В связи с этим уравнение (2.51) можно заметно упростить:

$$\frac{\rho}{\beta} = \sum_{i=1}^6 \frac{\mu_i}{1 + \lambda_i T_R}, \quad (2.52)$$

где  $\mu_i = \beta_i/\beta$  – относительная доля  $i$ -й группы запаздывающих нейтронов. Из уравнения (2.52) следует важный вывод. Если скачком ввести положительную реактивность  $\rho$  и замерить установившийся период реактора  $T_R$  (по прошествии времени, когда быстрые составляющие переходного процесса  $n(t)$  затухнут), то по формуле (2.52) можно вычислить величину введенной реактивности в долях  $\beta$ . Этот метод широко используется в экспериментах по определению эффективности штатных органов управления реактором.

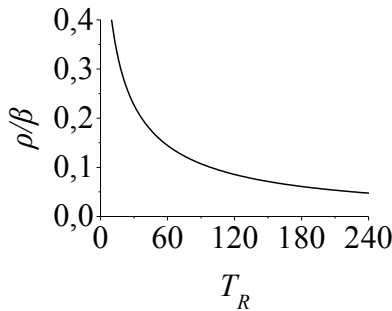


Рис. 2.7. Скачок реактивности  $\rho$  (доли  $\beta$ ) и соответствующий ему установившийся период реактора  $T_R$  (с)

На рис 2.7 приведен вычисленный по формуле (2.52) график, связывающий установившийся период реактора  $T_R$  (в диапазоне от 10 до 240 с) с уровнем скачка реактивности  $\rho$  (в долях  $\beta$ ),

обусловившим этот период реактора. Рис. 2.7 относится к реактору на тепловых нейтронах, работающему на уране-235. Параметры запаздывающих нейтронов  $\mu_i$  и  $\lambda_i$  взяты из табл. 2.1.

### 2.17. Сравнение периода реактора при учете запаздывающих нейтронов и без учета

Формула (2.52) дает дополнительный повод проиллюстрировать исключительную роль запаздывающих нейтронов в процессе управления реактором.

Если вместо шести групп запаздывающих нейтронов рассматривать одну эквивалентную (что вполне уместно при оценочных расчетах), то формула (2.52) упростится и примет вид

$$\frac{\rho}{\beta} \approx \frac{1}{1 + \lambda_9 T_R}.$$

Из этой формулы определим период реактора:

$$T_R \approx \frac{\beta - \rho}{\rho \lambda_9}. \quad (2.53)$$

Напомним, что ранее была получена формула (2.6) для вычисления периода реактора без учета запаздывающих нейтронов:

$$T_R = \frac{\bar{\tau}}{\Delta k}. \quad (2.6)$$

Из формулы (2.42) следует, что в окрестности  $k = 1$   $\rho = \Delta k / k \approx \Delta k$ . Учитывая это, из формул (2.53) и (2.6) получаем, что период реактора при учете запаздывающих нейтронов *больше* (чем без их учета) в  $(\beta - \rho) / (\lambda_9 \bar{\tau})$  раз, т.е. в *десятки* раз и более.

### 2.18. Отрицательная реактивность

При  $\rho < 0$  все семь корней уравнения (2.45) оказываются, как видно из рис. 2.5, отрицательными. Вследствие этого плотность нейтронов (2.46) будет непрерывно уменьшаться. Рис. 2.5 наглядно показывает, что если реактивность отрицательная и *большая по модулю*, то *по прошествии некоторого времени* мож-

но пренебречь в уравнении (2.46) членами, соответствующими корням  $s_1, \dots, s_6$ , и упростить для этого случая уравнение (2.46):

$$n(t) = A_0 e^{s_0 t} = A_0 e^{-\frac{t}{T_1}}, \quad (2.54)$$

где  $T_1 = -1/s_0 \approx 1/\lambda_1$ .

В формуле (2.54) показатель экспоненты в виде дроби  $-t/T_1$  является *отрицательным*. Величину  $T_1$  в знаменателе физики называют *отрицательным периодом реактора* (в теории автоматического управления эту величину принято называть *постоянной времени*). Числителем этой дроби является время  $t$ .

Из формулы (2.54) следует, что спад плотности нейтронов в конце концов будет происходить с постоянной времени  $T_1$ . Постоянная времени  $T_1$  примерно равна времени жизни первой группы запаздывающих нейтронов  $1/\lambda_1$  (т.е. группы с наибольшим временем жизни).

Если скачок реактивности отрицательный и *по модулю небольшой* ( $|\rho| < 0,3\beta$ ), то, как и в предыдущем случае, слагаемые с меньшими постоянными времени в формуле (2.46) станут достаточно малыми по прошествии некоторого времени. С этого момента времени вкладом этих слагаемых можно пренебречь и считать, что плотность нейтронов падает по экспоненте:

$$n(t) = A_0 e^{s_0 t} = A_0 e^{-t/T_0}. \quad (2.55)$$

Однако (в отличие от предыдущего случая) постоянная времени этой экспоненты  $T_0 = 1/s_0$  зависит от величины отрицательной реактивности. На рис. 2.8 показан качественный вид спада плотности нейтронов при отрицательном скачке реактивности. По истечении некоторого времени  $t^*$  этот спад в логарифмическом масштабе отображается на графике в виде прямой линии.

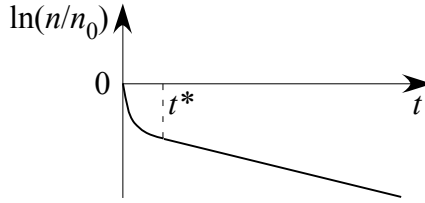


Рис. 2.8. Спад мощности реактора в логарифмическом масштабе при отрицательном скачке реактивности

### 2.19. Уравнения кинетики, выраженные через реактивность

Вернемся к уравнениям кинетики (2.23) и (2.24):

$$\frac{dn}{dt} = \frac{k(1-\beta)-1}{\bar{\tau}} n + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i + S_{вн}, \quad (2.23)$$

$$\frac{dC_i}{dt} = \frac{k\beta_i}{\bar{\tau}} n - \lambda_i C_i. \quad (2.24)$$

Перейдем в них от эффективного коэффициента размножения  $k$  к реактивности  $\rho = (k-1)/k$ . Предварительно введем новое понятие – *эффективное время жизни мгновенных нейтронов*  $\tau$ :

$$\tau = \frac{\bar{\tau}}{k}. \quad (2.56)$$

Штатные режимы работы реактора характеризуются малым отклонением коэффициента размножения  $k$  от единицы. Поэтому в этих режимах  $\tau$  мало отличается от  $\bar{\tau}$ .

Использование соотношения (2.56) позволяет выразить уравнения кинетики через реактивность в следующем виде:

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\rho - \beta}{\tau} n + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i + S_{вн}, \quad (2.57)$$

$$\frac{dC_i}{dt} = \frac{\beta_i}{\tau} n - \lambda_i C_i. \quad (2.58)$$

Отметим, что при сколько-нибудь заметной мощности  $S_{вн} \ll \sum_i \lambda_i C_i$ , в результате чего в формуле (2.57) интенсивно-



стью внешнего источника  $S_{вн}$  можно пренебречь.

Теперь временно прервем рассмотрение вопросов, относящихся непосредственно к реактору, и вернемся к ним после изложения некоторых элементов теории автоматического управления. Дело в том, что именно в теории управления разработаны универсальные методы исследования динамики систем вне зависимости от их физической природы.

### 3. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

В теории автоматического управления рассматриваются не реальные системы, а их математические модели. Поэтому разработанные в ней методы применимы к исследованию динамики систем различной физической природы, в том числе, и реакторов.

#### 3.1. Системы автоматического управления

Система автоматического управления это совокупность объекта управления (реактора) и управляющего устройства (регулятора), обеспечивающего желаемое состояние объекта. На рис. 3.1 показана блок-схема системы с указанием объекта управления  $O$ , регулятора  $P$  и их связей между собой и с окружающей средой.

Переменная величина, характеризующая текущее состояние любого элемента системы, называется *выходной величиной* (*выходным сигналом*) этого элемента и обозначается стрелкой, направленной от него. Выходная величина (обозначается стрелкой, направленной к элементу) является реакцией элемента на *входную величину* (*входной сигнал*), т.е. на воздействие, оказываемое на элемент. В общем случае элемент характеризуется несколькими входными и выходными величинами. Так, объект на рис. 3.1 имеет одну выходную величину  $y$  и две входных:  $u$  – *управляющее*

*воздействие* (преднамеренное воздействие регулятора на объект),  $f$  – *возмущающее воздействие* или *помеха* (непреднамеренное (нежелательное) воздействие на объект извне).

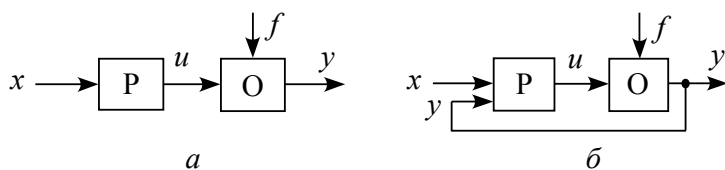


Рис.3.1. Блок-схемы разомкнутой (а) и замкнутой (б) систем

Информация о *желаемом* значении выходной величины  $y$  заводится в регулятор в виде *задающего воздействия*  $x$ . Если регулятор не получает информации о реальном состоянии объекта  $y$  (рис. 3.1.а), то система называется *разомкнутой*. Из-за наличия возмущения  $f$  выходная величина  $y$  в разомкнутой системе может существенно отличаться от желаемого значения. Поэтому практический интерес представляют только *замкнутые* системы. В них выходной сигнал  $y$  подается на вход регулятора (рис. 3.1.б), в котором осуществляется обработка входных величин, в результате чего на его выходе появляется управляющее воздействие  $u$ .

Наиболее распространенными являются замкнутые системы, в которых задающее воздействие  $x$  представляет собой желаемое значение выходной величины  $y$ , а разность этих величин  $\varepsilon = x - y$  (*ошибка регулирования*) используется для формирования управляющего воздействия (рис. 3.2). Такое управление называется *управлением по отклонению*. На рис. 3.2 кружками обозначены сумматоры, на выходах которых формируются алгебраические суммы подходящих к ним входных сигналов. Зачерченный сектор в первом сумматоре означает, что подходящий к нему сигнал  $y$  изменяет в сумматоре свой знак, так что на выходе сумматора формируется ошибка регулирования  $\varepsilon = x - y$ , на которую реаги-

рует регулятор. Во втором сумматоре к управляющему сигналу  $u$  примешивается помеха  $f$ , так что объект реагирует на сигнал  $u + f$ .

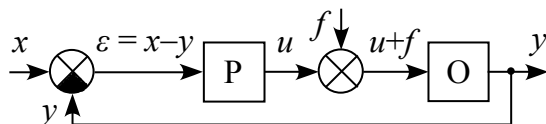


Рис. 3.2. Блок-схема системы с управлением по отклонению

Если процессы в системе достаточно точно могут быть описаны линейными уравнениями, то такая система называется *линейной*, в противном случае *нелинейной*. В системах входные воздействия могут быть как *регулярными*, т.е. вполне определенными функциями времени, так и *случайными*. В реальных системах в той или иной мере присутствуют воздействия обоих видов.

В системах автоматического управления информация может передаваться в виде непрерывных величин и дискретных (как по времени, так и по уровню). В первом случае система называется *непрерывной*, во втором – *дискретной*. При наличии дискретности только по времени система называется *импульсной*. Ниже приведены избранные элементы теории линейных непрерывных систем и очень коротко импульсных систем управления.

## 3.2. Дифференциальные уравнения систем управления

### 3.2.1. Общие соображения

В общем случае связи между входными и выходными сигналами как элементов (звеньев), входящих в систему, так и системы в целом математически выражаются дифференциальными уравнениями, отражающими их *динамические свойства* (зависимость *во времени* выходных и входных сигналов). При приравнении всех производных к нулю дифференциальные уравнения превращаются в алгебраические, отражающие соотношение входных и выходных сигналов в *установившемся режиме* (когда

сигналы уже не изменяются во времени).

### 3.2.2. Принцип наложения

Для систем, описываемых *линейными* дифференциальными уравнениями, справедлив *принцип наложения (суперпозиции)*. Он позволяет вычислить выходной сигнал  $y$  по частям, когда на систему действует нескольких входных сигналов:  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  и т.д. Сначала вычисляют частичный выходной сигнал  $y_1$  только от входного сигнала  $x_1$ , полагая  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 0$  и т.д. Затем вычисляют выходной сигнал  $y_2$  от входного сигнала  $x_2$ , полагая  $x_1 = 0$ ,  $x_3 = 0$  и т.д. И так далее. Выходной сигнал  $y$  находят как сумму частичных выходных сигналов  $y = y_1 + y_2 + \dots$ .

### 3.2.3. Линеаризация нелинейности. Безразмерные переменные

Суть *линеаризации* поясним на простом примере.

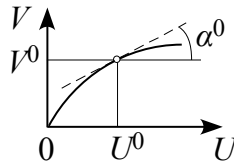


Рис. 3.3. Нелинейная зависимость сигнала  $V$  от сигнала  $U$

Пусть в некотором элементе выходной и сигнал  $V$  зависит от входного  $U$  нелинейно (рис. 3.3). Предположим, что система управления проектируется так, чтобы  $V$  и  $U$  существенно не отклонялась от некоторых своих постоянных (*базовых*) значений  $V^0$  и  $U^0$  (рис. 3.3). В этом случае нелинейную функцию  $V(U)$  можно заменить в окрестности  $U^0, V^0$  линейной функцией, разложив  $V(U)$  в ряд Тейлора и отбросив высшие производные:

$$V = V|_{U^0, V^0} + (dV/dU)_{U^0, V^0}(U - U^0) = V^0 + C(U - U^0), \quad (3.1)$$

где  $V|_{U^0, V^0} = V^0$ ,  $(dV/dU)_{U^0, V^0} = C = \operatorname{tg} \alpha^0$  — коэффициент пере-

дачи равный тангенсу угла наклона касательной к кривой  $V(U)$  в точке  $U^0, V^0$  (пунктир на рис. 3.3). Из уравнения (3.1) получим линейное уравнение в отклонениях переменных от их базовых значений  $\Delta V = V - V^0$  и  $\Delta U = U - U^0$ :

$$\Delta V = C\Delta U. \quad (3.2)$$

В общем случае  $\Delta U$  и  $\Delta V$  имеют размерность. Удобно пользоваться безразмерными переменными. Так, переписав уравнение (3.2) в виде  $\Delta V/V^0 = (CU^0/V^0)\Delta U/U^0$ , получим уравнение для безразмерных переменных  $\Delta v = \Delta V/V^0$  и  $\Delta u = \Delta U/U^0$ :

$$\Delta v = c\Delta u, \quad (3.3)$$

где  $c = CU^0/V^0$  – коэффициент передачи для этого случая.

При линеаризации нелинейности полные переменные заменяются их отклонениями от базовых значений. Такую же замену следует сделать и в уравнениях линейных элементов. Пусть элемент описывается линейным дифференциальным уравнением

$$T \frac{dZ}{dt} + Z = KV, \quad (3.3)$$

где  $T$  и  $K$  – константы, а  $V$  и  $Z$  – входной и выходной сигналы. Уравнение (3.3) для базовых значений переменных примет вид

$$T \frac{dZ^0}{dt} + Z^0 = KV^0, \quad (3.4)$$

Из уравнений (3.3) и (3.4) получим уравнение в отклонениях

$$T \frac{d\Delta Z}{dt} + \Delta Z = K\Delta V, \quad (3.5)$$

где  $\Delta Z = Z - Z^0$  и  $\Delta V = V - V^0$  – отклонения. Записав уравнение

(3.5) в виде  $T \frac{Z^0 d(\Delta Z/Z^0)}{dt} + Z^0 (\Delta Z/Z^0) = KV^0 (\Delta V/V^0)$ , перейдем к уравнению с относительными (безразмерными) переменными  $\Delta z = \Delta Z/Z^0$  и  $\Delta v = \Delta V/V^0$ :

$$T \frac{d\Delta z}{dt} + \Delta z = k\Delta v, \quad (3.6)$$

где  $k = KV^0/Z^0$  – коэффициент передачи (коэффициент усиления) для безразмерных переменных.

### 3.2.4. Дифференциальное уравнение $n$ -го порядка

В общем случае входной ( $x$ ) и выходной ( $y$ ) сигналы системы связаны дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка

$$\begin{aligned} a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = \\ = b_0 \frac{d^m x}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_{m-1} \frac{dx}{dt} + b_m x. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Здесь  $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m$  – постоянные величины.

В уравнении (3.7) учтено лишь одно воздействие  $x$ . Но это не является ограничением общности, так как по принципу наложения при нескольких входных воздействиях  $x_1, x_2, \dots$  реакция системы  $y$  равна сумме частичных реакций  $y_{x1}, y_{x2}, \dots$  на каждое из этих воздействий порознь. Каждая частичная реакция системы на один лишь входной сигнал описывается уравнением типа (3.7).

Более того, используя принцип наложения, само уравнение (3.7) можно решить по частям, записав его так:

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + \dots + a_{n-2} \frac{d^2 y}{dt^2} + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = f_m + \dots + f_2 + f_1 + f_0. \quad (3.8)$$

В уравнении (3.8) введены обозначения

$$f_0 = b_m x, f_1 = b_{m-1} \frac{dx}{dt}, f_2 = b_{m-2} \frac{d^2 x}{dt^2}, \dots, f_m = b_0 \frac{d^m x}{dt^m} \quad (3.9)$$

Функции  $f_0, \dots, f_m$  можно рассматривать как входные сигналы.

Искомый выходной сигнал  $y$  в силу принципа наложения можно представить в виде суммы частичных выходных сигналов

$$y = y_0 + y_1 + \dots + y_m. \quad (3.10)$$

Каждый частичный выходной сигнал обусловлен лишь одним входным сигналом, когда все прочие считаются равными нулю.

Сначала из уравнения (3.8) находится частичный выходной сигнал  $y_0$ , обусловленный лишь одним входным сигналом  $f_0$ . Зная  $y_0$ , нетрудно вычислить  $y_1$ . Действительно, из выражения (3.9) следует, что входные сигналы  $f_1$  и  $f_0$  связаны соотношением  $f_1 = (b_{m-1}/b_m)(df_0/dt)$ . Следовательно, точно так же связаны между собой и выходные частичные сигналы  $y_1$  и  $y_0$ . Далее из выражения (3.9) находится зависимость  $f_2$  от  $f_1$ :  $f_2 = (b_{m-2}/b_{m-1})(df_1/dt)$ . Тем самым находится зависимость  $y_2$  от  $y_1$ . И так далее. Итак, зная  $y_0$ , нетрудно вычислить  $y_1, \dots, y_m$ :

$$y_1 = \frac{b_{m-1}}{b_m} \frac{dy_0}{dt}, y_2 = \frac{b_{m-2}}{b_{m-1}} \frac{dy_1}{dt}, \dots, y_m = \frac{b_0}{b_1} \frac{dy_{m-1}}{dt}. \quad (3.11)$$

### 3.2.5. О порядках производных в левой и правой части дифференциального уравнения

Для физически реализуемой системы в уравнении (3.7) порядок высшей производной в левой части уравнения всегда больше или равен порядку высшей производной в правой части:

$$n \geq m. \quad (3.12)$$

Убедимся в этом на простейшем примере. Пусть условие (3.14) не выполняется:  $n = 0$ ,  $m = 1$ . Уравнение (3.9) примет вид  $a_0 y(t) = b_0 dx(t)/dt + b_1 x(t)$ . Пусть входной сигнал  $x(t)$  изменился скачком (подробнее о скачке ниже). В момент подачи такого сигнала  $dx(t)/dt$  обращается в бесконечность. Чтобы при этом наше уравнение выполнялось, выходной сигнал  $y(t)$  в этот момент также должен стать равным бесконечности. Но никакой выходной сигнал в реальной системе не может быть бесконечно большим. Таким образом, условие (3.12) нарушаться не должно.

### 3.3. Временные характеристики

Чтобы сравнить динамические свойства систем (или элементов), их подвергают *одинаковым типовым* входным воздействиям,

причем до момента воздействия системы находятся в состоянии покоя, т.е. при нулевых начальных условиях. В этом случае реакция системы (т.е. изменение выходного сигнала во времени) называется *временной характеристикой*.

### 3.3.1. Единичный скачок

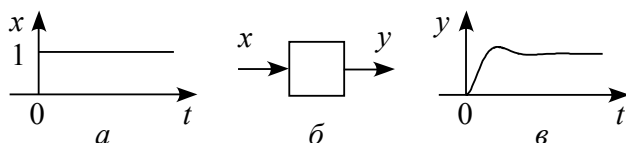


Рис. 3.4. Единичный скачок (а), блок-схема системы (б) и переходная характеристика (в)

Любой регулярный сигнал можно заменить суммой простых (типовых) сигналов. Один из них – *единичный скачок*  $1(t)$  (*единичный ступенчатый сигнал*) равный нулю до нулевого момента времени и единице в нулевой момент и далее (рис. 3.4.а):

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 & \text{при } t \geq 0. \end{cases} \quad (3.13)$$

### 3.3.2. Начальные и предначальные условия

В момент  $t = 0$  система находится в покое (при нулевых начальных условиях) и в то же время на нее уже подается входной сигнал в виде скачка (3.13). Поэтому уместнее говорить не о начальных нулевых условиях, а о предначальных, означающих, что система находится в покое вплоть до момента времени, сколь угодно близкого к нулю, но все же не доходящего до нуля. Этот момент времени обозначают  $t = -0$  (“нуль слева”). Далее под *начальными условиями* будем подразумевать *предначальные*.

### 3.3.3. Переходная характеристика

*Переходная характеристика*  $h(t)$  это выходной сигнал системы (или элемента) при подаче на ее вход единичного скачка  $1(t)$  при условии, что до момента воздействия система находилась в покое, т.е. при нулевых начальных условиях (рис. 3.4.в).



Уравнение (3.7) не изменится, если и  $x$ , и  $y$  умножить на коэффициент пропорциональности  $c = const$ . Следовательно, при входном сигнале  $x(t) = c1(t)$  выходной сигнал равен  $y(t) = ch(t)$ .

### 3.3.4. Единичный импульс. Дельта-функция

Другим типовым сигналом является *единичный импульс* или *дельта-функция*  $\delta(t)$ . Это идеализация узкого импульса, длительность которого стремится к нулю, высота – к бесконечности:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ \infty & \text{при } t = 0, \\ 0 & \text{при } t > 0, \end{cases} \quad (3.14)$$

а площадь остается равной единице:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (3.15)$$

Единичный импульс и дельта-функция это пределы реальных импульсов единичной площади, отличных от нуля в интервалах времени соответственно  $0 < t \leq \Delta t$  и  $0 \leq t < \Delta t$  при  $\Delta t \rightarrow 0$ . Математически они не тождественны, но в технической литературе, когда под начальными условиями понимаются предначальные, они не различаются и обозначаются одинаково  $\delta(t)$ .

### 3.3.5. Связь единичного импульса с единичным скачком

Используя метод предельного перехода, покажем, что единичный импульс есть *производная* от единичного скачка:

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} 1(t). \quad (3.16)$$

Рассмотрим сигнал  $x(t)$  на рис. 3.5.a равный нулю до момента  $t = 0$ , затем линейно возрастающий до единичного уровня (от 0 до  $\Delta t_1$ ) и далее (при  $t > \Delta t_1$ ) остающийся на этом уровне. Затем рассмотрим аналогичный сигнал, возрастающий быстрее ( $\Delta t_2 < \Delta t_1$ ). Производные этих сигналов  $dx(t)/dt$  отличны от ну-

ля лишь в интервалах от 0 до  $\Delta t_1$  и от 0 до  $\Delta t_2$  и равны отношению отрезков соответственно  $ab$  к  $0b$  и  $cd$  к  $0d$ , т.е. равны  $1/\Delta t_1$  и  $1/\Delta t_2$  (рис 3.5.б). В обоих случаях площади прямоугольных импульсов равны единице:  $(1/\Delta t_1)\Delta t_1 = 1$  и  $(1/\Delta t_2)\Delta t_2 = 1$ . Очевидно, что если устремить к нулю интервал нарастания  $x(t)$  от нуля до единицы, то  $x(t)$  устремится к единичному скачку  $1(t)$ , а его производная  $dx/dt$  – к единичному импульсу  $\delta(t)$ , условно изображенному в виде вертикальной стрелки с зигзагом (рис. 3.5).

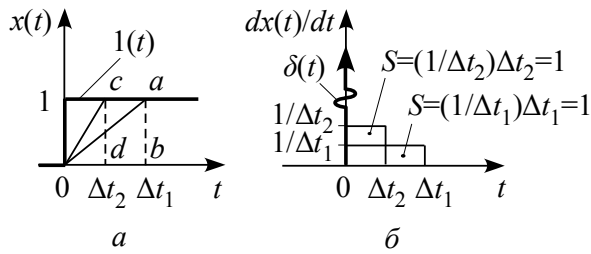


Рис. 3.5. Предельный переход к единичному скачку (а) и к единичному импульсу (б) ( $S$  — площадь импульса)

### 3.3.6. Импульсная переходная характеристика

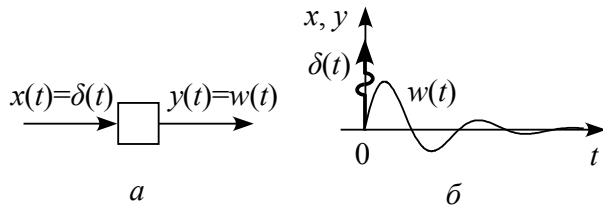


Рис. 3.6. Блок-схема системы (а), входной единичный импульс  $\delta(t)$  и импульсная переходная характеристика  $w(t)$  (б)

*Импульсная переходная характеристика* системы  $w(t)$  это выходной сигнал (реакция) системы при подаче на ее вход единичного импульса (если до этого система находилась в покое) (рис 3.6). Очевидно, что при бесконечно узком и бесконечно высоким входном импульсе с площадью  $k$  выходным сигналом будет импульсная переходная характеристика, увеличенная в  $k$  раз.

### 3.3.7. Связь импульсной переходной характеристики с переходной характеристикой

По определению  $y(t) = h(t)$  при  $x(t) = 1(t)$ . Записав в уравнение (3.7)  $1(t)$  вместо  $x(t)$  и  $h(t)$  вместо  $y(t)$  и продифференцировав его, получим то же уравнение, но связывающее не  $1(t)$  и  $h(t)$ , а  $d1(t)/dt = \delta(t)$  и  $dh(t)/dt$ . Но по определению  $y(t) = w(t)$  при  $x(t) = \delta(t)$ . Следовательно, импульсная переходная характеристика есть производная от переходной характеристики:

$$w(t) = \frac{d}{dt} h(t). \quad (3.17)$$

### 3.3.8. Выходной сигнал при произвольном входном сигнале

Произвольный входной сигнал  $x(\tau)$  показан на рис. 3.7, где  $\tau$  – текущее время,  $t$  – произвольный фиксированный момент времени, для которого требуется определить реакцию системы  $y(t)$ . При нулевых начальных условиях, т.е. при  $x(\tau < 0) = 0$ , и известной *переходной* характеристике системы  $h(\tau)$  выходной сигнал  $y(t)$  выражается *интегралом Дюамеля (интегралом свертки)*:

$$y(t) = h(t)x(0) + \int_0^t h(t-\tau) \frac{dx(\tau)}{d\tau} d\tau, \quad (3.18)$$

где  $x(0)$  – значение  $x(\tau)$  при  $\tau = 0$ . Если известна *импульсная переходная* характеристика  $w$ , выходной сигнал  $y$  равен

$$y(t) = h(0)x(t) + \int_0^t w(t-\tau)x(\tau)d\tau. \quad (3.19)$$

При  $h(0) = 0$ , что бывает часто, формула (3.19) упрощается:

$$y(t) = \int_0^t w(t-\tau)x(\tau)d\tau. \quad (3.20)$$

Приведем ход рассуждений, на котором основан вывод формулы (3.18). Разобьем интервал времени от 0 до  $t$  на  $n$  равных

промежутков длительностью  $\Delta\tau$  (рис. 3.7.а). Из  $x(\tau)$  сформируем близкий к нему сигнал ступенчатой формы  $x^1(\tau)$  и представим его в виде суммы ступенчатых сигналов высотой  $x(0)$ ,  $\Delta x_1, \dots, \Delta x_k, \dots, \Delta x_n$ . Каждый ступенчатый сигнал, смещенный относительно предыдущего на время  $\Delta\tau$ , вызовет свой выходной сигнал. Результирующий выходной сигнал будет равен сумме

$$\begin{aligned}
 y(t) &\approx h(t)x(0) + h(t - \tau_1)\Delta x_1 + h(t - \tau_2)\Delta x_2 + \dots + h(t - \tau_n)\Delta x_n = \\
 &= h(t)x(0) + \sum_{k=1}^n h(t - \tau_k)\Delta x_k .
 \end{aligned}
 \tag{3.21}$$

Ясно, что при  $n \rightarrow \infty$ , т.е. при  $\Delta\tau \rightarrow 0$ , сигнал  $x^1(\tau)$  стремится к исходному сигналу  $x(\tau)$ , а формула (3.21) – к формуле (3.18).

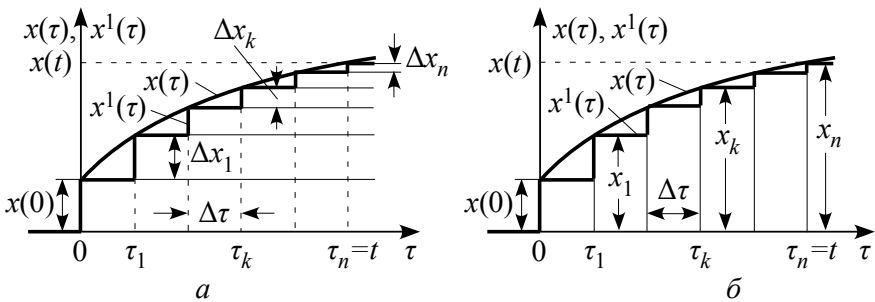


Рис. 3.7. Представление входного сигнала в виде суммы смещенных ступенчатых сигналов (а) и прямоугольных импульсов (б)

Формула (3.19) получается в результате похожих рассуждений при представлении сигнала  $x^1(\tau)$  в виде последовательности прямоугольных импульсов (рис. 3.7.б).

### 3.3.9. Реакция системы на узкий прямоугольный импульс

Входной прямоугольный импульс с амплитудой  $A_u$ , малой длительностью  $t_u$  и площадью  $S_u = A_u t_u$  представим в виде разности смещенных ступенчатых сигналов (рис. 3.8.а и б). Согласно принципу наложения сигнал на выходе  $y$  в момент  $t$  равен

$$y(t) = A_u h(t) - A_u h(t - t_u) = A_u t_u \frac{h(t) - h(t - t_u)}{t_u} \approx S_u w\left(t - \frac{t_u}{2}\right). \quad (3.22)$$

Формула (3.22) означает, что система реагирует на узкий прямоугольный импульс с площадью  $S_u$  практически так же, как на идеальный (бесконечно узкий и бесконечно высокий) импульс с той же площадью  $S_u$ , совмещенный с серединой прямоугольного импульса (рис. 3.8.в). Иначе говоря, входной прямоугольный импульс можно заменить дельта-функцией, увеличенной в  $S_u$  раз и смещенной в сторону запаздывания на время  $t_u/2$ . Математически такой импульс обозначается  $\delta(t - t_u/2)S_u$ .

**Замечание.** Узкий импульс произвольной формы с площадью  $S_u$  можно заменить идеальным (бесконечно узким и бесконечно высоким) импульсом с той же площадью  $S_u$ , совмещенным с “центром тяжести” площади исходного импульса.

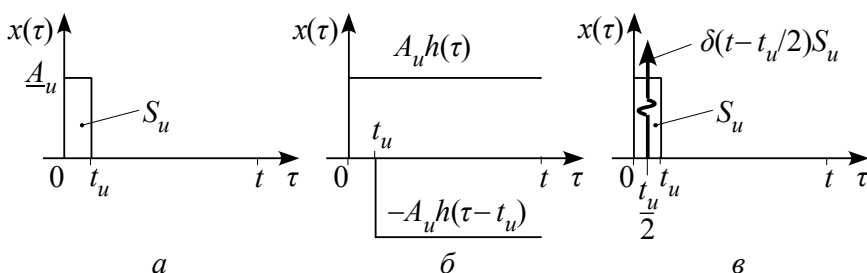


Рис. 3.8. Прямоугольный импульс (а), его представление в виде ступенчатых сигналов (б) и смещенного идеального импульса (в)

### 3.4. Операционный метод исследования линейных систем.

#### Передаточная функция

##### 3.4.1. Основные математические методы исследования

Прямой метод это решение дифференциального уравнения и вычисление переходного процесса (изменение выходного сигнала во времени), дающего наглядное представление о динамике системы. В инженерной практике широко используются косвенные

методы оценки динамики системы, не требующие решения дифференциального уравнения. Это операционный и частотный методы.

### 3.4.2. Суть операционного метода

Исследуются не дифференциальные уравнения системы, а соответствующие им алгебраические уравнения. При этом *оригиналы* (входные и выходные сигналы как функции времени) заменяются *изображениями* (функциями комплексного аргумента). Решив алгебраическое уравнение, находим изображение интересующего нас сигнала, По нему можно вычислить сам сигнал без решения дифференциального уравнения. Однако знание лишь одних изображений (без перехода к оригиналам) позволяет сделать очень важные заключения о динамических свойствах системы.

### 3.4.3. Преобразование Лапласа

Переход от оригинала, например, от  $y(t)$  к его изображению  $Y(s)$  осуществляется с помощью преобразования Лапласа:

$$Y(s) = \int_0^{\infty} y(t)e^{-st} dt, \quad (3.23)$$

где нижний предел интегрирования полагаем *нулем слева*. В формуле (3.23)  $s = \sigma + j\omega$  – комплексная переменная Лапласа ( $\sigma = const$ ,  $\omega$  принимает все значения от  $-\infty$  до  $+\infty$ ),

$$j = \sqrt{-1}. \quad (3.24)$$

Преобразование Лапласа возможно при условиях: а)  $y(t) = 0$  при  $t < 0$ , б) можно подобрать  $\sigma > 0$  так, что  $\int_0^{\infty} |y(t)|e^{-\sigma t} dt < \infty$ . В системах автоматического управления при регулярных (не случайных) воздействиях все сигналы удовлетворяют этим условиям. Естественно,  $x(t)$  и  $X(s)$  связаны аналогично:  $X(s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt$ .

Соответствие изображений оригиналам будем обозначать так:

$$X(s) \leftrightarrow x(t), \quad Y(s) \leftrightarrow y(t). \quad (3.25)$$

### 3.4.4. Некоторые свойства и соответствия преобразования

#### Лапласа

##### 1. Умножение оригинала на постоянный коэффициент

Если  $y(t) \leftrightarrow Y(s)$  и  $k = \text{const}$ , то

$$ky(t) \leftrightarrow kY(s). \quad (3.26)$$

##### 2. Изображение суммы оригиналов

Если  $y(t) = y_1(t) + \dots + y_n(t)$ , то

$$Y(s) = Y_1(s) + \dots + Y_n(s), \quad (3.27)$$

где  $Y(s) \leftrightarrow y(t)$  и  $Y_i(s) \leftrightarrow y_i(t)$ ,  $(i = 1, \dots, n)$ .

##### 3. Изображение производной первого и $n$ -го порядка

$$dy(t)/dt \leftrightarrow sY(s) - y(0), \quad (3.28)$$

где  $Y(s)$  – изображение оригинала  $y(t)$ , а  $y(0) = y(t=0)$  – начальное значение оригинала  $y(t)$ .

$$\begin{aligned} d^n y(t)/dt^n \leftrightarrow s^n Y(s) - s^{n-1} y(t=0) - s^{n-2} \left\{ dy(t)/dt \right\}_{t=0} - \\ - \dots - s \left\{ d^{n-2} y(t)/dt^{n-2} \right\}_{t=0} - \left\{ d^{n-1} y(t)/dt^{n-1} \right\}_{t=0}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

При нулевых начальных условиях, когда

$$y(t=0) = 0, \left\{ dy(t)/dt \right\}_{t=0} = 0, \dots, \left\{ d^{n-1} y(t)/dt^{n-1} \right\}_{t=0} = 0, \quad (3.30)$$

соотношения (3.28) и (3.29) упрощаются:

$$\frac{dy(t)}{dt} \leftrightarrow sY(s), \quad (3.31)$$

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} \leftrightarrow s^n Y(s). \quad (3.32)$$

##### 4. Изображение дифференциального уравнения

Из соотношений (3.31) и (3.32) видно, что при нулевых начальных условиях (именно они представляют интерес) легко перейти от записи самих производных к записи их изображений, используя следующий формальный прием. Вместо оператора дифференцирования  $d/dt$  записываем  $s$ , вместо  $d^n/dt^n$  –  $s^n$ ,

вместо  $y(t)$  и  $x(t)$  – соответственно  $Y(s)$  и  $X(s)$ . В результате при нулевых начальных условиях с помощью указанных замен из дифференциального уравнения системы (3.7) (повторим его)

$$\begin{aligned} a_0 d^n y/dt^n + a_1 d^{n-1} y/dt^{n-1} + \dots + a_{n-1} dy/dt + a_n y = \\ = b_0 d^m x/dt^m + b_1 d^{m-1} x/dt^{m-1} + \dots + b_{m-1} dx/dt + b_m x \end{aligned} \quad (3.7)$$

получаем алгебраическое уравнение для изображений:

$$A(s)Y(s) = B(s)X(s), \quad (3.33)$$

где  $A(s)$  и  $B(s)$  – полиномы  $n$ -й и  $m$ -й степени:

$$A(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n, \quad (3.34)$$

$$B(s) = b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m. \quad (3.35)$$

И наоборот: с помощью указанного приема легко перейти от уравнения в изображениях к дифференциальному уравнению.

### 5. Изображение интеграла

$$\int_0^t y(t) dt \leftrightarrow \frac{1}{s} Y(s), \quad (3.36)$$

$$\int_0^t \dots \int_0^t y(t) dt^n \leftrightarrow \frac{1}{s^n} Y(s). \quad (3.37)$$

### 6. Изображение запаздывающего оригинала (теорема запаздывания)

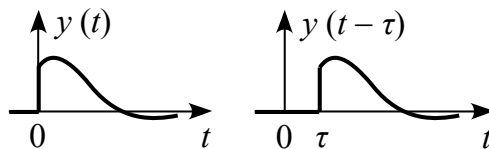


Рис. 3.9. Исходный сигнал  $y(t)$  и сигнал  $y(t-\tau)$ , смещенный относительно исходного на время запаздывания  $\tau$

Сигналу  $y(t)$  соответствует изображение  $Y(s)$ , а сигналу  $y(t-\tau)$ , отстающему от  $y(t)$  на время  $\tau$  (рис. 3.9), – изображение



$$y(t - \tau) \leftrightarrow e^{-s\tau} Y(s). \quad (3.38)$$

Напомним, что  $y(t) = 0$  при  $t < 0$ . Поэтому  $y(t - \tau) = 0$  при  $t < \tau$ .

### **7. Умножение изображений (теорема свертки)**

Если  $Y_1(s) \leftrightarrow y_1(t)$  и  $Y_2(s) \leftrightarrow y_2(t)$ , то

$$Y_1(s)Y_2(s) \leftrightarrow \int_0^t y_1(t - \tau)y_2(\tau)d\tau = \int_0^t y_1(\tau)y_2(t - \tau)d\tau. \quad (3.39)$$

### **8. Теорема о начальном (конечном) значении**

Начальное (конечное) значение оригинала вычисляется по конечному (начальному) значению изображения:

$$y(t = 0) = \{sY(s)\}_{s \rightarrow \infty}, \quad y(t \rightarrow \infty) = \{sY(s)\}_{s \rightarrow 0}. \quad (3.40)$$

Вторая формула (3.40) справедлива лишь для случая, когда  $y(t)$  стремится к определенному пределу при  $t \rightarrow \infty$ .

Наконец, о некоторых сигналах. Для разнообразия обозначим сигналы и их изображения соответственно  $x(t)$  и  $X(s)$ .

### **9. Изображение единичного скачка**

$$x(t) = 1(t) \leftrightarrow X(s) = \frac{1}{s}. \quad (3.41)$$

### **10. Изображение единичного импульса**

$$x(t) = \delta(t) \leftrightarrow X(s) = 1. \quad (3.42)$$

### **11. Изображение линейно возрастающего сигнала**

$$x(t) = t \leftrightarrow X(s) = \frac{1}{s^2}. \quad (3.43)$$

### **12. Изображение прямоугольного импульса с амплитудой $A$ и длительностью $\tau$**

$$x(t) = A\{1(t) - 1(t - \tau)\} \leftrightarrow X(s) = A \frac{1 - e^{-s\tau}}{s}. \quad (3.44)$$

#### **3.4.5. Определение оригинала по известному изображению**

Согласно формуле (3.33) запишем  $Y(s)$  в виде дроби

$$Y(s) = \frac{B(s)X(s)}{A(s)}. \quad (3.45)$$

При некоторых значениях  $s$  равных  $s_k$  полином  $A(s)$ , имеющий  $n$ -й порядок, обращается в нуль:

$$A(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0. \quad (3.46)$$

При этом  $Y(s)$  обращается в бесконечность. Уравнение (3.46) называется *характеристическим уравнением*. Значения  $s_k$ , где  $k = 1, \dots, n$ , называются *корнями* характеристического уравнения. Они же называются *полюсами* изображения  $Y(s)$ . Зная  $s_k$ , можно вычислить  $y(t)$  как сумму некоторых функций Res, называемых *вычетами функции*  $e^{st}Y(s)$  *относительно ее полюсов*:

$$y(t) = \sum_{k=1}^n \text{Res} \left\{ e^{st} Y(s) \right\}_{s=s_k}. \quad (3.47)$$

Если  $i$  полюсов имеют одно и то же значение  $s_k$  (говорят: полюс  $s_k$  порядка  $i$ ), то вычет равен

$$\text{Res} \left\{ e^{st} Y(s) \right\}_{s=s_k} = \frac{1}{(i-1)!} \left\{ \frac{d^{i-1}}{ds^{i-1}} \left[ (s-s_k)^i e^{st} Y(s) \right] \right\}_{s \rightarrow s_k}. \quad (3.48)$$

Относительно *простого* полюса (т.е. когда  $i = 1$ ) вычет равен

$$\text{Res} \left\{ e^{st} Y(s) \right\}_{s=s_k} = \left\{ (s-s_k) e^{st} Y(s) \right\}_{s \rightarrow s_k}. \quad (3.49)$$

Подставим в формулу (3.49) вместо  $Y(s)$  его выражение (3.45). Получится дробь  $(s-s_k)/A(s)$ , обращающаяся при  $s = s_k$  в неопределенность типа  $0/0$ . Раскрыв неопределенность по правилу Лопиталья, приведем формулу (3.49) к следующему виду:

$$\text{Res} \left\{ e^{st} Y(s) \right\}_{s=s_k} = \text{Res} \left\{ e^{st} \frac{B(s)X(s)}{A(s)} \right\}_{s=s_k} = \frac{B(s_k)X(s_k)}{(dA(s)/ds)_{s=s_k}} e^{s_k t}. \quad (3.50)$$

### 3.4.6. Передаточная функция

Передаточной функцией  $W(s)$  системы (звена) называется отношение изображения по Лапласу выходного сигнала системы (звена)  $Y(s)$  к изображению ее входного сигнала  $X(s)$  при нулевых начальных условиях. Учитывая выражение (3.33), запишем:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{B(s)}{A(s)}, \quad (3.51)$$

где  $A(s) = a_0s^n + \dots + a_{n-1}s + a_n$ ,  $B(s) = b_0s^m + \dots + b_{m-1}s + b_m$ .

Если на систему действуют несколько входных сигналов (допустим,  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ , причем в различных местах), то ее дифференциальному уравнению при нулевых начальных условиях соответствует уравнение в изображениях

$$A(s)Y(s) = B_1(s)X_1(s) + B_2(s)X_2(s). \quad (3.52)$$

Отсюда получим изображение выходного сигнала:

$$Y(s) = W_1(s)X_1(s) + W_2(s)X_2(s), \quad (3.53)$$

где  $W_1$  и  $W_2$  – передаточные функции системы относительно различных входных сигналов. Каждая из них определяется как отношение изображения выходного сигнала к изображению соответствующего входного сигнала (при нулевых начальных условиях), если полагать все прочие входные сигналы равными нулю:

$$W_1(s) = \frac{B_1(s)}{A(s)} = \frac{Y(s)}{X_1(s)} \Big|_{x_2=0}, \quad W_2(s) = \frac{B_2(s)}{A(s)} = \frac{Y(s)}{X_2(s)} \Big|_{x_1=0}. \quad (3.54)$$

Отметим, что у функций  $W_1$  и  $W_2$  знаменатели одинаковые.

Если на систему, находящуюся в покое, воздействует единичный импульс  $x(t) = \delta(t)$ , то выходной сигнал есть импульсная переходная характеристика  $y(t) = w(t)$ . Подстановка изображений  $X(s) = \int_0^{\infty} \delta(t)e^{-st} dt = 1$  (см. (3.43)) и  $Y(s) = \int_0^{\infty} w(t)e^{-st} dt$  в формулу (3.51) показывает, что передаточная функция есть изо-

бражение по Лапласу импульсной переходной характеристики:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \int_0^{\infty} w(t)e^{-st} dt. \quad (3.55)$$

### 3.5. Структурные схемы и их преобразование

#### 3.5.1. Структурная схема системы

Систему удобно представлять в виде соединения возможно более простых (в математическом смысле) звеньев, обладающих направленностью действия (сигнал передается только с входа на выход, воздействия выхода на вход нет). Поэтому входной сигнал звена не изменяется при присоединении к его выходу какого-либо другого звена. Звено направленного действия описывается дифференциальным уравнением с разделенными переменными: в левой части уравнения – выходной сигнал и его производные, а в правой части – входной сигнал и его производные. Передаточная функция звена имеет вид  $W(s) = Y(s)/X(s) = B(s)/A(s)$ .

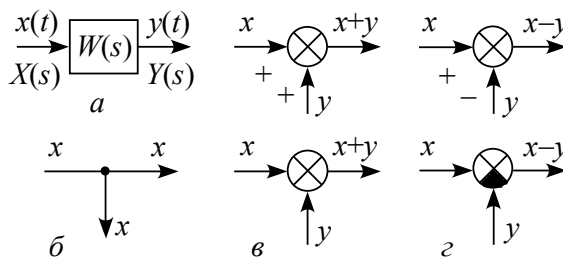


Рис. 3.11. Звено направленного действия (а), узел разветвления (б), варианты изображения сумматоров (в, г)

Звено направленного действия изображается в виде прямоугольника (рис. 3.11.а). Указывается передаточная функция звена  $W$ . Стрелками отмечаются направления сигналов. Сигналы обозначаются либо оригиналами, например,  $x$ ,  $y$ , либо соответствующими им изображениями  $X$ ,  $Y$ . Изображение системы в виде соединенных между собой звеньев направленного действия называ-

ется *структурной схемой* системы. На рис. 3.11.б, в и г показаны *узел разветвления* (один и тот же сигнал подается на разные звенья) *сумматоры* – элементы, в которых происходит суммирование сигналов. Если какой-то сигнал, проходя через сумматор, изменяет свой знак, то либо помечается знаком минус стрелка, обозначающая этот сигнал, либо зачерчивается сектор сумматора, к которому подводится этот сигнал. Отметим, что *структурная* схема отражает связь *сигналов* и не совпадает с *функциональной* схемой, которая отражает связь *физических устройств*.

Обычно интересуются связями между *ограниченным* количеством сигналов. Эти связи необходимо сохранить при замене исходной структурной схемы эквивалентной. Связи же между промежуточными звеньями и сами эти звенья можно менять. Исходной схеме могут соответствовать несколько эквивалентных схем (выбирают ту, что удобнее для исследования).

### 3.5.2. Последовательное соединение звеньев

Вход каждого последующего звена соединяется с выходом предыдущего (рис.3.12.а). Передаточная функция *последовательного* соединения звеньев (эквивалентная) равна *произведению* передаточных функций  $W_1(s)$  и  $W_2(s)$  отдельных звеньев:

$$W(s) = W_1(s)W_2(s). \quad (3.56)$$

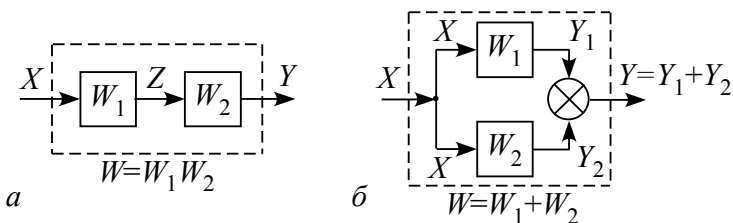


Рис. 3.12. Последовательное (а) и параллельное (б) соединение звеньев (для простоты показаны соединения лишь двух звеньев)

Очевидно, что при  $n$  последовательно соединенных звеньях

$$W(s) = W_1(s)W_2(s) \dots W_n(s). \quad (3.57)$$

Ясно, что эквивалентная передаточная функция не изменится, если какие-либо последовательные звенья поменять местами.

### 3.5.3. Параллельное соединение звеньев

Входные сигналы всех звеньев одинаковы, а выходные суммируются (рис. 3.12.б). Эквивалентная передаточная функция равна *сумме* передаточных функций отдельных звеньев:

$$W(s) = W_1(s) + W_2(s). \quad (3.58)$$

### 3.5.4. Соединение звеньев с обратной связью

Звено называется охваченным обратной связью, если его выходной сигнал после какого-либо преобразования (или без всякого преобразования) подается на его вход. На рис. 3.13  $W_1(s)$  и  $W_2(s)$  – передаточные функции соответственно прямой цепи (прямого канала) и цепи обратной связи. При *положительной* обратной связи сигнал  $z$  на ее выходе складывается с входным сигналом  $x$  ( $\varepsilon = x + z$ ), при *отрицательной* – вычитается ( $\varepsilon = x - z$ ).

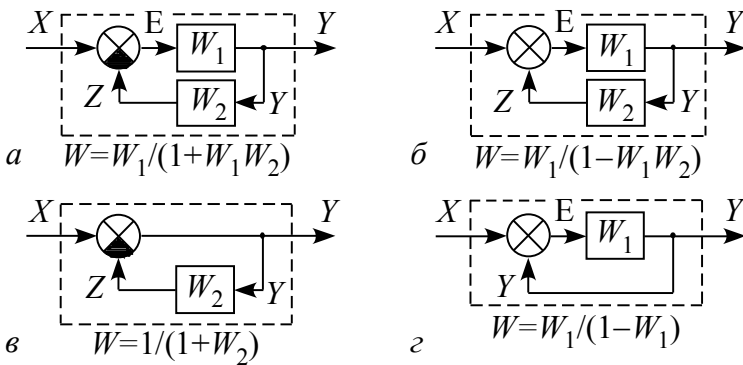


Рис. 3.13. Соединение звеньев с отрицательной обратной связью (а, в) и с положительной (б, з)

Эквивалентная передаточная функция при *отрицательной* обратной связи (рис. 3.13.а) равна

$$W(s) = \frac{W_1(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)}, \quad (3.59)$$

а при *положительной* обратной связи (рис. 3.13.б) –

$$W(s) = \frac{W_1(s)}{1 - W_1(s)W_2(s)}. \quad (3.60)$$

Нередко  $W_1 = 1$  или  $W_2 = 1$ . Так, для рис. 3.13.в, где  $W_1 = 1$  и обратная связь отрицательная,  $W = 1/(1 + W_2)$ . Для рис. 3.13.г, где  $W_2 = 1$  и обратная связь положительная,  $W = W_1/(1 - W_1)$ .

Каждая из передаточных функций  $W_1$  и  $W_2$  (рис. 3.13), в свою очередь, может представлять собой эквивалентную передаточную функцию какой-либо комбинации звеньев. Очень часто структурную схему системы приводят к *одноконтурному* виду с одной прямой цепью (с передаточной функцией  $W_1$ ) и одной обратной (с  $W_2$ ). Тогда  $W$  называют передаточной функцией *замкнутой* системы. Если разорвать обратную связь перед сумматором, то получится *разомкнутая* система с входным сигналом  $x$ , выходным сигналом  $z$  и с передаточной функцией  $W_1W_2$ . Если одновременно используются передаточные функции разомкнутой и замкнутой систем, то они помечаются соответственно индексами  $p$  и  $z$ . Так, для схемы на рис. 3.13.а  $W_p = W_1W_2$ , а  $W_z = W_1/(1 + W_1W_2)$ .

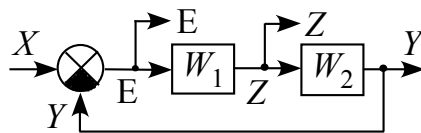


Рис. 3.14. Система с несколькими выходными сигналами

Приведем простое правило записи передаточной функции замкнутой системы. Это дробь. В числителе записывается передаточная функция прямой цепи. В знаменателе записывается  $1 +$  (если обратная связь отрицательная) или  $1 -$  (если обратная связь положительная) и далее передаточная функция разомкнутой системы. Воспользуемся этим правилом и запишем передаточные

функции замкнутой системы (рис. 3.14) относительно различных выходных сигналов ( $y, z, \varepsilon$ ) при входном сигнале  $x$ :

$$W_{yx}(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{W_1(s)W_2(s)}{1+W_1(s)W_2(s)}, \quad W_{zx}(s) = \frac{Z(s)}{X(s)} = \frac{W_1(s)}{1+W_1(s)W_2(s)},$$

$$W_{\varepsilon x}(s) = \frac{E(s)}{X(s)} = \frac{1}{1+W_1(s)W_2(s)}.$$

Отметим, что у всех трех передаточных функций одинаковый знаменатель, изменяется лишь числитель.

### 3.5.5. Перенос сумматоров и узлов разветвления

Если **сумматоры поменять местами**, соотношения между выходным сигналом  $y$  и входными сигналами  $x, f, g$  не изменятся (схемы на рис. 3.15.а эквивалентны). Изменится лишь промежуточный сигнал  $z$  (вместо  $z$  будет  $z^*$ ), но он не используется как самостоятельный сигнал. На рис. 3.15.б приведены эквивалентные схемы до и после **переноса узла через узел**.

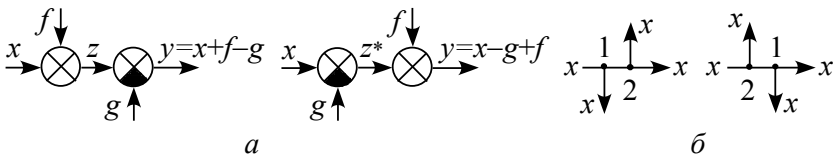


Рис.3.15. Перемена местами сумматоров (а) и узлов (б)

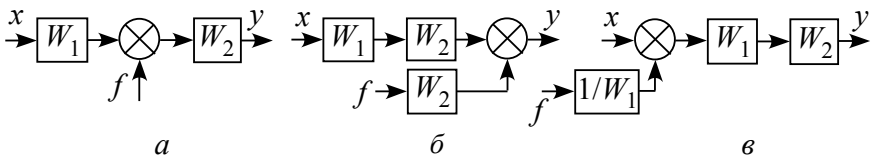


Рис. 3.16. Перенос сумматора через звено

Показанные на рис. 3.16 схемы при **переносе сумматора через звено** эквивалентны. Связь между выходным и входными сигналами одинакова для всех схем:  $Y = W_1W_2X + W_2F$  (схемы а и б),  $Y = W_1W_2X + (1/W_1)W_1W_2F = W_1W_2X + W_2F$  (схема в).



Схемы на рис. 3.17 при **переносе узла через звено** эквивалентны, так как связь выходных сигналов с входным везде одинакова:  $Y = W_1W_2X$ ,  $Z = W_1X$  (схемы *a* и *б*),  $Y = W_1W_2X$ ,  $Z = W_1W_2(1/W_2)X = W_1X$  (схема *в*).

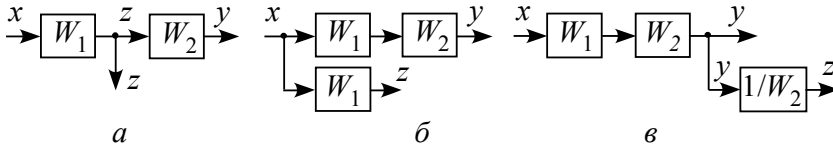


Рис. 3.17. Перенос узла через звено

При **перемене местами сумматора и узла** (рис. 3.18) в эквивалентных схемах (*б*, *г*) появляются дополнительные сумматоры и узлы, так что желательно обходиться без этих преобразований (указанных выше преобразований, как правило, достаточно).

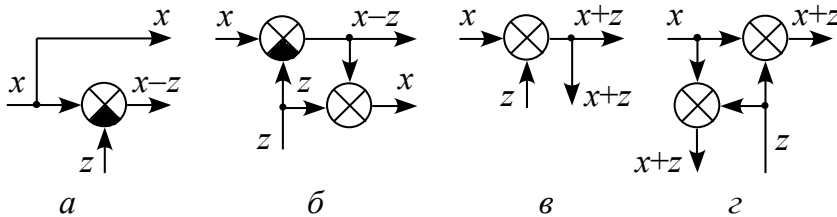


Рис. 3.18. Эквивалентные схемы при переносе по ходу сигнала узла через сумматор (*a* и *б*) и сумматора через узел (*в* и *г*)

### 3.5.6. Пример преобразования структурной схемы

Структурная схема, содержащая несколько контуров, называется *многоконтурной* (одноконтурная упоминалась выше – рис. 3.13). В процессе преобразования от многоконтурной схемы сначала переходят к одноконтурной. Если контуры схемы пересекаются, то ее преобразовывают в схему, в которой контуры не пересекаются (используя правила переноса сумматоров и узлов). Затем эти контуры заменяются эквивалентными звеньями. Передаточ-

ные функции эквивалентных звеньев и результирующая передаточная функция всей системы вычисляются по соответствующим формулам. Пример такого преобразования показан на рис. 3.19.

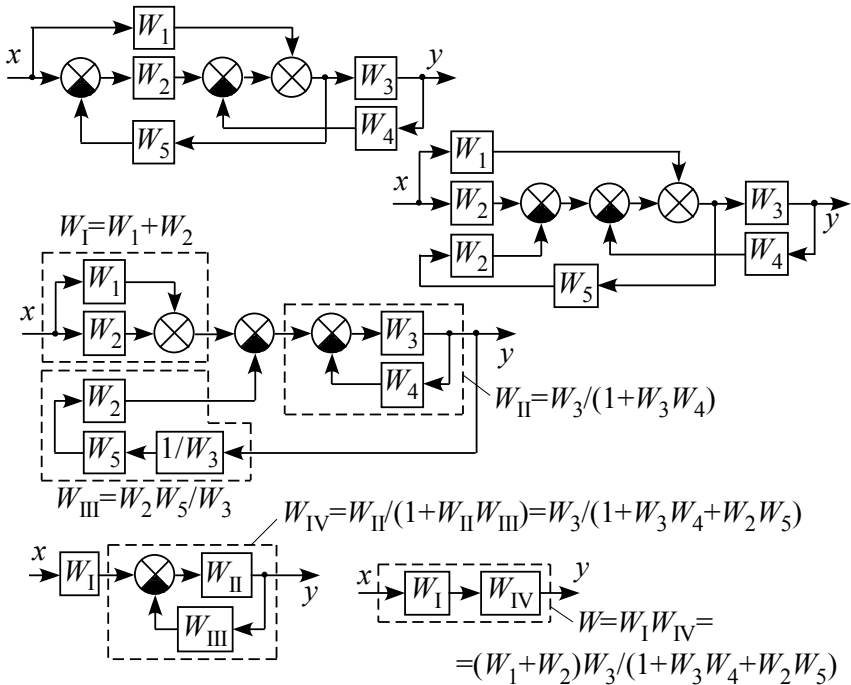


Рис. 3.19. Вариант преобразования структурной схемы

Возможны разные варианты преобразования одной и той же схемы. При любом варианте получится одно и то же выражение эквивалентной передаточной функции системы.

### 3.6. Элементарные звенья систем автоматического управления

Любую линейную систему можно представить в виде соединения всего пяти типов *элементарных (типовых)* звеньев.

**1. Усилительное (или пропорциональное) звено.** Передаточная функция усилительного звена, связывающая изображения входного и выходного сигналов  $X(s)$  и  $Y(s)$ , равна

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = k, \quad (3.61)$$

где  $k$  – коэффициент усиления или коэффициент передачи.

Сигналы на выходе  $y(t)$  и входе  $x(t)$  связаны алгебраически:

$$y = kx. \quad (3.62)$$

Переходная  $h(t)$  и импульсная переходная  $w(t)$  характеристики усилительного звена (рис. 3.20) равны

$$h(t) = k1(t), \quad w(t) = k\delta(t). \quad (3.63)$$

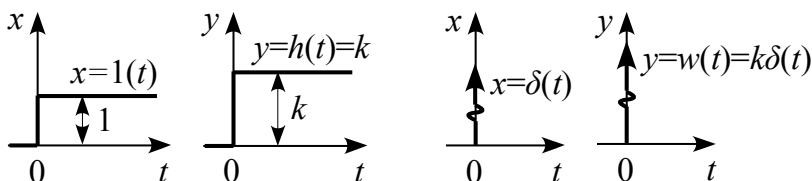


Рис. 3.20. Входные сигналы  $x$ , переходная  $y = h(t)$  и импульсная переходная  $y = w(t)$  характеристики усилительного звена

**2. Аперриодическое (или инерционное) звено.** Передаточная функция этого наиболее распространенного звена равна

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{k}{Ts + 1}, \quad (3.64)$$

где  $k$  – коэффициент усиления,  $T$  – *постоянная времени* ( $T > 0$ ). Корень характеристического уравнения аперриодического звена  $Ts + 1 = 0$  действительный отрицательный (он равен  $-1/T$ ).

Записав из формулы (3.64) уравнение  $TsY(s) + Y(s) = kX(s)$ , легко перейти от него к дифференциальному уравнению:

$$T \frac{dy}{dt} + y = kx. \quad (3.65)$$

Переходная  $h(t)$  и импульсная переходная  $w(t)$  характеристики аперриодического звена (рис. 3.21) равны:

$$h(t) = k(1 - e^{-t/T}), \quad w(t) = \frac{d}{dt} h(t) = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}}. \quad (3.66)$$

Постоянная времени  $T$  является показателем инерционности процесса и легко оценивается графически (рис. 3.21) с помощью касательной, проведенной к характеристике до пересечения касательной

тельной с линией установившегося значения  $y(\infty)$ . При  $T \rightarrow 0$  апериодическое звено превращается в усилительное.

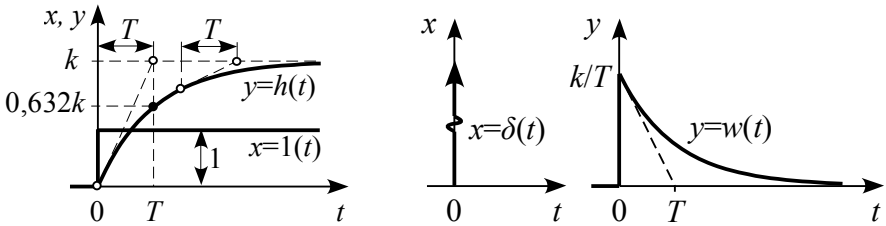


Рис. 3.21. Входные сигналы  $x$ , переходная  $y = h(t)$  и импульсная переходная  $y = w(t)$  характеристики апериодического звена

**3. Интегрирующее звено.** Его передаточная функция и дифференциальное уравнение имеют следующий вид:

$$W(s) = \frac{k}{s}, \quad (3.67)$$

$$\frac{dy}{dt} = kx. \quad (3.68)$$

Коэффициент усиления  $k$  имеет размерность  $c^{-1}$ , если входной и выходной сигналы безразмерные величины или имеют одинаковую размерность. Интегрирующему звену соответствует характеристическое уравнение  $s = 0$  и, следовательно, нулевой корень.

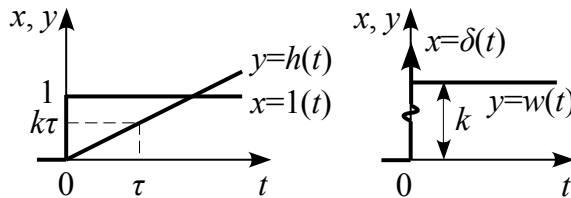


Рис. 3.22. Входные сигналы  $x$ , переходная  $y = h(t)$  и импульсная переходная  $y = w(t)$  характеристики интегрирующего звена

Переходная и импульсная переходная характеристики интегрирующего звена (рис. 3.22) соответственно равны

$$h(t) = kt, \quad w(t) = dh(t)/dt = k1(t). \quad (3.69)$$

В отличие от других звеньев переходная характеристика ин-

тегрирующего звена при  $t \rightarrow \infty$  непрерывно возрастает.

**4. Дифференцирующее звено.** Его передаточная функция и дифференциальное уравнение имеют следующий вид:

$$W(s) = ks, \quad (3.70)$$

$$y = k \frac{dx}{dt}. \quad (3.71)$$

*Коэффициент усиления  $k$  имеет размерность времени, если  $x$  и  $y$  величины безразмерные или с одинаковой размерностью.*

Дифференцирующее звено является идеальным, поэтому отметим лишь его переходную характеристику (рис. 3.23):

$$h(t) = k\delta(t). \quad (3.72)$$

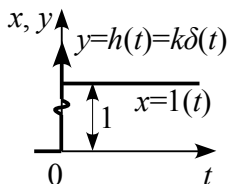


Рис. 3.23. Переходная характеристика дифференцирующего звена

Реальный дифференциатор работает с некоторым запаздыванием и его можно представить, например, последовательным соединением дифференцирующего и апериодического звеньев.

**5. Колебательное звено.** Его передаточная функция равна

$$W(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1}, \quad (3.73)$$

где  $k$  – коэффициент усиления,  $T$  – постоянная времени,  $\zeta$  – коэффициент затухания ( $0 < \zeta < 1$ ), а дифференциальное уравнение

$$T^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2\zeta T \frac{dy}{dt} + y = kx. \quad (3.74)$$

Корни характеристического уравнения колебательного звена

$T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1 = 0$  являются комплексно-сопряженными:

$$s_{1,2} = (-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1})/T = -\beta \pm j\omega, \quad (3.75)$$

где

$$\beta = \zeta/T, \quad \omega = \sqrt{1 - \zeta^2}/T. \quad (3.76)$$

Если  $\zeta \geq 1$ , то вместо комплексно-сопряженных корней получим действительные и вместо колебательного звена – два апериодических с  $W(s) = [k'/(T's + 1)][k''/(T''s + 1)]$ , где  $k'$  и  $k''$  – некоторые коэффициенты, причем  $k'k'' = k$ . Если  $\zeta = 1$ , то  $T' = T''$ .

Переходная характеристика (рис.3.24 слева) равна

$$\begin{aligned} h(t) &= k \left[ 1 - \frac{e^{-\beta t}}{\sin \varphi} \sin(\omega t + \varphi) \right] = k \left[ 1 - \frac{\sqrt{\beta^2 + \omega^2}}{\omega} e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi) \right] = \\ &= k \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta \frac{t}{T}} \sin\left(\sqrt{1 - \zeta^2} \frac{t}{T} + \varphi\right) \right]. \end{aligned} \quad (3.77)$$

В формуле (3.77)  $\varphi = \arctg(\omega / \beta) = \arctg(\sqrt{1 - \zeta^2} / \zeta)$

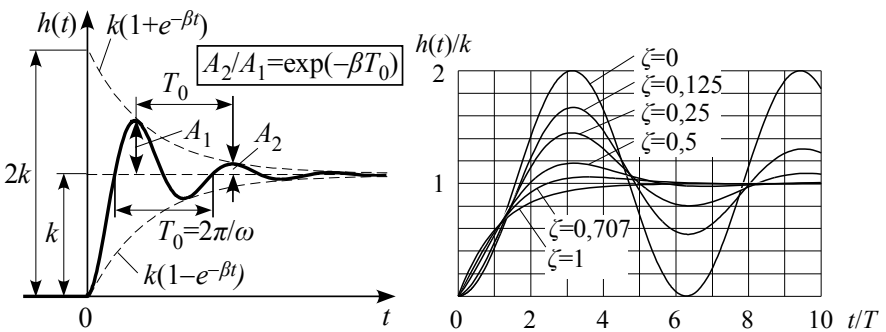


Рис. 3.24. Слева – переходная характеристика колебательного звена, справа – нормированные переходные характеристики как функции относительного времени  $t/T$  при различных коэффициентах затухания и предельные характеристики при  $\zeta = 0$  и  $\zeta = 1$

Если переходная характеристика получена экспериментально, то по ней нетрудно определить параметры  $k$ ,  $T$  и  $\zeta$ . Коэффициент передачи  $k$  есть установившееся значение переходной ха-

рактические. По периоду колебаний  $T_0$  определяется частота колебаний  $\omega = 2\pi/T_0$ , по амплитудам двух соседних колебаний – показатель затухания  $\beta = [\ln(A_1/A_2)]/T_0$  и по формулам (3.76)

$$\zeta = \beta / \sqrt{\beta^2 + \omega^2}, \quad T = \zeta / \beta \quad \text{или иначе} \quad T = 1 / \sqrt{\beta^2 + \omega^2}, \quad \zeta = \beta T.$$

На рис.3.25 показана зависимость  $h(t)$  от  $k$ ,  $T$  и  $\zeta$ .

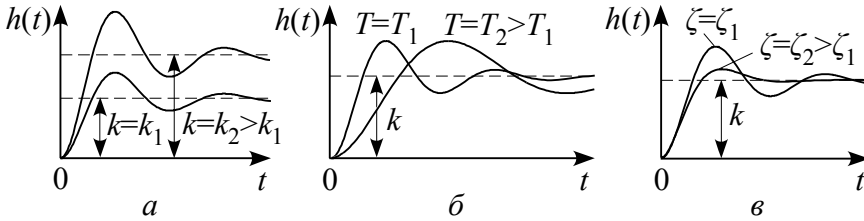


Рис. 3.25. Влияние на переходную характеристику коэффициента усиления  $k$  (а), постоянной времени  $T$  (б) и коэффициента затухания  $\zeta$  (в)

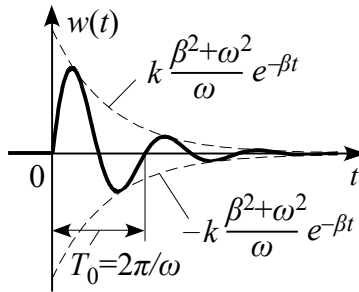


Рис. 3.26. Импульсная переходная характеристика колебательного звена

Импульсная переходная характеристика (рис. 3.26) равна

$$\begin{aligned} w(t) &= \frac{k\omega}{\sin^2 \varphi} e^{-\beta t} \sin \omega t = k \frac{\beta^2 + \omega^2}{\omega} e^{-\beta t} \sin \omega t = \\ &= \frac{k}{T^2 \omega} e^{-\beta t} \sin \omega t = \frac{k}{T \sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\frac{\zeta}{T} t} \sin \left( \sqrt{1 - \zeta^2} \frac{t}{T} \right). \end{aligned} \quad (3.78)$$

### 3.7. Частотный метод

#### 3.7.1. Преобразование Фурье. Частотная передаточная функция

Частотный метод основан на преобразовании Фурье. Вместо

функции времени, например  $y(t)$ , рассматривают ее фурье-изображение (*спектр*)  $Y(j\omega)$  – функцию круговой частоты  $\omega$  :

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j\omega t} dt \quad (3.79)$$

при условии  $\int_0^{\infty} |y(t)|dt < \infty$  (в системах автоматического управления это условие выполняется практически всегда). Частота  $\omega$  принимает все значения от  $-\infty$  до  $\infty$ . При нулевых начальных условиях, когда  $y(t) = 0$  при  $t < 0$ , формула (3.79) принимает вид

$$Y(j\omega) = \int_0^{\infty} y(t)e^{-j\omega t} dt . \quad (3.80)$$

Фурье-изображение  $Y(j\omega)$  можно получить из изображения по Лапласу  $Y(s) = \int_0^{\infty} y(t)e^{-st} dt$ , заменяя переменную  $s$  переменной  $j\omega$ . Так же из передаточной функции  $W(s) = Y(s)/X(s)$  получается *частотная передаточная функция* – отношение фурье-изображений выходного и входного сигналов  $Y(j\omega)$  и  $X(j\omega)$  :

$$W(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} . \quad (3.81)$$

Передаточная функция есть изображение по *Лапласу* импульсной переходной характеристики  $w(t)$ :  $W(s) = \int_0^{\infty} w(t)e^{-st} dt$ . Очевидно, что частотная передаточная функция есть *фурье-изображение (спектр)* импульсной переходной характеристики

$$W(j\omega) = \int_0^{\infty} w(t)e^{-j\omega t} dt . \quad (3.82)$$

Поскольку  $e^{-j\omega t} = \cos \omega t - j \sin \omega t$ ,  $W(j\omega)$  можно записать и так:

$$W(j\omega) = \int_0^{\infty} w(t) \cos \omega t dt - j \int_0^{\infty} w(t) \sin \omega t dt . \quad (3.83)$$



### 3.7.2. Частотные характеристики

$W(j\omega)$  – комплексная функция. Ее можно представить в алгебраической форме как сумму действительной  $U(\omega) = \operatorname{Re}W(j\omega)$  и мнимой  $V(\omega) = \operatorname{Im}W(j\omega)$  частей и в показательной форме:

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) = |W(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}, \quad (3.84)$$

где  $|W(j\omega)|$  и  $\varphi(\omega)$  – соответственно модуль и фаза (аргумент) частотной передаточной функции. Модуль обозначают также  $A(\omega)$  и называют иногда коротко *амплитудой*.

Связь между этими функциями частоты очевидна:

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}, \quad (3.85)$$

$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = \operatorname{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)}, \quad (3.86)$$

$$U(\omega) = |W(j\omega)| \cos \varphi(\omega), \quad (3.87)$$

$$V(\omega) = |W(j\omega)| \sin \varphi(\omega). \quad (3.88)$$

Графики этих функций частоты (а иногда и сами эти функции) называют *частотными характеристиками*:  $A(\omega) = |W(j\omega)|$  – *амплитудная частотная характеристика* (АЧХ),  $\varphi(\omega)$  – *фазовая частотная характеристика* (ФЧХ),  $U(\omega)$  и  $V(\omega)$  – соответственно *вещественная и мнимая частотная характеристика*.

Арктангенс является многозначной функцией тангенса. Поэтому в формуле (3.86) любому значению  $\operatorname{tg}(V(\omega)/U(\omega))$  соответствует множество значений  $\varphi(\omega) = \varphi^*(\omega) \pm k\pi$ , где  $\varphi^*(\omega)$  – главное значение арктангенса, лежащее в диапазоне от  $-\pi/2$  до  $\pi/2$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Какое значение фазы является правильным, определяется из условия непрерывности функции  $\varphi(\omega)$ .

Каждому значению частоты  $\omega$  соответствуют определенные значения  $U(\omega)$  и  $V(\omega)$  и определенная точка на комплексной

плоскости. Для наглядности эту точку характеризуют вектором, проведенным в нее из начала координат (рис. 3.27.а). Длина этого вектора равна  $|W(j\omega)|$ , а угол поворота этого вектора (в градусах или радианах) относительно положительной действительной полуоси равен  $\varphi(\omega)$ . Положительной фазе соответствует поворот вектора против часовой стрелки, отрицательной – по часовой стрелке. Совокупность точек, соответствующая всем частотам  $\omega$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ , представляет собой кривую (рис. 3.27.б), которая называется *амплитудно-фазовой частотной характеристикой* (АФЧХ). Достаточно изображать АФЧХ только для положительных частот. Зеркально отразив ее относительно действительной оси, получим АФЧХ для отрицательных частот (рис. 3.27.б).

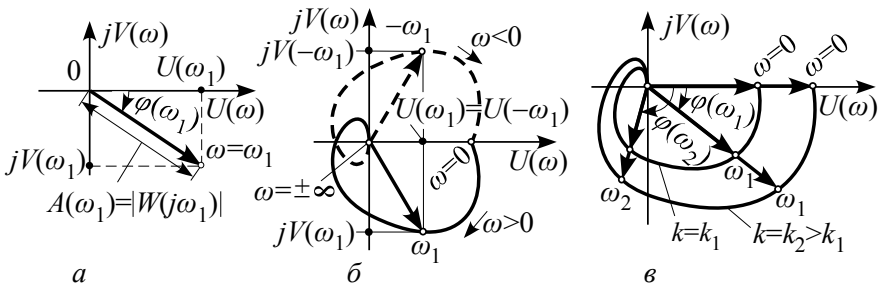


Рис. 3.27. Точка на комплексной плоскости, соответствующая значению АФЧХ на некоторой частоте  $\omega = \omega_1$  (а), АФЧХ (б) (стрелками помечены направления роста частоты), влияние коэффициента усиления на АФЧХ (в)

Обычно передаточную функцию приводят к *стандартному* виду  $W(s) = k R(s)/Q(s)$ , где *свободные члены* полиномов равны единице:  $Q(s) = q_0 s^n + \dots + q_{n-1} s + 1$ ,  $R(s) = r_0 s^m + \dots + r_{m-1} s + 1$ . Если свободный член в каком-либо полиноме отсутствует, то приводят к единице коэффициент слагаемого с наименьшей степенью  $s$ . Если, например, отсутствует свободный член в полиноме  $Q(s)$ , то полином приводят к виду  $Q(s) = q_0 s^n + \dots + s = s(q_0 s^{n-1} + \dots + 1)$ .

При таком виде  $Q$  и  $R$  в частотной передаточной функции

$$W(j\omega) = k \frac{R(j\omega)}{Q(j\omega)} \quad (3.89)$$

параметр  $k$  называют *коэффициентом усиления (передачи)* системы.

Комплексная величина  $R(j\omega)/Q(j\omega)$  и ее действительная и мнимая части зависят лишь от частоты и не зависят от коэффициента усиления  $k$ , частотная же передаточная функция  $W(j\omega)$  равна комплексной величине  $R(j\omega)/Q(j\omega)$  увеличенной в  $k$  раз. Таким образом, при увеличении  $k$ , например, в полтора раза действительная и мнимая части  $W(j\omega)$ , соответствующие любой частоте, увеличатся в полтора раза. В результате все векторы, каждый из которых соответствует определенной частоте, увеличатся в полтора раза, фаза же каждого вектора не изменится (рис. 3.27.в).

Широкое использование в инженерной практике частотных характеристик обусловлено тем, что они могут быть определены опытным путем. На вход объекта подается синусоидальный сигнал  $x = A_x \sin \omega t$ . На выходе возникает синусоидальный сигнал  $y = A_y \sin(\omega t + \varphi)$  с той же частотой  $\omega$ . В общем случае сигналы смещены относительно друг друга и имеют разные амплитуды ( $A_x$  и  $A_y$ ). Смещение характеризуется фазой  $\varphi$  (рис. 3.28).

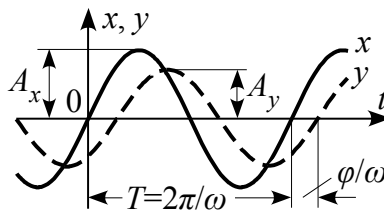


Рис. 3.28. Входной  $x$  и выходной  $y$  синусоидальные сигналы

Для каждой частоты  $\omega$  (из диапазона от 0 до  $\infty$ ) вычисляются значения  $A(\omega) = [A_y/A_x]_\omega$  и  $\varphi(\omega)$ , т.е. значения соответ-

венно амплитудной и фазовой частотных характеристик.

Определение частотных характеристик опытным путем позволяет, в частности, создавать математические модели реальных объектов, математическое описание которых либо неизвестно, либо его нельзя сделать с достаточной определенностью.

### 3.7.3. Частотные характеристики элементарных звеньев

**1. Усилительное звено.** Его частотная передаточная функция  $W(j\omega) = k$  является действительной величиной (мнимой части нет). АФЧХ для любой частоты представляет собой точку на комплексной плоскости (рис. 3.29.а). Следовательно,

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = k, \quad \varphi(\omega) = 0. \quad (3.90)$$

Нулевая фаза означает, что между синусоидами выходного и входного сигналов смещения во времени нет (рис. 3.29.б).

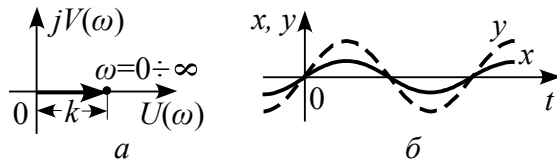


Рис. 3.29. АФЧХ (а) и входной  $x$  и выходной  $y$  сигналы (б) усилительного звена

**2. Аперриодическое звено.** Его частотную передаточную функцию  $W(j\omega) = k/(1 + jT\omega)$  после умножения числителя и знаменателя на  $1 - jT\omega$  запишем в виде  $W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$ , где  $U(\omega) = k/(1 + T^2\omega^2)$  и  $V(\omega) = -kT\omega/(1 + T^2\omega^2)$  – действительная и мнимая части. Амплитуда  $A(\omega)$  и фаза  $\varphi(\omega)$  равны:

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \frac{k}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}}, \quad \varphi(\omega) = -\arctg T\omega. \quad (3.91)$$

АФЧХ имеет вид полуокружности (рис. 3.30.а, б). Из АФЧХ видно, что с ростом частоты длина вектора (т.е. значение АЧХ) уменьшается от  $k$  до 0, а угол поворота (т.е. значение ФЧХ) изме-

няется от 0 до  $-\pi/2$ . При увеличении  $k$ , например, в полтора раза каждый вектор удлинится в полтора раза с сохранением угла поворота (рис. 3.30.а). При разных значениях постоянной времени  $T$  (но при том же значении  $k$ ) АФЧХ сохраняет вид той же полуокружности, но **векторы**, соответствующие одной и той же частоте, имеют разные фазы и разные амплитуды (рис. 3.30.б). Нагляднее влияние  $T$  проявится на логарифмических частотных характеристиках, о которых речь ниже. *Отрицательная* фаза означает, что выходной сигнал *отстает* от входного сигнала  $x$  (рис. 3.30.в).

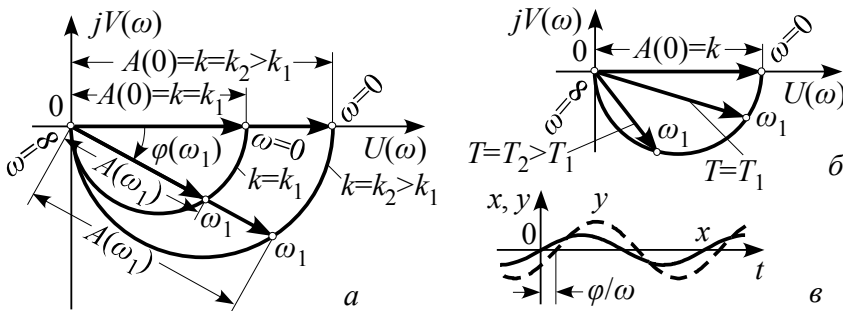


Рис. 3.30. АФЧХ при разных значениях  $k$  (а) и  $T$  (б), входной  $x$  и выходной  $y$  синусоидальные сигналы (в) аperiodического звена

**3. Интегрирующее звено.** Частотная передаточная функция  $W(j\omega) = k/(j\omega) = -jk/\omega$ . Действительная часть  $U(\omega) = 0$ , мнимая отрицательная  $V(\omega) = -k/\omega$ . Амплитуда  $A(\omega)$  и фаза  $\varphi(\omega)$  равны:

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \frac{k}{\omega}, \quad \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}. \quad (3.92)$$

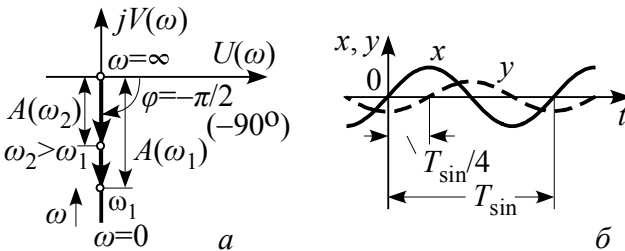


Рис. 3.31. АФЧХ (а), входной  $x$  и выходной  $y$  синусоидальные сигналы (б) интегрирующего звена ( $T_{\sin}$  – период колебаний)

При  $\omega = 0 \div \infty$  АФЧХ – вся отрицательная мнимая полуось (рис. 3.31.а), фаза всегда равна  $-\pi/2$ , т.е. выходная синусоида  $y$  отстает от входной синусоиды  $x$  на четверть периода (рис. 3.31.б).

**4. Дифференцирующее звено.** Частотная передаточная функция равна  $W(j\omega) = jk\omega$ . АЧХ и ФЧХ выражаются формулами:

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = k\omega, \quad \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}. \quad (3.93)$$

При  $\omega = 0 \div \infty$  АФЧХ занимает всю положительную мнимую полуось (рис. 3.32.а). Фаза равна  $+\pi/2$ . Выходит, что следствие ( $y$ ) опережает причину ( $x$ ) на четверть периода (рис. 3.32.б). Такое звено физически реализовать нельзя. Это удобная абстракция.

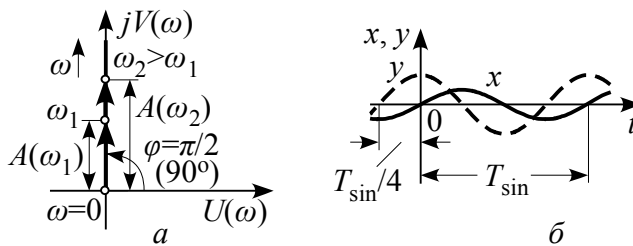


Рис. 3.32. АФЧХ (а), входной  $x$  и выходной  $y$  синусоидальные сигналы (б) дифференцирующего звена ( $T_{\sin}$  – период колебаний)

**5. Колебательное звено.**

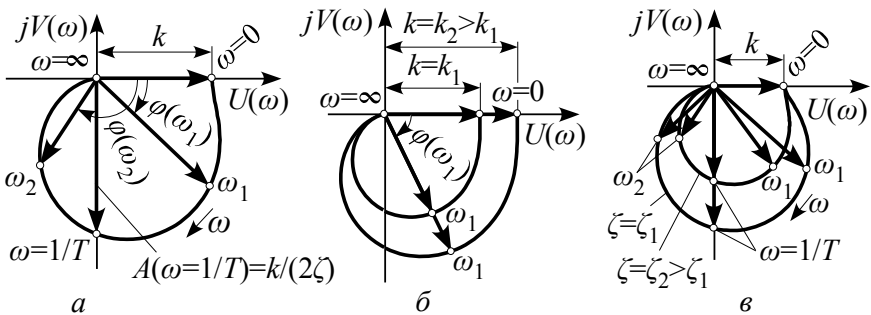


Рис. 3.33. АФЧХ колебательного звена (а), влияние на АФЧХ коэффициента усиления  $k$  (б) и коэффициента затухания  $\zeta$  (в). Направление роста частоты  $\omega$  на АФЧХ указано стрелкой

Частотная передаточная функция колебательного звена равна

$$W(j\omega) = \frac{k}{(1 - T^2\omega^2) + j2\zeta T\omega} = U(\omega) + jV(\omega),$$

где

$$U(\omega) = \frac{k(1 - T^2\omega^2)}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\zeta T\omega)^2}, \quad V(\omega) = -\frac{k2\zeta T\omega}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\zeta T\omega)^2}.$$

АЧХ и ФЧХ выражаются формулами

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \frac{k}{\sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\zeta T\omega)^2}}, \quad (3.94)$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\operatorname{arctg} \frac{2\zeta T\omega}{1 - T^2\omega^2} & \text{при } \omega \leq \frac{1}{T} \\ -\pi - \operatorname{arctg} \frac{2\zeta T\omega}{1 - T^2\omega^2} & \text{при } \omega > \frac{1}{T}. \end{cases} \quad (3.95)$$

АФЧХ показана на рис. 3.33.а. Фаза  $\varphi(\omega)$  отрицательная (с ростом частоты  $\omega$  от 0 до  $\infty$  фаза изменяется от 0 до  $-\pi$ ), т.е. выходной синусоидальный сигнал  $y$  отстает от входного синусоидального сигнала  $x$ . На рис. 3.33.б и в показано влияние коэффициента усиления и коэффициента затухания на АФЧХ.

### 3.7.4. Частотные характеристики звена чистого запаздывания

Итак, любую линейную систему можно представить в виде соединения пяти рассмотренных элементарных звеньев. Теперь о *звене чистого запаздывания*. Оно не является линейным, но при введении его в линейную систему, ее можно исследовать линейными методами. На выходе этого звена формируется такой же сигнал, что и на входе, но отстающий от него на время  $\tau$  (рис. 3.34).

При входном сигнале  $x(t)$  на выходе формируется сигнал  $y(t) = x(t - \tau)$ . Их изображения соответственно равны  $X(s)$  и  $Y(s) = X(s)e^{-s\tau}$ . Следовательно, для звена чистого запаздывания

$$W(s) = e^{-s\tau}, \quad W(j\omega) = e^{-j\omega\tau}. \quad (3.96)$$

АФЧХ имеет вид окружности единичного радиуса (рис. 3.35). Из

второй формулы (3.96) вытекают выражения АЧХ и ФЧХ:

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = 1, \quad \varphi(\omega) = -\omega\tau. \quad (3.97)$$

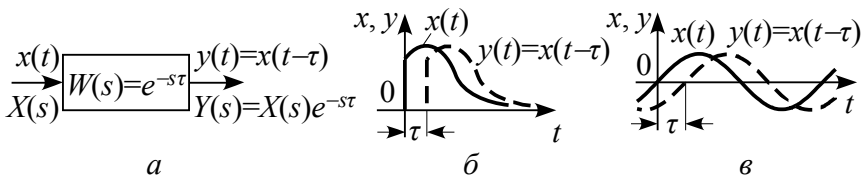


Рис. 3.34. Звено чистого запаздывания (а), примеры запаздывания выходного сигнала  $y$  относительно входного  $x$  на время  $\tau$  при произвольном входном сигнале (б) и синусоидальном (в)

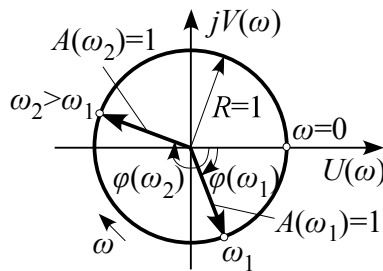


Рис. 3.35. АФЧХ звена чистого запаздывания

### 3.8. Логарифмические частотные характеристики

В широком диапазоне частот значения амплитудных частотных характеристик отличаются на порядки. В этих случаях от линейного масштаба переходят к логарифмическому и вместо обычных частотных характеристик рассматривают *логарифмические амплитудные частотные характеристики* (ЛАЧХ)  $L(\omega)$  и *логарифмические фазовые частотные характеристики* (ЛФЧХ)  $\varphi(\omega)$ . Особенно удобны асимптотические ЛАЧХ. У них очень простой вид, что позволяет легко представить экспериментально снятую ЛАЧХ в виде суммы ЛАЧХ простых звеньев и тем самым определить структуру математической модели системы.

ЛАЧХ  $L(\omega)$  и АЧХ  $A(\omega)$  связаны соотношением

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)|. \quad (3.98)$$



ЛФЧХ вычисляются по тем же формулам, что и ФЧХ.

При построении логарифмических характеристик по оси абсцисс можно откладывать десятичный логарифм частоты в линейном масштабе, но удобнее откладывать частоту в *логарифмическом масштабе* (рис. 3.36). Интервал между частотами, отличающимися в 10 раз, называется *декадой*. При увеличении (уменьшении) частоты *в десять раз* говорят, что частота увеличилась (уменьшилась) *на декаду*. Отметим, что на оси частот нет частоты  $\omega = 0$  (эта частота уходит в минус бесконечность). Оси ординат ЛАЧХ и ЛФЧХ проводят так, что они пересекают ось частот при одной и той же частоте (ее выбирают из соображений удобства изображения ЛАЧХ и ЛФЧХ). Если АЧХ измеряется в относительных единицах, то единицей измерения ЛАЧХ является *децибел* (дБ). Так, например, значениям  $A(\omega)$  равным 0,01, 0,1, 1, 10, 100 соответствуют значения  $L(\omega)$  равные -40, -20, 0, 20, 40 дБ. По осям  $L(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$  откладывают в линейном масштабе соответственно децибелы и радианы (или градусы).

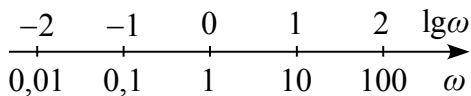


Рис. 3.36. Ось абсцисс логарифмических частотных характеристик

### 3.8.1. Логарифмические характеристики элементарных звеньев

#### 1. Усилительное звено.

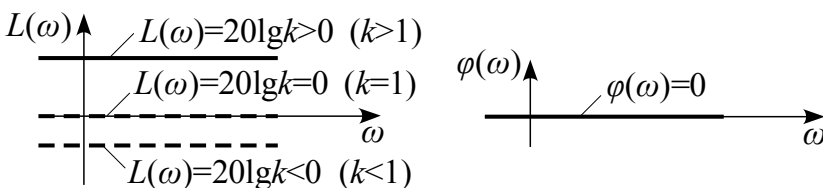


Рис. 3.37. ЛАЧХ  $L(\omega)$  и ЛФЧХ  $\varphi(\omega)$  усилительного звена

$$L(\omega) = 20 \lg k, \quad \varphi(\omega) = 0. \quad (3.99)$$

Влияние коэффициента устления на ЛАЧХ отражено на рис. 3.37. При  $k = 1$  ЛАЧХ совпадает с осью частот ( $L(\omega) = 0$ ).

## 2. Аперриодическое звено.

$$L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{1 + T^2 \omega^2}, \quad (3.100)$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg T\omega. \quad (3.101)$$

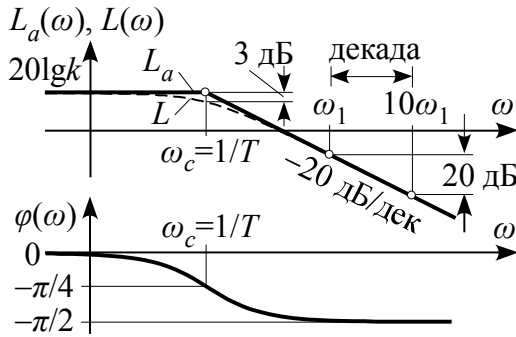


Рис. 3.38. Истинная ЛАЧХ  $L(\omega)$ , асимптотическая ЛАЧХ  $L_a(\omega)$ , ЛФЧХ  $\varphi(\omega)$  аперриодического звена

Вместо истинной ЛАЧХ, имеющей вид кривой линии, в инженерной практике часто используют приближенную *асимптотическую* ЛАЧХ (рис. 3.38), которая состоит из отрезков прямых, что придает ей наглядность, к тому же ее очень легко строить.

Горизонтальный и наклонный (с наклоном  $-20$  дБ/дек) отрезки асимптотической ЛАЧХ сопрягаются при *частоте сопряжения*  $\omega = \omega_c = 1/T$ . При этой частоте асимптотическая и истинная ЛАЧХ отличаются на 3 дБ (наибольшее отклонение), т.е. значение АЧХ, соответствующее  $L_a(\omega)$ , в  $\sqrt{2}$  раз больше значения АЧХ, соответствующего  $L(\omega)$ . На низких и высоких частотах истинная ЛАЧХ стремится к асимптотической. С ростом частоты от нуля до бесконечности ЛФЧХ изменяется от нуля до  $-\pi/2$ , причем при частоте  $\omega = 1/T$  ее значение равно  $-\pi/4$ .

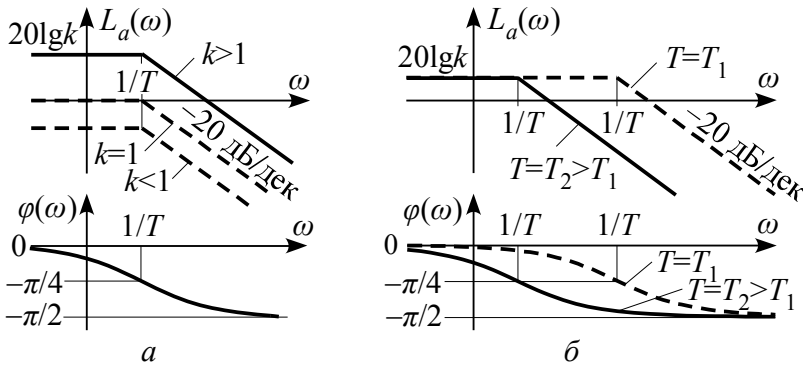


Рис. 3.39. Логарифмические частотные характеристики аperiodического звена при различных значениях коэффициента усиления  $k$  (а) и постоянной времени  $T$  (б)

Коэффициент усиления  $k$  влияет только на ЛАЧХ, постоянная времени  $T$  – на ЛАЧХ, и ЛФЧХ (рис. 3.39). Отметим, что при  $k = 1$  и  $\omega \leq 1/T$  асимптотическая ЛАЧХ равна нулю.

### 3. Интегрирующее звено (рис. 3.40).

$$L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \omega, \quad \varphi(\omega) = -\pi/2. \quad (3.102)$$

ЛАЧХ имеет вид прямой линии с наклоном  $-20$  дБ/дек. При  $\omega = 1$   $L(\omega) = 20 \lg k$ , при  $\omega = k$   $L(\omega) = 0$ . Удобно строить  $L(\omega)$  так. При  $\omega = 1$  отметить точку с ординатой  $L(\omega) = 20 \lg k$  и через нее провести прямую с наклоном  $-20$  дБ/дек.

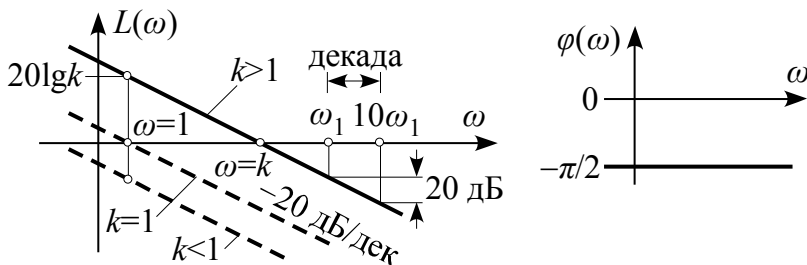


Рис. 3.40. ЛАЧХ  $L(\omega)$  и ЛФЧХ  $\varphi(\omega)$  интегрирующего звена при различных значениях коэффициента усиления

### 4. Дифференцирующее звено (рис. 3.41).

$$L(\omega) = 20 \lg k + 20 \lg \omega, \quad \varphi(\omega) = +\pi/2. \quad (3.103)$$

ЛАЧХ – прямая с положительным наклоном 20дБ/дек.

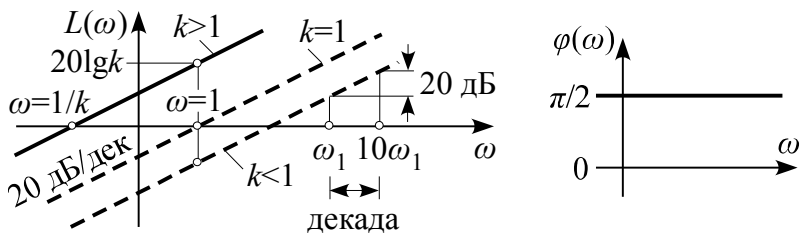


Рис. 3.41. ЛАЧХ  $L(\omega)$  и ЛФЧХ  $\varphi(\omega)$  дифференцирующего звена при различных значениях коэффициента усиления

### 5. Колебательное звено.

$$L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + (2\zeta T \omega)^2}, \quad (3.104)$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\arctg \frac{2\zeta T \omega}{1 - T^2 \omega^2} & \text{при } \omega \leq \frac{1}{T} \\ -\pi - \arctg \frac{2\zeta T \omega}{1 - T^2 \omega^2} & \text{при } \omega > \frac{1}{T}. \end{cases} \quad (3.105)$$

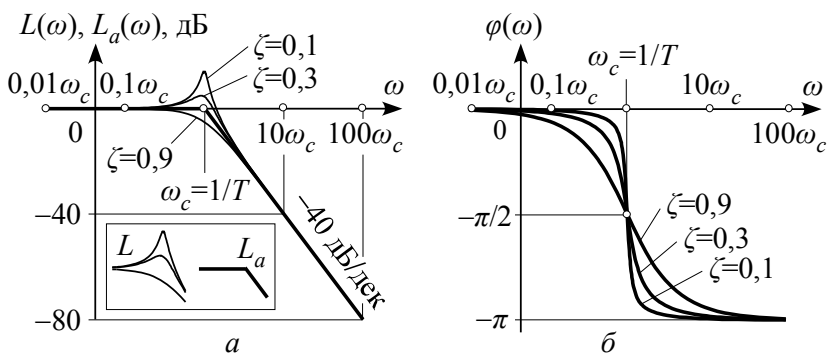


Рис. 3.42. Логарифмические характеристики колебательного звена: ЛАЧХ при коэффициенте усиления  $k = 1$  (а) и ЛФЧХ (б)

При увеличении  $k$  ЛАЧХ смещается вверх, а при увеличении  $T$  ЛАЧХ и ЛФЧХ смещаются влево (рис. 3.43). При  $k = 1$  и  $\omega \leq 1/T$   $L_a(\omega) = 0$  (как и для аperiodического звена).

До частоты сопряжения  $\omega = \omega_c = 1/T$  асимптотическая ЛАЧХ  $L_a(\omega)$  – горизонтальная прямая на уровне  $20 \lg k$ , после частоты

сопряжения – прямая с отрицательным наклоном  $-40\text{дБ/дек}$  (рис. 3.42). При частотах близких к частоте сопряжения отклонение  $L(\omega)$  от  $L_a(\omega)$  зависит от коэффициента затухания  $\zeta$ . При  $0,38 \leq \zeta \leq 0,7$  отклонение не превосходит по модулю 3 дБ и может не учитываться при приближенных расчетах. ЛФЧХ изменяется от 0 до  $-\pi$  с ростом  $\omega$  от 0 до  $\infty$ . При  $\omega = \omega_c$   $\varphi(\omega_c) = -\pi/2$  при любых значениях  $\zeta$ . При других частотах ЛФЧХ зависит от  $\zeta$ .

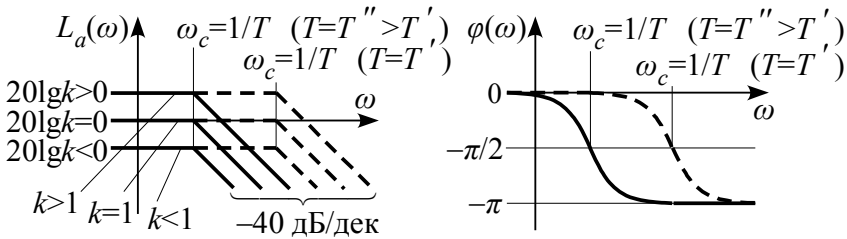


Рис. 3.43. Влияние коэффициента усиления  $k$  и постоянной времени  $T$  на асимптотическую ЛАЧХ и ЛФЧХ колебательного звена

Чтобы пользоваться логарифмическими характеристиками, систему представляют в виде последовательного соединения простых звеньев. При этом вводят еще два дополнительных звена.

**6. Форсирующее звено.** Его передаточные функции равны

$$W(s) = k(Ts + 1), \quad W(j\omega) = k(1 + jT\omega), \quad (3.106)$$

где  $k$  – коэффициент усиления,  $T$  – постоянная времени.

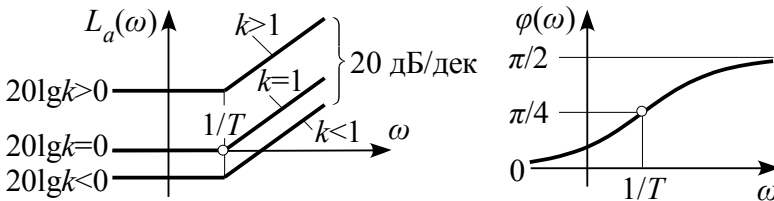


Рис. 3.44. Асимптотические ЛАЧХ и ЛФЧХ форсирующего звена при различных значениях коэффициента усиления  $k$

ЛАЧХ и ЛФЧХ (рис. 3.44) выражаются формулами

$$L(\omega) = 20 \lg k + 20 \lg \sqrt{1 + T^2 \omega^2}, \quad \varphi(\omega) = \arctg T\omega \quad (3.107)$$

и имеют вид перевернутых характеристик апериодического звена. При  $k=1$  асимптотическая ЛАЧХ равна нулю при  $\omega \leq 1/T$ .

### 7. Форсирующее звено второго порядка (рис. 3.45).

$$W(s) = k(T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1), \quad (3.108)$$

$$W(j\omega) = k[(1 - T^2 \omega^2) + j2\zeta T\omega], \quad (3.109)$$

$$L(\omega) = 20 \lg k + 20 \lg \sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + (2\zeta T\omega)^2}, \quad (3.110)$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} \arctg \frac{2\zeta T\omega}{1 - T^2 \omega^2} & \text{при } \omega \leq \frac{1}{T} \\ \pi + \arctg \frac{2\zeta T\omega}{1 - T^2 \omega^2} & \text{при } \omega > \frac{1}{T} \end{cases} \quad (3.111)$$

Логарифмические характеристики выглядят как перевернутые относительно оси частот характеристики колебательного звена.

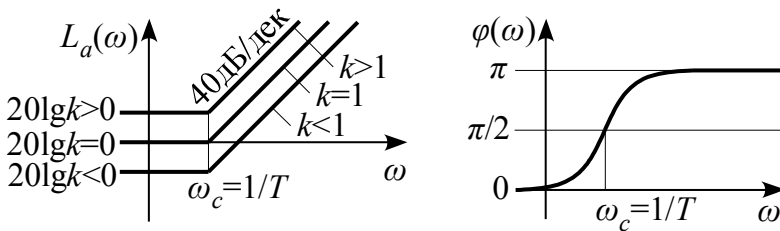


Рис. 3.45. Логарифмические частотные характеристики форсирующего звена второго порядка при некотором значении  $\zeta$  и различных значениях коэффициента усиления  $k$

### 3.8.2. Логарифмические частотные характеристики системы, представленной в виде последовательного соединения звеньев

ЛАЧХ и ЛФЧХ системы ( $L$  и  $\varphi$ ) из  $n$  последовательно соединенных звеньев определяются как суммы ЛАЧХ и ЛФЧХ всех звеньев ( $L_1, L_2, \dots, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ ):

$$L(\omega) = L_1(\omega) + L_2(\omega) + \dots + L_n(\omega), \quad (3.112)$$

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \dots + \varphi_n(\omega). \quad (3.113)$$

Отметим способ построения асимптотической ЛАЧХ системы без построения асимптотических ЛАЧХ отдельных звеньев.

Пусть система не содержит интегрирующего (дифференцирующего) звена и ее передаточная функция равна

$$W(s) = \frac{20(0,1s+1)}{(0,1s^2+0,32s+1)(0,01s+1)}.$$

Очевидно, что система состоит из форсирующего звена ( $T_\phi = 0,1$  с), аperiodического ( $T_a = 0,01$  с) и колебательного ( $T_\kappa = 0,316$  с,  $\zeta \approx 0,5$ ). Их частоты сопряжения в порядке возрастания равны:  $\omega_\kappa = 1/T_\kappa = 1/0,316 = 3,16$  с<sup>-1</sup>,  $\omega_\phi = 1/T_\phi = 1/0,1 = 10$  с<sup>-1</sup>,  $\omega_a = 1/T_a = 1/0,01 = 100$  с<sup>-1</sup>. Коэффициент усиления системы  $k = 20$  (он равен произведению коэффициентов усиления всех звеньев) “отдадим” звену с *наименьшей* частотой сопряжения (в нашем примере это колебательное звено). Остальным звеньям “оставим” коэффициенты усиления равные единице. Следовательно, их асимптотические ЛАЧХ равны нулю на частотах меньших их частот сопряжения. Поэтому при  $\omega \leq \omega_\phi$  проявляет себя лишь колебательное звено, его ЛАЧХ в этом диапазоне частот совпадает с ЛАЧХ системы. Асимптотическая ЛАЧХ при  $\omega \leq \omega_\kappa$  идет горизонтально на уровне  $20 \lg k = 20 \lg 20 = 26$  дБ, затем при  $\omega > \omega_\kappa$  падает с наклоном  $-40$  дБ/дек. В диапазоне частот от  $\omega_\phi$  до  $\omega_a$  к наклону ЛАЧХ колебательного звена добавится наклон ЛАЧХ форсирующего звена. В результате в этом диапазоне частот суммарный наклон равен  $-40+20=-20$  дБ/дек. При  $\omega > \omega_a$  становится отличным от нуля ЛАЧХ аperiodического звена. Ее наклон добавляется к предыдущему наклону и наклон ЛАЧХ системы становится равным  $-20+(-20)=-40$  дБ/дек (рис. 3.46). Итак, построение асимптотической ЛАЧХ системы све-

лось к суммированию наклонов ЛАЧХ отдельных звеньев в интервалах частот между их частотами сопряжения.

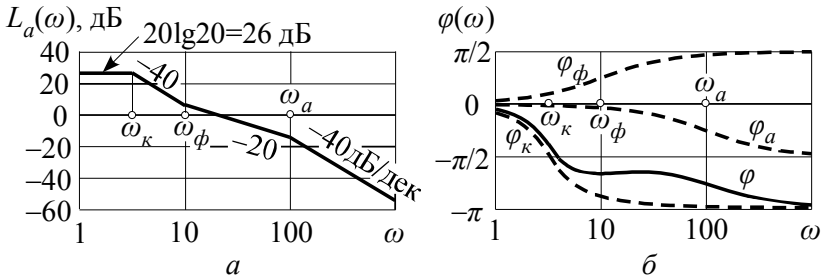


Рис. 3.46. Асимптотическая ЛАЧХ системы (а), ЛФЧХ системы  $\varphi$  и ЛФЧХ составляющих ее звеньев  $\varphi_k, \varphi_\phi, \varphi_a$  (б)

Теперь рассмотрим систему с интегрирующим звеном:

$$W(s) = \frac{100(s+1)}{s(10s+1)}.$$

Постоянные времени апериодического и форсирующего звеньев равны  $T_a = 10$  с,  $T_\phi = 1$  с, а их частоты сопряжения в порядке возрастания:  $\omega_a = 1/T_a = 0,1$  с<sup>-1</sup>,  $\omega_\phi = 1/T_\phi = 1$  с<sup>-1</sup>. Весь коэффициент усиления системы  $k = 100$  “отдадим” интегрирующему звену, остальным звеньям “оставим” коэффициенты усиления равные единице. Тогда на низких частотах (до наименьшей частоты сопряжения) проявляет себя лишь интегрирующее звено. Его ЛАЧХ есть прямая с наклоном  $-20$  дБ/дек, проходящая через точку с координатами  $\omega = 1$  с<sup>-1</sup>,  $20 \lg 100 = 40$  дБ. Если бы других звеньев не было, то во всем диапазоне частот ЛАЧХ имела бы вид этой прямой. Однако, начиная с частоты  $\omega_a = 0,1$  с<sup>-1</sup>, “просыпается” апериодическое звено, к прежнему наклону оно добавляет свой наклон  $-20$  дБ/дек и в результате получается наклон  $-20 + (-20) = -40$  дБ/дек. С таким наклоном асимптотическая ЛАЧХ будет идти до следующей частоты сопряжения



( $\omega_\phi = 1 \text{ с}^{-1}$ ), после которой наклон ЛАЧХ изменится на 20 дБ/дек и будет равен  $-40 + 20 = -20$  дБ/дек (рис. 3.47).

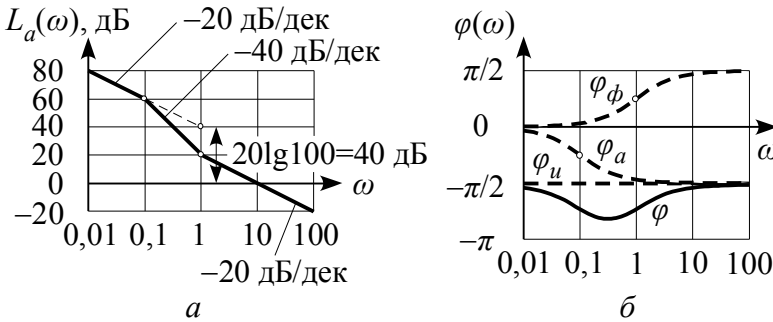


Рис. 3.47. Асимптотическая ЛАЧХ системы (а), ЛФЧХ системы  $\varphi$  и ЛФЧХ составляющих ее звеньев  $\varphi_u, \varphi_a, \varphi_\phi$  (б)

Если система содержит дифференцирующее звено, то полагаем, что его коэффициент усиления равен коэффициенту усиления всей системы  $k$ , а коэффициенты усиления остальных звеньев равны единице. На частоте  $\omega = 1 \text{ с}^{-1}$  отмечаем точку с ординатой  $20 \lg k$ , проводим через нее линию с наклоном 20 дБ/дек и далее построение асимптотической ЛАЧХ ведем, как в рассмотренном примере с интегрирующим звеном.

### 3.9. Устойчивость систем

#### 3.9.1. Понятие устойчивости

На рис. 3.48 показана блок-схема линейной системы с передаточной функцией  $W(s) = B(s)/A(s)$ .

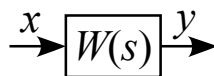


Рис. 3.48 Блок-схема системы

Выходной сигнал представим суммой установившейся (вынужденной) составляющей  $y_g(t)$  и переходной (свободной)  $y_c(t)$ :

$$y(t) = y_{\varepsilon}(t) + y_c(t). \quad (3.114)$$

Установившаяся составляющая обусловлена входным сигналом. Переходная составляющая не зависит от входного сигнала и определяется лишь параметрами самой системы. Если с течением времени переходная составляющая стремится к нулю

$$y_c(t)|_{t \rightarrow \infty} = 0, \quad (3.115)$$

то система называется *устойчивой*. Если модуль переходной составляющей стремится к бесконечности

$$|y_c(t)|_{t \rightarrow \infty} \rightarrow \infty, \quad (3.116)$$

то система называется *неустойчивой*. Если оба условия (3.115) и (3.116) не выполняются, то система называется *нейтральной*.

Переходная составляющая выражается суммой

$$y_c(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} + \dots + C_n e^{s_n t}, \quad (3.117)$$

где  $C_1, \dots, C_n$  – некоторые постоянные величины,  $n$  – порядок характеристического уравнения

$$A(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0, \quad (3.118)$$

а  $s_1, \dots, s_n$  – корни этого уравнения (значения  $s$ , при которых знаменатель передаточной функции  $A(s)$  обращается в нуль). В уравнении (3.117) действительному корню (например,  $s_1 = \alpha$ ) соответствует слагаемое  $C_1 e^{s_1 t} = C_1 e^{\alpha t}$  (рис. 3.49.а), а комплексно-сопряженным корням (например,  $s_2 = \beta + j\omega$ ,  $s_3 = \beta - j\omega$ ) – два слагаемых  $C_2 e^{s_2 t} + C_3 e^{s_3 t} = e^{\beta t} A \sin(\omega t + \varphi)$ , где фаза  $\varphi$  и амплитуда  $A$  равны  $\varphi = \arctg \frac{C_2 + C_3}{j(C_2 - C_3)}$ ,  $A = \frac{C_2 + C_3}{\sin \varphi}$  (рис. 3.49.б).

Итак, *система устойчива* лишь тогда, когда все действительные корни характеристического уравнения отрицательные,

а у комплексно-сопряженных корней отрицательные действительные части. Если хотя бы один действительный корень положительный или хотя бы у одной пары комплексно-сопряженных корней положительные действительные части, то система неустойчива. В промежуточном случае, когда один действительный корень равен нулю или у пары комплексно-сопряженных корней их действительные части равны нулю, система называется нейтральной (на границе устойчивости).

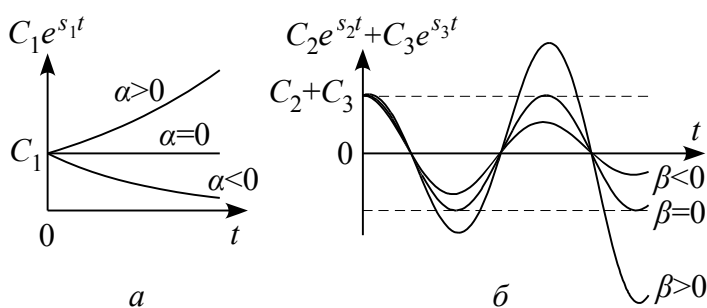


Рис. 3.49. Слагаемые переходной составляющей, обусловленные одним действительным корнем (а) и парой комплексно-сопряженных корней (б)

Корни характеристического уравнения можно изображать на комплексной плоскости в виде точек или в виде векторов, проведенных в эти точки из начала координат (рис. 3.50). Действительным корням (отрицательному, положительному и нулевому) соответствуют точки 1, 4, 7. Комплексно-сопряженным корням с отрицательной, положительной и нулевой действительными частями соответствуют пары точек 2 и 3, 5 и 6, 8 и 9. Используя такое геометрическое отображение корней, условие устойчивости можно сформулировать по-другому. *Чтобы система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения находились в левой части комплексной плоскости.*

При изменении параметров системы изменяются и коэффициенты характеристического уравнения и, следовательно, его кор-

ни. Это приведет к перемещению корней на комплексной плоскости. В результате может случиться, что один действительный корень или пара комплексно-сопряженных корней пересекут мнимую ось и перейдут из левой полуплоскости в правую. Этому будет соответствовать переход системы из устойчивого состояния в неустойчивое. Значения параметров, при которых один действительный корень или пара комплексно сопряженных корней оказываются на мнимой оси, называются *граничными*. Этот случай соответствует системе, находящейся на границе устойчивости. Итак, мнимая ось является границей: все корни слева – система устойчива, хотя бы один корень справа – неустойчива.

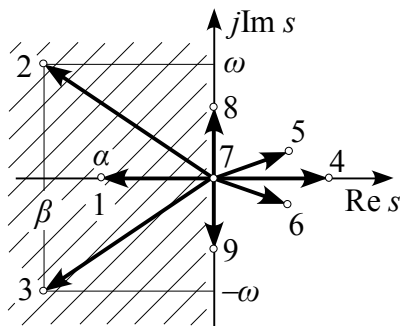


Рис. 3.50. Изображение корней характеристического уравнения на комплексной плоскости корней  $s$

Согласно теоремам А.М.Ляпунова (1892 г.), исследуя линеаризованные системы (линейные системы, полученные из нелинейных с помощью разложения в ряд Тейлора), можно судить об устойчивости исходных нелинейных систем. Вот их суть. 1. Все корни характеристического уравнения линеаризованной системы слева от мнимой оси – исходная нелинейная система устойчива. 2. Хотя бы один корень справа от мнимой оси – исходная нелинейная система неустойчива. 3. Линеаризованная система на границе устойчивости – нельзя судить об устойчивости исходной нелинейной системы без дополнительных исследований.

### 3.9.2. Критерии устойчивости

Критерии устойчивости это правила, которые без вычисления корней характеристического уравнения позволяют утверждать, располагаются ли все корни левее мнимой оси или есть корни (корень), расположенные на мнимой оси или правее ее.

#### Критерий Гурвица

Из коэффициентов характеристического уравнения (3.118), где  $a_0 > 0$  (этого всегда можно добиться умножением на  $-1$ ), составляем главный определитель Гурвица (3.119) по следующему правилу. По главной диагонали слева вниз направо записываем все коэффициенты от  $a_1$  до  $a_n$  в порядке возрастания индексов. От них, продвигаясь вверх и вниз, заполняем столбцы другими коэффициентами: вверх в порядке возрастания индексов, а вниз – в порядке их убывания. Оставшиеся пустые места заполняем нулями.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & a_{n-2} & a_n \end{vmatrix}. \quad (3.119)$$

Из главного определителя, состоящего из  $n$  столбцов и  $n$  строк, получаем определители низшего порядка, отчеркивая определенное число строк и такое же число столбцов:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= a_1, \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3, \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_1 a_2 a_3 + a_0 a_1 a_5 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4, \end{aligned} \quad (3.120)$$

---


$$\Delta_n = a_n \Delta_{n-1}.$$

Критерий Гурвица можно сформулировать таким образом. Чтобы система была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы при  $a_0 > 0$  все определители были больше нуля, т.е.

$$a_0 > 0, \Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0. \quad (3.121)$$

Пусть все условия (3.121) выполняются кроме последнего, равного нулю:  $\Delta_n = a_n \Delta_{n-1} = 0$ . Это возможно в двух случаях:

$$a_n = 0, \quad (3.122)$$

$$\Delta_{n-1} = 0. \quad (3.123)$$

Уравнение (3.122) соответствует границе аperiодической устойчивости, т.е. наличию у характеристического уравнения нулевого корня  $s_n = 0$ . Равенство нулю предпоследнего определителя (3.123) соответствует границе колебательной устойчивости, т.е. наличию мнимых корней  $s_{n-2} = j\omega$ ,  $s_{n-1} = -j\omega$ . Если система находится на этой границе устойчивости ( $\Delta_{n-1} = 0$ ), то частота колебаний (граничная частота) определяется из формулы

$$\omega_{cp}^2 = \frac{\Delta_{n-3}}{\Delta_{n-2}} a_n. \quad (3.124)$$

### Критерий Лъенара – Шипара

Чтобы система была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы были положительны все коэффициенты характеристического уравнения, а также или все нечетные, или все четные определители Гурвица, т.е.

$$\left. \begin{array}{l} a_0 > 0, a_1 > 0, \dots, a_n > 0, \\ \Delta_1 > 0, \\ \Delta_3 > 0, \\ \dots \end{array} \right\} \text{ или } \left\{ \begin{array}{l} \Delta_2 > 0, \\ \Delta_4 > 0, \\ \dots \end{array} \right. \quad (3.125)$$

В частности, для систем второго, третьего и четвертого порядка критерий устойчивости сводится к следующим неравенствам.

Для  $n = 2$

$$a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0. \quad (3.126)$$

Для  $n = 3$

$$a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, \Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0. \quad (3.127)$$

Для  $n = 4$

$$a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_4 > 0, \quad (3.128)$$

$$\Delta_3 = a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 > 0.$$

### Критерий Найквиста

Исследуемую систему (рис. 3.51.а) представляют в виде *одноконтурной замкнутой системы с отрицательной обратной связью* (это всегда можно сделать). Обычно обратную связь принимают единичной (рис. 3.51.б). Но бывает, что удобнее принять единичным прямой канал, а обратную связь неединичной (рис. 3.51.в). Особенность критерия заключается в том, что об устойчивости *замкнутой системы* (рис. 3.51.б или в) судят по частотным характеристикам *разомкнутой системы* (рис. 3.51.г), которые выражаются более простыми соотношениями, чем замкнутые, и, что очень важно, могут быть получены опытным путем, поскольку разомкнутые системы, как правило, устойчивы.

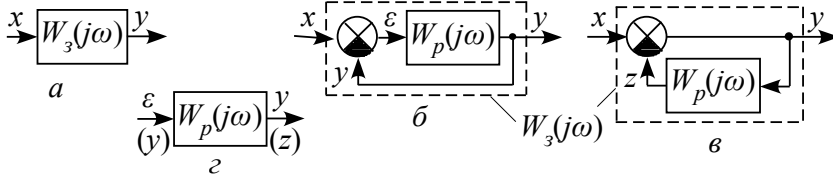


Рис. 3.51. Исследуемая система (а), представленная в виде одноконтурной замкнутой системы (б, в) и разомкнутая система (г)

Сначала сформулируем критерий Найквиста для простейшего случая, когда разомкнутая система устойчива. *Чтобы замкнутая система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы амплитудно-фазовая частотная характеристика разомкнутой системы  $W_p(j\omega) = U_p(\omega) + jV_p(\omega)$  не охватывала точку с ко-*

ординатами  $(-1, j0)$ . АФЧХ, соответствующая устойчивой замкнутой системе, помечена на рис. 3.52.а цифрой 1. Если АФЧХ разомкнутой системы охватывает точку с координатами  $(-1, j0)$ , то замкнутая система неустойчива (кривая 3 на рис. 3.52.а), если проходит через эту точку (кривая 2), – замкнутая система на границе устойчивости. Частота, при которой АФЧХ проходит через точку  $(-1, j0)$ , называется граничной, с этой частотой в замкнутой системе происходят незатухающие колебания.

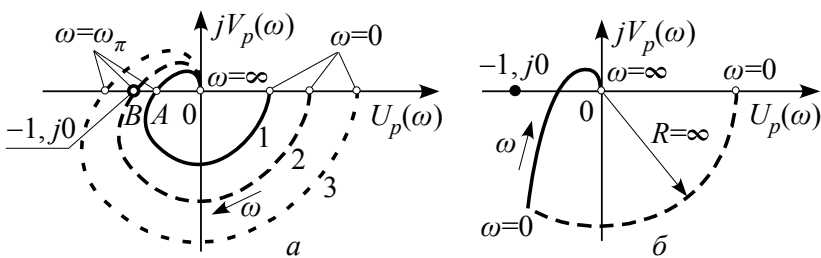


Рис. 3.52. АФЧХ разомкнутой системы без интегрирующего звена (а) и с интегрирующим звеном (б)

Если разомкнутая система *нейтральна*, т.е. содержит одно или несколько интегрирующих звеньев, то при  $\omega \rightarrow 0$  АФЧХ обращается в бесконечность (сплошная линия на рис. 3.52.б). В этом случае надо достроить АФЧХ дугой бесконечного радиуса так, как показано на рис. 3.52.б. К *достроенной* АФЧХ применяем ту же формулировку критерия устойчивости, что и для предыдущего простейшего случая. На рис. 3.52.б достроенная АФЧХ не охватывает точку  $(-1, j0)$ , следовательно, замкнутая система устойчива.

Если АФЧХ пересекает отрицательную действительную ось на отрезке  $(-\infty \div -1)$  несколько раз (“петляет”) и не ясно, охватывает она точку  $(-1, j0)$  или нет, то об устойчивости судят по переходам АФЧХ через отрезок действительной оси от  $-\infty$  до  $-1$ . Поясним правило переходов на простейшем примере (рис. 3.53.а). Хотя в данном примере и так ясно, что замкнутая система



устойчива, поскольку АФЧХ не охватывает точку  $(-1, j0)$ , определим устойчивость и по правилу переходов. По мере роста частоты будем считать переходы АФЧХ через отрезок действительной оси от  $-\infty$  до  $-1$ . Переход снизу вверх (по часовой стрелке) считаем отрицательным, переход сверху вниз (против часовой стрелки) – положительным. Тогда критерий Найквиста можно сформулировать так. Чтобы замкнутая система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы разность между числом положительных и отрицательных переходов через отрезок действительной оси  $(-\infty, -1)$  была равна нулю. Иначе говоря, если число положительных переходов равно числу отрицательных. На рис. 3.53.а один отрицательный переход и один положительный, что соответствует устойчивой замкнутой системе.

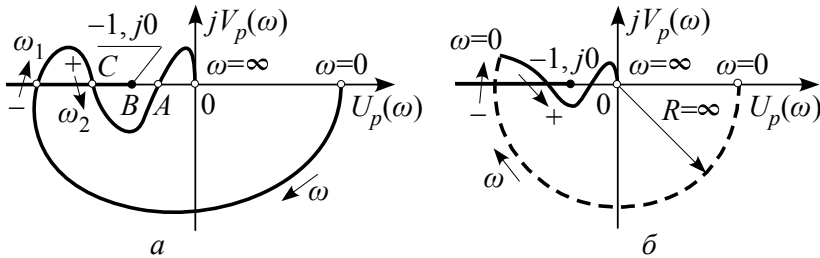


Рис. 3.53. “Петляющие” АФЧХ разомкнутой системы

На рис. 3.53.б показана достроенная дугой бесконечно большого радиуса АФЧХ разомкнутой системы, содержащей два интегрирующих звена. Отметим, что переход достроенной дуги через отрезок  $(-\infty, -1)$  также необходимо учитывать. В результате имеем один отрицательный переход и один положительный, что соответствует устойчивой замкнутой системе.

Наконец, сформулируем критерий Найквиста для случая, когда разомкнутая система неустойчива и ее характеристическое уравнение имеет  $t$  правых корней (некоторые из этих  $t$  корней

могут быть *положительными* вещественными, некоторые комплексно-сопряженными с *положительной* действительной частью). *Замкнутая система устойчива тогда и только тогда, когда разность между числом положительных и отрицательных переходов АФЧХ через отрезок  $(-\infty, -1)$  равна  $m/2$ .*

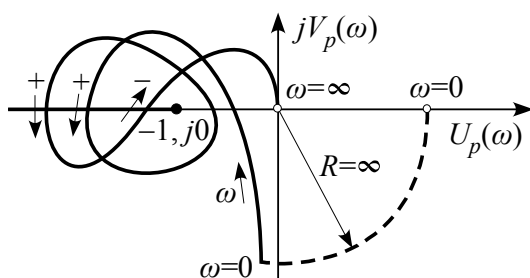


Рис. 3.54. Пример АФЧХ разомкнутой системы сложного вида

Пусть разомкнутая система, АФЧХ которой показана на рис. 3.54, *неустойчива* и ее характеристическое уравнение имеет два правых корня ( $m = 2$ ). Считаем переходы АФЧХ через отрезок  $(-\infty, -1)$ : два положительных, один отрицательный. Их разность равна  $2 - 1 = 1 = m/2$ . Итак, замкнутая система *устойчива*.

Если при  $\omega = 0$  АФЧХ разомкнутой системы начинается на отрезке  $(-\infty, -1)$  (очень редкий случай), то следует считать, что при  $\omega = 0$  АФЧХ совершает  $1/2$  (т.е. половину) перехода.

Последняя формулировка критерия Найквиста применима и для случаев, когда характеристическое уравнение разомкнутой системы не имеет правых корней ( $m = 0$ ). Из этой формулировки следует, что для устойчивости замкнутой системы разность переходов должна равняться нулю ( $m/2 = 0$ ), т.е. число положительных переходов должно равняться числу отрицательных.

**Запас устойчивости по амплитуде.** Напомним стандартный вид записи частотной передаточной функции разомкнутой систе-

мы:  $W_p(j\omega) = kR(j\omega)/Q(j\omega)$ , где  $k$  – ее коэффициент усиления, а  $Q$  и  $R$  – многочлены в виде произведения простейших сомножителей, у которых свободные члены (т.е. члены, не содержащие  $\omega$ ) равны единице. Обратимся вновь к рис. 3.52.а. При некотором значении  $k$  АФЧХ разомкнутой системы не охватывает точку  $(-1, j0)$ , что соответствует устойчивой замкнутой системе (кривая 1 на рис. 3.52.а). При увеличении  $k$  АФЧХ будет увеличиваться в масштабе. Точка  $A$  будет смещаться влево и при  $k = k_{zp}$  совместится с точкой  $B (-1, j0)$ . АФЧХ примет вид кривой 2, что будет соответствовать выходу замкнутой системы на границу устойчивости. Итак, коэффициенту усиления  $k$  соответствует отрезок  $\overline{0A}$  на рис. 3.52.а, а коэффициенту  $k_{zp}$  –  $\overline{0B} = 1$ . Параметр

$$a = \frac{k_{zp}}{k} = \frac{\overline{0B}}{\overline{0A}} = \frac{1}{\overline{0A}} \quad (3.129)$$

называется *запасом по амплитуде* и показывает, во сколько раз надо увеличить  $k$  разомкнутой системы, чтобы устойчивую замкнутую систему вывести на границу устойчивости.

Если АФЧХ разомкнутой системы “петляет” (рис. 3.53.а), то вывести замкнутую систему на границу устойчивости можно не только увеличивая  $k$ , когда с точкой  $B$  совместится точка  $A$ , но и уменьшая  $k$ , когда с точкой  $B$  совместится точка  $C$ . Таким образом, в данном случае система имеет два запаса по амплитуде

$$a_1 = \frac{\overline{0B}}{\overline{0A}} = \frac{1}{\overline{0A}}, \quad a_2 = \frac{\overline{0B}}{\overline{0C}} = \frac{1}{\overline{0C}}. \quad (3.130)$$

Допустим,  $\overline{0A} = 0,5$ , а  $\overline{0C} = 4$ . Тогда  $a_1 = 2$ ,  $a_2 = 1/4$ . Следовательно, устойчивая замкнутая система выйдет на границу устойчивости, если  $k$  либо увеличится в 2 раза, либо уменьшится в 4 раза (“увеличится” в  $1/4$  раза).

**Запас устойчивости по фазе.** На рис. 3.55 показана АФЧХ

разомкнутой системы, которая соответствует устойчивой замкнутой системе. Напомним, что АФЧХ можно рассматривать как кривую, вычерченную концом вектора  $W_p(j\omega)$ . Допустим, каждый вектор  $W_p(j\omega)$  повернется по часовой стрелке на некоторый угол (тем больший, чем больше соответствующая ему частота).

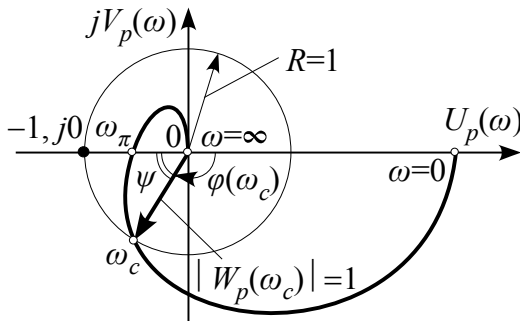


Рис. 3.55. АФЧХ разомкнутой системы с запасом по фазе  $\psi$

Если при этом вектор единичной длины, соответствующий частоте  $\omega_c$ , повернется на угол  $\psi$ , то его конец совпадет с точкой  $(-1, j0)$ , АФЧХ пройдет через точку  $(-1, j0)$  и, следовательно, замкнутая система выйдет на границу устойчивости. Угол  $\psi$ , показывающий степень удаления АФЧХ от критической точки  $(-1, j0)$ , называется *запасом устойчивости по фазе* и определяется либо в радианах, либо в градусах:

$$\psi = \varphi(\omega_c) - (-\pi) \quad \text{или} \quad \psi = \varphi(\omega_c) - (-180^\circ). \quad (3.131)$$

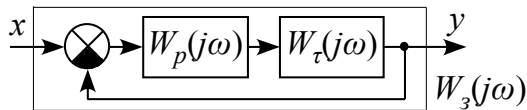


Рис. 3.56. Замкнутая система со звеном чистого запаздывания

Частота  $\omega_c$ , при которой  $|W_p(j\omega_c)|=1$ , называется *частотой среза*. Из рис. 3.55. и 3.52.а видно, что система находится на

границе устойчивости, если  $\omega_c = \omega_\pi$ . Причиной такой деформации АФЧХ может быть звено чистого запаздывания (рис. 3.56).

Частотная передаточная функция разомкнутой системы

$$W_{p\tau}(j\omega) = W_p(j\omega)W_\tau(j\omega) = W_p(j\omega)e^{-j\omega\tau}. \quad (3.132)$$

Здесь  $W_\tau(j\omega) = |W_\tau(j\omega)|e^{j\varphi_\tau(\omega)} = e^{-j\omega\tau}$  – частотная передаточная функция звена чистого запаздывания, модуль и фаза которой равны  $|W_\tau(j\omega)| = 1$ ,  $\varphi_\tau(\omega) = -\omega\tau$ . Система без звена запаздывания (она получается, если положить  $\tau = 0$ ) называется *предельной*. Такой системе соответствует рис. 3.51.б. На рис. 3.57 показаны АФЧХ разомкнутой предельной системы  $W_p(j\omega)$  и разомкнутой системы со звеном запаздывания  $W_{p\tau}(j\omega)$ .

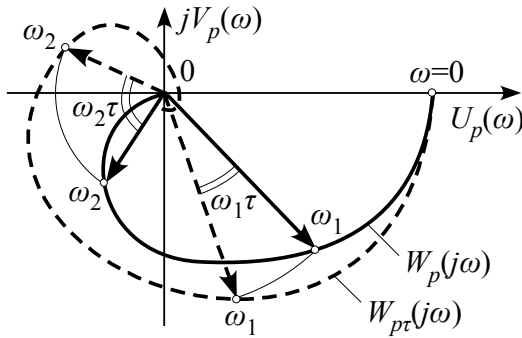


Рис. 3.57. АФЧХ разомкнутой системы со звеном запаздывания и без него

Для любого фиксированного значения частоты  $\omega = \omega_1$  вектор  $W_{p\tau}(j\omega_1)$  получается простым поворотом вектора  $W_p(j\omega_1)$  на угол  $\omega_1\tau$  по часовой стрелке. Частоте  $\omega = \omega_2$  будет соответствовать угол поворота  $\omega_2\tau$  и т.д. При некотором значении  $\tau = \tau_0$  вектор единичной длины  $W_p(j\omega_c)$  повернется на угол  $\psi$  (рис. 3.55), АФЧХ разомкнутой системы с запаздыванием пройдет через точку  $(-1, j0)$  и замкнутая система выйдет на границу устой-

чивости. Время запаздывания, при котором это произойдет, называется *предельным временем запаздывания* ( $\tau_0$ ). Оно равно

$$\tau_0 = \frac{\psi}{\omega_c}. \quad (3.133)$$

Может случиться, что при дальнейшем увеличении  $\tau$  замкнутая система сначала станет неустойчивой, а затем снова выйдет на границу устойчивости при каком-то значении  $\tau' > \tau_0$ . Обычно интересуются лишь наименьшим из возможных значений  $\tau_0$ , большее значение  $\tau' > \tau_0$  в расчет не берут. Устойчивость системы со звеном чистого запаздывания определяют по критерию Найквиста, используя приведенные выше формулировки критерия. Очевидно, что если АФЧХ системы без запаздывания целиком располагается внутри окружности единичного радиуса, то замкнутая система с запаздыванием устойчива при любом  $\tau$ .

Часто считают, что у системы запас устойчивости достаточный, если запас по амплитуде больше трех и запас по фазе больше  $30^\circ$ . Однако это следует рассматривать лишь как ориентир.

### **Логарифмический частотный критерий**

Сначала рассмотрим простейший случай, когда *разомкнутая система либо устойчива, либо нейтральна*. На рис. 3.52.a изображены три АФЧХ разомкнутой системы при различных коэффициентах усиления. Этим АФЧХ соответствуют три ЛАЧХ, показанные на рис. 3.58 и помеченные теми же цифрами. Чем больше коэффициент усиления, тем выше располагается ЛАЧХ. Из сравнения рис. 3.58 и 3.52.a следует, что логарифмические характеристики, помеченные цифрами 1, 2, 3, соответствуют трем состояниям замкнутой системы: устойчивой (1), на границе устойчивости (2) и неустойчивой (3). Итак, критерий устойчивости.

*Чтобы замкнутая система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы с ростом частоты ЛАЧХ разомкнутой*

системы пересекала ось частот раньше, чем ЛФЧХ разомкнутой системы пересекала линию  $-\pi$  (иначе говоря, чтобы выполнялось условие  $\omega_c < \omega_\pi$ ). Этой формулировкой критерия можно пользоваться и в случае, когда  $\varphi_p(\omega)$  вообще не пересекает линию  $-\pi$ , если условно считать, что пересечение произойдет при бесконечно большой частоте ( $\omega_\pi = \infty$ ).

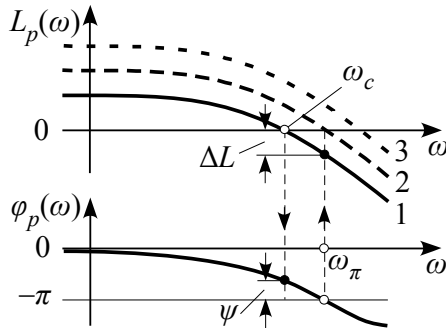


Рис. 3.58. Логарифмические частотные характеристики разомкнутой системы, соответствующие рис. 3.52.а

На логарифмических характеристиках (рис. 3.58), соответствующих устойчивой замкнутой системе, показаны запасы по фазе  $\psi$  и амплитуде в децибелах  $\Delta L$ . Они определяются по формулам

$$\psi = \varphi_p(\omega_c) - (-\pi), \quad \Delta L = -L_p(\omega_\pi). \quad (3.134)$$

Последнее выражение получается, если прологарифмировать запас по амплитуде (3.129) и учесть, что  $\overline{0A} = |W_p(j\omega_\pi)|$ :

$$\Delta L = 20 \lg a = 20 \lg 1 - 20 \lg |W_p(j\omega_\pi)| = -L_p(\omega_\pi).$$

Логарифмированием выражения (3.129) можно получить и другое выражение запаса по амплитуде в децибелах:

$$\Delta L = 20 \lg a = 20 \lg k_{zp} - 20 \lg k.$$

Запас по амплитуде показывает, во сколько раз надо увеличить коэффициент усиления разомкнутой системы  $k$ , чтобы вывести замкнутую систему из устойчивого состояния на границу ус-

тойчивости, а запас по амплитуде в децибелах – на сколько децибел надо увеличить величину  $20 \lg k$ , чтобы придти к тому же.

На рис. 3.59 показаны логарифмические характеристики, которые соответствуют “петляющим” АФЧХ, изображенным на рис. 3.53. На рис. 3.59.б ЛФЧХ построена пунктирной линией, которая соответствует дуге бесконечно большого радиуса на рис. 3.53.б. Итак, критерий для этого случая. Чтобы замкнутая система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы при частотах, при которых  $L_p(\omega) > 0$ , разность между числом положительных и отрицательных переходов ЛФЧХ разомкнутой системы через линию  $-\pi$  была равна нулю. При этом переход через линию  $-\pi$  построенной части ЛФЧХ (пунктир на рис. 3.59.б) также считается полноценным переходом. Интересующие нас положительные и отрицательные переходы помечены на рис. 3.59 соответственно плюсом и минусом. ЛФЧХ на рис. 3.59.а и б имеют один положительный и один отрицательный переход. Следовательно, замкнутые системы в обоих случаях устойчивы.

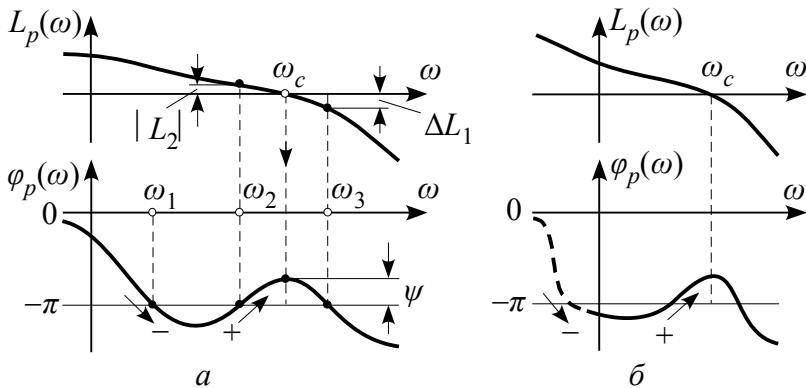


Рис. 3.59. Логарифмические частотные характеристики разомкнутой системы, соответствующие рис. 3.53

На рис. 3.59.а помечены запас по фазе  $\psi$  и два запаса по амплитуде  $\Delta L_1$  и  $\Delta L_2$ . Запас  $\Delta L_1$  показывает, на сколько дБ надо



увеличить величину  $20 \lg k$ , чтобы вывести замкнутую систему из устойчивого состояния на границу устойчивости (в этом случае  $L(\omega)$  сдвинется вверх на величину  $\Delta L_1$ , частота среза  $\omega_c$  сместится вправо и совпадет с частотой  $\omega_3$ ). Запас  $\Delta L_2$  показывает, на сколько дБ надо уменьшить величину  $20 \lg k$ , чтобы привести замкнутую систему к граничному состоянию (это будет соответствовать смещению  $L(\omega)$  вниз на величину  $\Delta L_2$  и совмещению  $\omega_c$  с  $\omega_2$ ). Если воспользоваться формулой (3.134), то получим отрицательное значение  $\Delta L_2$ . Знак минус как раз и указывает, что замкнутая система выйдет на границу устойчивости, если величину  $20 \lg k$  уменьшить на  $\Delta L_2$  дБ.

Наконец, полная формулировка критерия (включая случай, когда разомкнутая система неустойчива). *Замкнутая система устойчива тогда и только тогда, когда разность между числом положительных и отрицательных переходов ЛФЧХ разомкнутой системы через линии  $-\pi, -3\pi, -5\pi, \dots$  (при всех значениях  $\omega$ , для которых  $L_p(\omega) > 0$ ) равна  $m/2$ , где  $m$  – число правых корней характеристического уравнения разомкнутой системы.*

Здесь в отличие от предыдущей упрощенной формулировки учитываются переходы ЛФЧХ не только через линию  $-\pi$ , но и через линии  $-3\pi, -5\pi$  и т.д. Это обусловлено тем, что переходам АФЧХ через отрезок действительной оси  $(-\infty, -1)$  в общем (крайне редком) случае могут соответствовать повороты вектора АФЧХ не только на угол  $-\pi$ , но и на углы  $-3\pi, -5\pi$  и т.д.

Если угол поворота АФЧХ не достигает значения  $-3\pi$  и разомкнутая система устойчива или нейтральна, т.е.  $m = 0$  (так чаще всего и бывает на практике), то полная формулировка критерия устойчивости переходит в упрощенную формулировку.

### 3.10. Качество процесса регулирования

#### 3.10.1. Установившаяся ошибка регулирования при скачкообразном воздействии. Статические и астатические системы

Рассмотрим *устойчивую* замкнутую систему с единичной отрицательной обратной связью (рис. 3.51.б). Подадим на вход системы сигнал  $x$  в виде единичного скачка. Изображения по Лапласу сигналов  $x$  и  $\varepsilon$  равны  $X(s) = 1/s$ ,  $E(s) = W_{\varepsilon x}(s)X(s)$ , где  $W_{\varepsilon x}(s) = E(s)/X(s) = 1/[1 + W_p(s)]$ . Согласно теореме о конечном значении установившаяся ошибка  $\varepsilon_{ycm} = \varepsilon(t \rightarrow \infty)$  равна

$$\varepsilon_{ycm} = [s E(s)]_{s=0} = \left[ s W_{\varepsilon x}(s) \frac{1}{s} \right]_{s=0} = [W_{\varepsilon x}(s)]_{s=0} = W_{\varepsilon x}(0). \quad (3.135)$$

Рассмотрим передаточную функцию  $W_p(s) = k R(s)/Q(s)$  разомкнутой системы *без интегрирующих звеньев*. Свободные члены многочленов  $Q(s)$  и  $R(s)$  приведены к единице, например,  $R(s) = T_0 s + 1$ ,  $Q(s) = (T_1^2 s^2 + 2\zeta T_1 s + 1)(T_2 s + 1)$ . Тогда

$$W_{\varepsilon x}(s) = \frac{1}{1 + W_p(s)} = \frac{Q(s)}{Q(s) + kR(s)}. \quad (3.136)$$

При  $s = 0$  каждая скобка многочленов  $Q(s)$  и  $R(s)$  превратится в единицу. В результате получим  $W_{\varepsilon x}(0) = 1/(1+k)$  и, следовательно, установившаяся ошибка регулирования будет равна

$$\varepsilon_{ycm} = W_{\varepsilon x}(0) = \frac{1}{1+k}. \quad (3.137)$$

Величина  $1/(1+k)$  называется *статизмом*.

Чем больше коэффициент усиления  $k$  разомкнутой системы, тем меньше установившаяся ошибка в замкнутой системе, т.е. при  $t \rightarrow \infty$  отклонение  $y$  от  $x$  уменьшается (рис. 3.60.а). Но чем больше  $k$ , тем обычно меньше запас устойчивости системы, из-за чего может потребоваться внесение изменений в саму структуру системы. Система, у которой установившаяся ошибка регулиро-

вания при  $x(t) = 1(t)$  не равна нулю, называется *статической*.

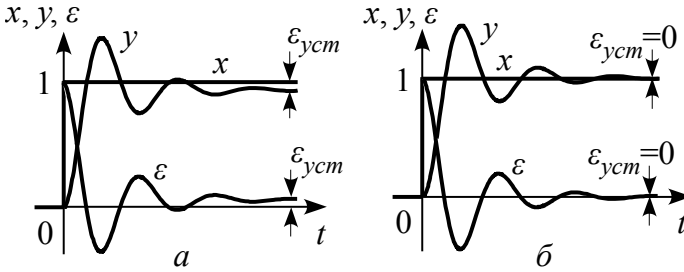


Рис. 3.60. Входной сигнал  $x$  (единичный скачок), выходной сигнал  $y$  и ошибка регулирования  $\varepsilon$  для статической системы (а) и для астатической (б)

Иной результат получим, если разомкнутая система содержит хотя бы одно интегрирующее звено. Рассмотрим разомкнутую систему с  $W_p(s) = k R(s)/[s Q(s)]$ . Тогда

$$W_{ex}(s) = \frac{1}{1 + W_p(s)} = \frac{sQ(s)}{sQ(s) + kR(s)}. \quad (3.138)$$

Из-за множителя  $s$  в числителе  $W_{ex}(s) = 0$  при  $s = 0$  и установившаяся ошибка, определяемая формулой (3.135), равна нулю:

$$\varepsilon_{уст} = W_{ex}(0) = 0. \quad (3.139)$$

Системы, у которых при входном сигнале в виде скачка установившаяся ошибка регулирования равна нулю, называются *астатическими* (рис. 3.60.б). Установившаяся ошибка равна нулю вне зависимости от значения коэффициента усиления разомкнутой системы (его значение проявится при линейно возрастающем входном сигнале, о чем чуть ниже).

Пусть на систему действует входной сигнал  $x$  и помеха  $f$  (рис. 3.61). Пусть одна часть системы с передаточной функцией  $W_1(s)$  не содержит интегрирующего звена, а другая с  $W_2(s)$  содержит.

В силу принципа наложения установившуюся ошибку регулирования от нескольких сигналов можно представить суммой частич-

ных ошибок, каждая из которых вызывается лишь одним сигналом:

$$\varepsilon_{y_{cm}} = \varepsilon_{y_{cm}}^x + \varepsilon_{y_{cm}}^f,$$

где  $\varepsilon_{y_{cm}}^x$  вычисляется по  $W_{ex}(s) = E^x(s)/X(s)$  при условии  $f(t) = 0$ , а  $\varepsilon_{y_{cm}}^f$  – по  $W_{ef}(s) = E^f(s)/F(s)$  при условии  $x(t) = 0$ .

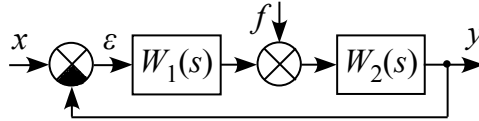


Рис. 3.61. Замкнутая система с двумя входными сигналами

Легко показать, что наша система является астатической относительно  $x$  и статической относительно  $f$ . Еще проще воспользоваться следующим правилом. Система астатическая, если в цепи обратной связи одноконтурной системы содержится хотя бы одно интегрирующее звено. В противном случае система статическая. Под обратной связью понимается та часть контура, по которой сигнал проходит в направлении от ошибки регулирования (она является выходным сигналом) к входному сигналу. Применим это правило к рассмотренному примеру. Положим  $f = 0$ . Тогда  $\varepsilon$  – выходной сигнал,  $x$  – входной. Цепь обратной связи (ее передаточная функция равна  $W_1W_2$ ) содержит интегрирующее звено. Следовательно, система по входному сигналу  $x$  является астатической ( $\varepsilon_{y_{cm}}^x = 0$ ). При  $x = 0$   $\varepsilon$  – выходной сигнал,  $f$  – входной. Цепь обратной связи (ее передаточная функция равна  $W_1$ ) не содержит интегрирующего звена, следовательно, система является статической относительно помехи  $f$  ( $\varepsilon_{y_{cm}}^f \neq 0$ ).

Если бы в системе, изображенной на рис. 3.61, интегрирующее звено можно было перенести из второй части системы с пе-

редаточной функцией  $W_2(s)$  в первую часть с передаточной функцией  $W_1(s)$ , то получили бы  $\varepsilon_{уст}^f = 0$ . Система в этом случае стала бы астатической и по помехе.

### 3.10.2. Установившаяся ошибка в астатической системе при линейно возрастающем входном сигнале

Вернемся к системе с одним входным сигналом  $x$  и одним интегрирующим звеном.  $W_{ex}(s)$  выражается формулой (3.138). Пусть входной сигнал линейно возрастает:  $x(t) = at$  (его изображение  $X(s) = a/s^2$ ,  $a = const$ ). Ошибка регулирования равна

$$\varepsilon_{уст} = [s E(s)]_{s=0} = \left[ s W_{ex}(s) \frac{a}{s^2} \right]_{s=0} = \left[ \frac{a W_{ex}(s)}{s} \right]_{s=0} = \frac{a}{k}. \quad (3.140)$$

Итак, при линейно возрастающем входном сигнале установившаяся ошибка не равна нулю (рис. 3.62) и тем меньше, чем больше коэффициент усиления разомкнутой системы  $k$ .

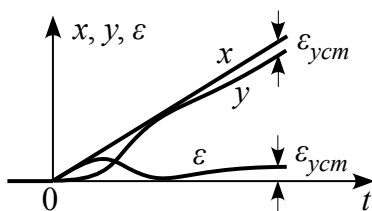


Рис. 3.62. Переходные процессы в астатической системе при линейно возрастающем входном сигнале

### 3.10.3. Показатели качества переходного процесса при ступенчатом воздействии

Показатели качества определяют по переходной характеристике, т.е. по реакции системы на входной сигнал в виде единичного скачка. В зависимости от назначения системы в качестве входного сигнала может рассматриваться как управляющее (задающее) воздействие, так и возмущение (помеху).

Наиболее распространенными показателями качества являются

ются перерегулирование и время регулирования (рис. 3.63).

*Перерегулирование*  $\sigma$  это наибольшее отклонение переходной характеристики от ее установившегося значения (рис. 3.63.а).

Его выражают в относительных единицах  $\sigma = (h_{\max} - h_{уст})/h_{уст}$

или в процентах  $\sigma = [(h_{\max} - h_{уст})/h_{уст}] \cdot 100$ .

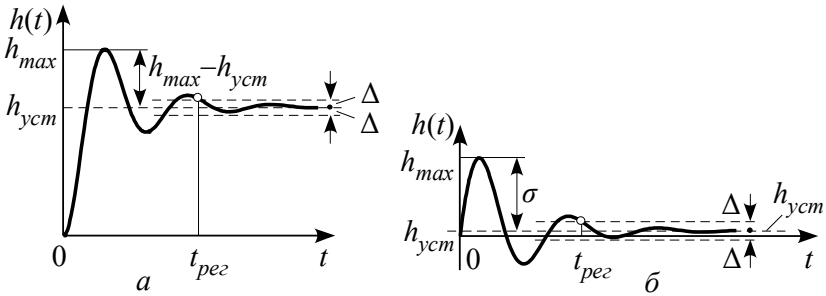


Рис. 3.63. Переходные характеристики при скачкообразном задающем воздействии (а) и при скачкообразном возмущении (б)

*Временем регулирования*  $t_{рег}$  называется время, по истечении которого отклонение  $h(t)$  от установившегося значения  $h_{уст}$  становится по модулю меньше некоторой малой величины  $\Delta$ . Обычно принимают  $\Delta = 0,05h_{уст}$  (рис. 3.63.а). Здесь  $h(t)$  – выходной сигнал при скачкообразном *задающем* воздействии.

При скачкообразном *возмущении*, когда  $h_{уст} = 0$  или достаточно мало (рис. 3.63.б), перерегулирование определяют по формуле  $\sigma = h_{\max} - h_{уст}$ . При определении времени регулирования в этом случае используется та же величина  $\Delta$ , что и в случае управляющего (задающего) воздействия (рис. 3.63.б).

#### 3.10.4. *Связь между частотной и переходной характеристиками системы*

Частотную передаточную функцию системы  $W(j\omega)$  можно представить суммой ее вещественной (действительной) частотной характеристики  $ReW(j\omega)$  и мнимой частотной характери-

стики  $\text{Im}W(j\omega)$ :  $W(j\omega) = \text{Re}W(j\omega) + j\text{Im}W(j\omega)$ .

По вещественной или мнимой частотной характеристике не трудно вычислить переходную характеристику системы  $h(t)$ . Чаще используют выражение  $h(t)$  через  $\text{Re}W(j\omega)$ :

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \text{Re}W(j\omega) \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega. \quad (3.141)$$

Отметим, что  $\text{Re}W(0) = h_{ycm}$ . Формула (3.141) справедлива и для разомкнутых, и для замкнутых систем. Если интересуются переходной характеристикой *замкнутой* системы, то под характеристиками  $h(t)$ ,  $\text{Re}W(j\omega)$  в формуле (3.141) понимаются соответствующие характеристики *замкнутой* системы.

Продифференцировав выражение (3.141), получим формулу, связывающую импульсную переходную характеристику  $w(t)$  (т.е. реакцию системы на единичный импульс) с вещественной частотной характеристикой  $\text{Re}W(j\omega)$ :

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \text{Re}W(j\omega) \cos \omega t d\omega. \quad (3.142)$$

### **3.10.5. Связь между логарифмической амплитудной частотной характеристикой разомкнутой системы и переходной характеристикой замкнутой системы**

Пусть разомкнутая часть системы состоит из интегрирующего и апериодического звеньев (рис. 3.64.а) с передаточной функцией  $W_p(s) = k/[s(T_1s + 1)]$ . Тогда замкнутая система есть колебательное звено (или последовательное соединение двух апериодических звеньев) с передаточной функцией

$$W_3(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{W_p(s)}{1 + W_p(s)} = \frac{k}{T_1s^2 + s + k} = \frac{1}{T_K^2s^2 + 2\zeta T_Ks + 1},$$

где постоянная времени  $T_K$  и коэффициент затухания  $\zeta$  (учиты-

вая, что частота сопряжения разомкнутой системы  $\omega_1 = 1/T_1$  )  
 равны  $T_k = \sqrt{T_1/k} = 1/\sqrt{\omega_1 k}$  ,  $\zeta = 0,5/\sqrt{T_1 k} = 0,5\sqrt{\omega_1/k}$  .

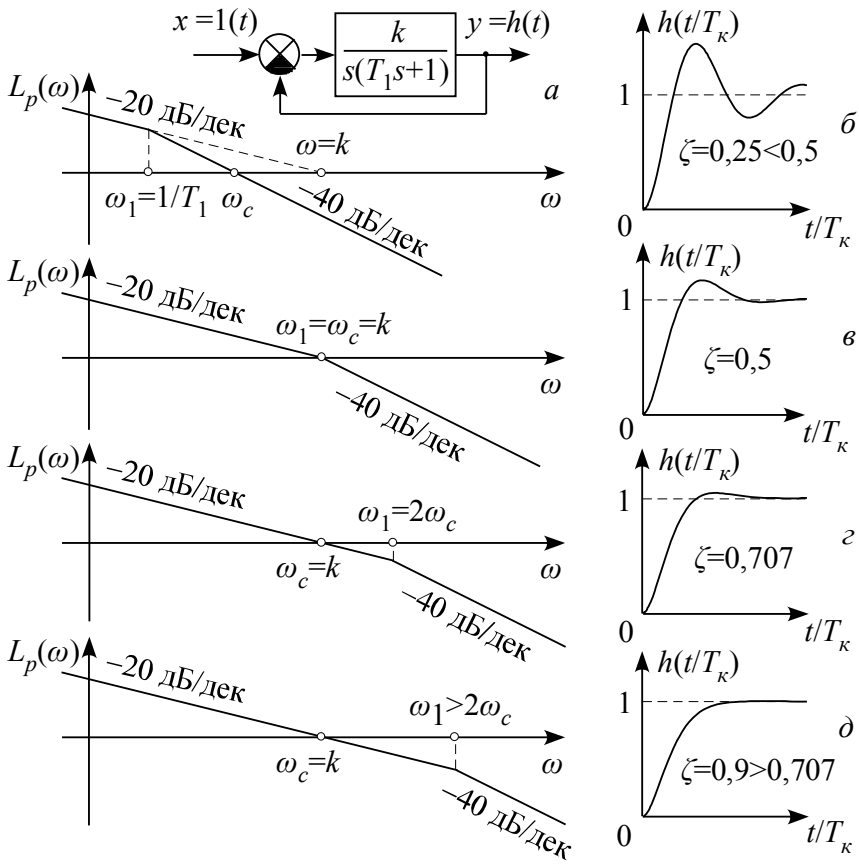


Рис. 3.64. Структурная схема замкнутой системы (а); ЛАЧХ разомкнутой системы  $L_p$  и соответствующие им переходные характеристики замкнутой системы  $h$  при различных соотношениях между частотой сопряжения  $\omega_1$  и частотой среза  $\omega_c$  (б – д)

Характер переходного процесса замкнутой системы зависит от  $\zeta$  , т.е. от комбинации параметров  $\omega_1$  и  $k$  разомкнутой системы. От  $\omega_1$  и  $k$  зависит и частота среза  $\omega_c$  логарифмической амплитудной частотной характеристики (ЛАЧХ) разомкнутой системы, т.е. частота, при которой ЛАЧХ пересекает ось частот. Асимптотические ЛАЧХ разомкнутой системы и переходные характеристики замкнутой системы  $y(t) = h(t)$  , расположенные в



порядке возрастания  $\zeta$ , показаны на рис. 3.64. Переходные характеристики изображены в относительном времени  $t/T_k$ .

Если  $\omega_c$  находится в диапазоне  $1/T_1 = \omega_1 < \omega_c < k$ , то коэффициент затухания  $\zeta < 0,5$  и тем меньше, чем меньше  $\omega_1/k$  (рис. 3.64.б). Переходный процесс носит явно колебательный характер.

Если  $\omega_1 = \omega_c = k$ , то  $\zeta = 0,5$ . В этом случае перерегулирование переходного процесса составляет 16% (рис. 3.64.в).

Если  $\omega_1 > \omega_c = k$ , то  $\zeta > 0,5$ . При отношении частот  $\omega_1/\omega_c = \omega_1/k = 2$  (рис. 3.64.г)  $\zeta = \sqrt{2}/2 = 0,707$ . Переходный процесс при этом характеризуется наименьшим временем регулирования при весьма малом перерегулировании (4%).

При дальнейшем увеличении  $\omega_1/\omega_c = \omega_1/k$  переходный процесс приобретает монотонный характер (рис. 3.64.д), все больше приближаясь к экспоненте с постоянной времени  $T = 1/\omega_c = 1/k$ . При  $\omega_1/\omega_c \geq 2$  время регулирования  $t_{рег} \approx 3/\omega_c$ .

Рис. 3.64 наглядно иллюстрирует следующее важное соответствие между характером переходного процесса замкнутой системы и наклоном ЛАЧХ разомкнутой системы в районе частоты среза.

Если у ЛАЧХ разомкнутой системы частота среза  $\omega_c$  находится на достаточно широком участке с наклоном  $-20$  дБ/дек, то переходная характеристика замкнутой системы не имеет существенных колебаний. Чем шире участок с наклоном  $-20$  дБ/дек в районе частоты среза  $\omega_c$ , тем больше переходная характеристика замкнутой системы похожа на экспоненту с постоянной времени  $T = 1/\omega_c$  и временем регулирования  $t_{рег} = 3T = 3/\omega_c$ . Это соответствие справедливо и для сложных систем, ЛАЧХ которых за пределами указанного участка с наклоном  $-20$  дБ/дек имеют более крутые наклоны, например,  $-40$ ,  $-60$  дБ/дек (рис.3.65).

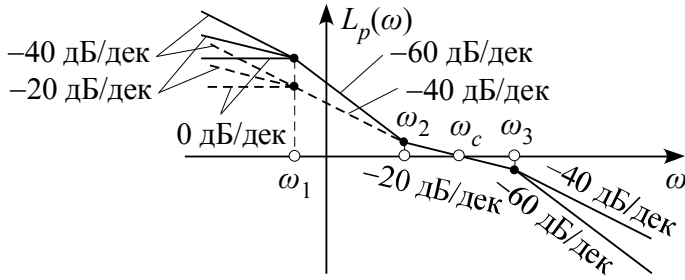


Рис. 3.65. Типовые ЛАЧХ разомкнутой системы

### 3.11. Изменение структуры для улучшения качества системы

#### 3.11.1. Влияние форсирующего звена на устойчивость

На рис. 3.66.а изображена одноконтурная замкнутая система. Пусть передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W_p^0(s) = \frac{Y_0(s)}{E(s)} = \frac{b_0}{a_0s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3}, \quad (3.143)$$

где  $b_0, a_0, \dots, a_3$  – положительные величины. Тогда передаточная функция замкнутой системы равна

$$W_3^0(s) = \frac{Y_0(s)}{X(s)} = \frac{W_p^0(s)}{1 + W_p^0(s)} = \frac{b_0}{a_0s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3 + b_0}. \quad (3.144)$$

Отсюда вытекает следующее условие устойчивости замкнутой системы (согласно критерию Гурвица или Лъенара-Шипара):

$$\Delta_2^0 = a_1a_2 - a_0(a_3 + b_0) > 0. \quad (3.145)$$

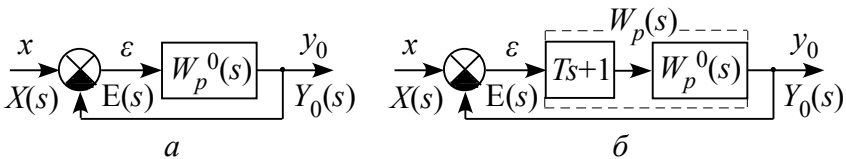


Рис. 3.66. Исходная замкнутая система (а) и замкнутая система с дополнительным форсирующим звеном в прямом канале (б)

Введем в прямой канал системы форсирующее звено с передаточной функцией  $Ts + 1$  (рис. 3.66.б). Для этого случая

$$W_p(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{b_0(Ts+1)}{a_0s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3}, \quad (3.146)$$

$$W_3(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0(Ts+1)}{a_0s^3 + a_1s^2 + (a_2 + b_0T)s + a_3 + b_0}. \quad (3.147)$$

Из формулы (3.147) получим следующее условие устойчивости замкнутой системы:

$$\Delta_2 = a_1(a_2 + b_0T) - a_0(a_3 + b_0) > 0. \quad (3.148)$$

Из условий (3.148) и (3.145) видно, что  $\Delta_2 > \Delta_2^0$ , т.е. введение в прямой канал форсирующего звена делает замкнутую систему более устойчивой (и тем больше, чем больше параметр форсирующего звена  $T$ ). Это справедливо и по отношению к системам более высокого порядка. Однако увеличение  $T$  может привести к ухудшению качества переходного процесса. Покажем это.

### 3.11.2. Влияние нулей передаточной функции на характер переходного процесса

Пусть имеем систему (рис. 3.66.а) с передаточной функцией

$$W_3^0(s) = \frac{Y_0(s)}{X(s)} = \frac{b_0}{a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n + b_0}. \quad (3.149)$$

Уравнению (3.149) соответствует дифференциальное уравнение

$$a_0 \frac{d^n y_0}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y_0}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy_0}{dt} + (a_n + b_0)y_0 = b_0x. \quad (3.150)$$

Пусть при входном сигнале в виде единичного скачка  $x = 1(t)$  выходной сигнал  $y_0$  имеет вид, показанный на рис. 3.67.

Включим в прямой канал форсирующее звено (рис. 3.66.б). Обозначив выходной сигнал  $y$ , запишем передаточную функцию:

$$W_3(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0(Ts+1)}{a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n + b_0}. \quad (3.151)$$

Значения  $s$ , при которых *знаменатель* передаточной функции обращается в нуль, называются *полюсами* передаточной

функции (эти значения называются также корнями характеристического уравнения). Значения же  $s$ , при которых *числитель* обращается в нуль, называются *нулями* передаточной функции. В нашем случае имеется один нуль равный  $-1/T$ .

Качественно проиллюстрируем влияние нуля на характер выходного сигнала. Передаточной функции (3.151) соответствует дифференциальное уравнение

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + (a_n + b_0)y = b_0 T \frac{dx}{dt} + b_0 x. \quad (3.152)$$

Согласно принципу наложения выходной сигнал  $y$  можно представить в виде суммы частичных выходных сигналов  $y_0$  и  $y_1$ :

$$y = y_0 + y_1, \quad (3.153)$$

где  $y_0$  определяется уравнением (3.150), а  $y_1$  – уравнением

$$a_0 \frac{d^n y_1}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y_1}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy_1}{dt} + (a_n + b_0)y_1 = b_0 T \frac{dx}{dt}. \quad (3.154)$$

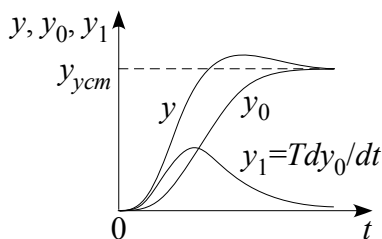


Рис. 3.67. Иллюстрация влияния нуля передаточной функции на переходный процесс.  $y_0$  – выходной сигнал при отсутствии нуля ( $T = 0$ ),  $y$  – выходной сигнал при наличии нуля ( $T \neq 0$ ),  $y_1$  – составляющая сигнала  $y$ , обусловленная наличием нуля

Из сравнения уравнений (3.150) и (3.154) следует, что сигнал  $y_1$  равен производной сигнала  $y_0$ , увеличенной в  $T$  раз:

$$y_1 = T \frac{dy_0}{dt}. \quad (3.155)$$

На рис. 3.67 показан выходной сигнал  $y$  и его составляющие

$y_0$  и  $y_1$ . Если бы передаточная функция не содержала нуля, т.е. если бы  $T = 0$ , то на выходе системы был бы сигнал  $y_0$ . На рис. 3.67 показан случай, когда  $y_0$  не имеет перерегулирования. Наличие же нуля (когда  $T \neq 0$ ) приводит к появлению составляющей  $y_1$ , которая с увеличением  $T$  может привести к весьма существенному перерегулированию выходного сигнала  $y$ .

Итак, наличие нуля (нулей) у передаточной функции способствует появлению перерегулирования выходного сигнала.

### 3.11.3. Влияние отрицательной обратной связи по производной выходного сигнала

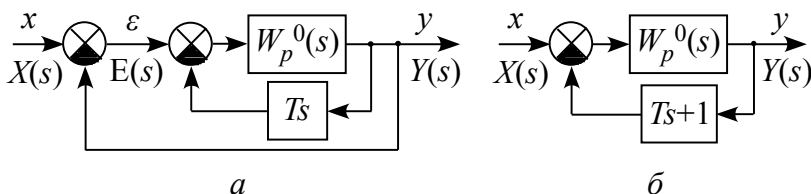


Рис. 3.68. Замкнутая система с дополнительной обратной связью по производной выходного сигнала (а) и эквивалентная ей одноконтурная система (б)

Мы вводили форсирующее звено в прямой канал исходной замкнутой системы (рис. 3.66). Теперь введем в нее дополнительную обратную связь в виде дифференцирующего звена (рис. 3.68.а) с передаточной функцией  $Ts$ . Приведем эту двухконтурную схему к одноконтурному виду (рис. 3.68.б). Схема на рис. 3.68.б отличается от исходной (рис. 3.66.а) тем, что форсирующее звено с передаточной функцией  $Ts + 1$  введено не в прямой канал, а в канал обратной связи. Пусть  $W_p^0(s)$  определяется тем же выражением (3.145):  $W_p^0(s) = b_0 / (a_0s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3)$ . Тогда

$$W_3(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0}{a_0s^3 + a_1s^2 + (a_2 + b_0T)s + a_3 + b_0}, \quad (3.156)$$

откуда получим условие устойчивости замкнутой системы:

$$\Delta_2 = a_1(a_2 + b_0T) - a_0(a_3 + b_0) > 0. \quad (3.157)$$

Как видим, условия устойчивости (3.157) и (3.148) одинаковые. Однако при включении форсирующего звена в прямой канал у передаточной функции замкнутой системы (3.147) появляется нуль. Введение же обратной связи по производной выходного сигнала (иначе говоря, включение форсирующего звена в канал обратной связи) не приводит к появлению дополнительного нуля у передаточной функции замкнутой системы (3.158) и, тем самым, не способствует дополнительному перерегулированию. Этот вывод справедлив и для систем более высокого порядка.

### 3.12. Элементы теории импульсной системы управления

#### 3.12.1. Решетчатые функции. Разностные уравнения

Ограничимся рассмотрением системы, в которой один из сигналов имеет вид последовательности идеальных импульсов – бесконечно узких, бесконечно высоких, но с площадями, имеющими конечные значения (не появившийся импульс можно рассматривать как импульс с нулевой площадью). Импульсы следуют через равные интервалы времени  $T_u$  (период импульсов). Все другие сигналы являются непрерывными. В таких системах важны связи значений сигналов в дискретные моменты времени – в моменты появления импульсов (значения в иные моменты времени не влияют на работу импульсной системы). Сигнал в виде последовательности идеальных импульсов характеризуется последовательностью значений площадей этих импульсов. В связи с этим при описании импульсных систем используются функции, имеющие какие-то значения в моменты появления импульсов и равные нулю в иные моменты времени. Такие дискретные функции в теории управления называют решетчатыми. Уравнения, связывающие решетчатые функции, называются разностными.

Пусть на вход аperiodического звена с передаточной функцией  $W(s) = k/(Ts + 1)$  подается импульсный сигнал  $u^*(t)$ . Верхний индекс \* указывает на то, что сигнал представляет собой последовательность импульсов. Сигналу  $u^*(t)$  соответствует решетчатая функция  $x_n$ , где  $n$  – номер импульса. Значения  $x_0, x_1, x_2, \dots$ , соответствующие номерам импульсов  $n = 0, 1, 2, \dots$ , равны площадям этих импульсов. Поскольку импульсная переходная характеристика аperiodического звена равна  $w(t) = (k/T)e^{-t/T}$ , нетрудно записать выходной сигнал как функцию времени:

$$y(t) = x_0(k/T)e^{-t/T} + x_1(k/T)e^{-(t-T_u)/T} + x_2(k/T)e^{-(t-2T_u)/T} + \dots$$

Сигналу  $y(t)$  соответствует разностное уравнение, связывающее значения решетчатых функций  $y_n$  (выход) и  $x_n$  (вход)

$$y_n = y_{n-1}e^{-T_u/T} + x_n k/T,$$

где  $y_{-1} = 0$ , поскольку начальные условия принимаем нулевыми.

### 3.12.2. Спектры решетчатых функций.

#### *Частотная передаточная функция*

По аналогии с непрерывными системами к решетчатым функциям можно применить преобразование Лапласа и получить дискретную передаточную функцию  $W^*(s)$  как отношение изображений по Лапласу решетчатых функций выходного и входного сигналов при нулевых начальных условиях. В дискретной передаточной функции в качестве аргумента фигурирует не просто комплексная величина  $s$ , а экспоненциальная функция  $e^{sT_u}$ . Если сделать замену  $e^{sT_u} = z$ , преобразование Лапласа переходит в так называемое  $z$ -преобразование. В результате получается дискретная передаточная функция  $W^*(z)$  как отношение  $z$ -изображений решетчатых функций выходного и входного сигналов. Наконец,

если сделать замену  $s = j\omega$ , то перейдем к дискретной частотной передаточной функции  $W^*(j\omega)$  как отношению фурье-изображений (*спектров*) решетчатых функций выходного и входного сигналов. Отметим, что изображения решетчатых функций также помечены верхним индексом  $*$ .

Так как спектры решетчатых функций и  $W^*(j\omega)$  являются периодическими функциями частоты  $\omega$  с периодом  $2\pi/T_u$ , достаточно рассматривать диапазон частот  $\omega$  от  $-\pi/T_u$  до  $\pi/T_u$ .

Вместо частоты  $\omega$  в рад/с часто пользуются *относительной* безразмерной частотой  $\bar{\omega}$  в диапазоне от  $-\pi$  до  $\pi$ :

$$\bar{\omega} = \omega T_u \quad (3.158)$$

В импульсных системах (как и в непрерывных) действительные части частотных характеристик являются четными функциями частоты, а мнимые – нечетными. Поэтому достаточно знать АФЧХ для положительных частот. АФЧХ для отрицательных частот можно получить зеркальным отражением АФЧХ для положительных частот относительно действительной оси. Учитывая это, указанный диапазон частот можно уменьшить вдвое, рассматривая только положительные частоты  $\bar{\omega}$  от 0 до  $\pi$ .

Выражения дискретных частотных передаточных функций  $W^*(j\bar{\omega})$  или  $W^*(j\omega)$  более сложные по сравнению с частотными передаточными функциями непрерывных систем  $W(j\omega)$ . К примеру, для апериодического звена  $W(j\omega) = k/(Tj\omega + 1)$ , а

$$W^*(j\bar{\omega}) = \frac{Y^*(j\bar{\omega})}{X^*(j\bar{\omega})} = \frac{k}{T} \frac{e^{j\bar{\omega}}}{e^{j\bar{\omega}} - e^{-T_u/T}}, \quad (3.159)$$

где  $Y^*(j\bar{\omega})$  и  $X^*(j\bar{\omega})$  – спектры решетчатых функций  $y_n$  и  $x_n$ .

Выше были приведены правила преобразования структурных схем для непрерывных систем. Для импульсных систем эти



правила справедливы лишь в том случае, если на вход каждого звена структурной схемы подается импульсный сигнал. Например, если два апериодических звена соединены последовательно и на вход первого подается импульсный сигнал, то на вход второго подается уже непрерывный сигнал с выхода первого. В этом случае общая дискретная частотная передаточная функция такого объединения звеньев не равна произведению дискретных частотных передаточных функций типа (3.159), соответствующих каждому апериодическому звену в отдельности.

### 3.12.3. Спектры некоторых решетчатых функций

1. Решетчатая функция  $x_n$  равна  $x_0$  при  $n = 0$  и нулю при иных значениях  $n$ . Такая решетчатая функция соответствует сигналу в виде одиночного идеального импульса  $x^*(t) = x_0\delta(t)$ , возникающего в нулевой момент времени и имеющего площадь  $x_0$ . Спектр такой решетчатой функции равен

$$X^*(j\omega) = x_0. \quad (3.160)$$

2. Решетчатая функция  $x_n$  равна  $x_1$  при  $n = 1$  и нулю при иных значениях  $n$ . Такая решетчатая функция соответствует сигналу в виде одиночного идеального импульса  $x^*(t) = x_1\delta(t - T_u)$ , возникающего в момент времени  $t = T_u$  и имеющего площадь  $x_1$ . Спектр такой решетчатой функции равен

$$X^*(j\omega) = x_1e^{-j\omega T_u}. \quad (3.161)$$

3. Решетчатая функция  $x_n$  равна  $x_m$  при  $n = m$  и нулю при иных значениях  $n$ . Такая решетчатая функция соответствует сигналу  $x^*(t) = x_m\delta(t - mT_u)$  – одиночному идеальному импульсу, возникающему в момент времени  $t = mT_u$  и имеющему площадь  $x_m$ . Спектр такой решетчатой функции равен

$$X^*(j\bar{\omega}) = x_m e^{-j\bar{\omega}m}. \quad (3.162)$$

4. Огибающая решетчатой функции представляет собой падающую экспоненту:  $x_n = x_0 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha n}$ , т.е. ее значения при

$n = 0, 1, 2, \dots$  равны  $x_0$ ,  $x_1 = x_0 e^{-\alpha}$ ,  $x_2 = x_0 e^{-\alpha 2}$  и т.д., где  $\alpha > 0$  – константа. В этом случае спектр решетчатой функции равен

$$X^*(j\bar{\omega}) = x_0 \frac{e^{j\bar{\omega}}}{e^{j\bar{\omega}} - e^{-\alpha}}. \quad (3.163)$$

5. Если все значения решетчатой функции  $x_n$  одинаковы и равны  $x_0$  (аналог скачка), то ее спектр равен

$$X^*(j\bar{\omega}) = x_0 \frac{e^{j\bar{\omega}}}{e^{j\bar{\omega}} - 1} = x_0 \frac{1}{1 - e^{-j\bar{\omega}}}. \quad (3.164)$$

6. Периодическая несимметричная решетчатая функция при  $M$  значениях за период колебаний (рис. 3.69.а). Ее спектр равен

$$X^*(j\bar{\omega}) = \frac{e^{j\bar{\omega}M}}{e^{j\bar{\omega}M} - 1} \sum_{n=0}^{M-1} x_n e^{-j\bar{\omega}n}. \quad (3.165)$$

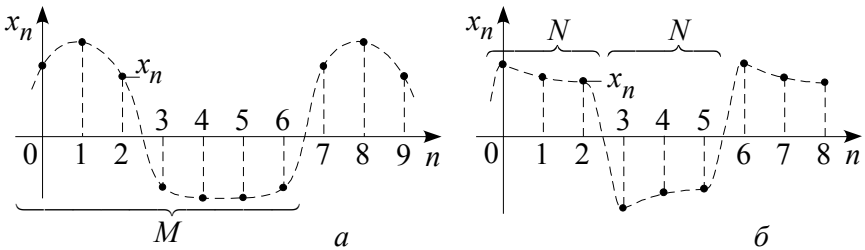


Рис. 3. 69.Периодическая несимметричная (а) и симметричная (б) решетчатая функция

7. Периодическая симметричная решетчатая функция при  $N$  значениях за полпериода колебаний (рис. 3.69.б). Ее спектр равен

$$X^*(j\bar{\omega}) = \frac{e^{j\bar{\omega}N}}{e^{j\bar{\omega}N} + 1} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j\bar{\omega}n}. \quad (3.166)$$

8. Вычисление начального и конечного значений решетчатой функции по ее спектру.

$$x_0 = \left[ \frac{e^{j\bar{\omega}} - 1}{e^{j\bar{\omega}}} X^*(j\bar{\omega}) \right]_{\bar{\omega} \rightarrow \infty}, \quad x_\infty = \left[ \frac{e^{j\bar{\omega}} - 1}{e^{j\bar{\omega}}} X^*(j\bar{\omega}) \right]_{\bar{\omega} \rightarrow 0}. \quad (3.167)$$

### 3.12.4. Дискретные частотные передаточные функции замкнутой системы

Итак, в импульсных системах, как правило, интересуются только значениями переменных в дискретные моменты времени. На рис. 3.70 показана одноконтурная замкнутая импульсная система, соответствующая этому случаю. Дискретные частотные передаточные функции разомкнутой и замкнутой системы обозначены соответственно  $W_p^*(j\bar{\omega})$  и  $W_z^*(j\bar{\omega})$ .

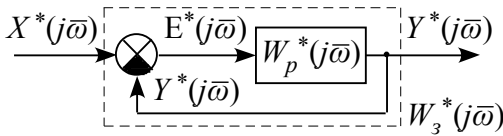


Рис. 3.70. Одноконтурная замкнутая импульсная система

Для спектров решетчатых функций дискретных сигналов справедливы соотношения:

$$E^*(j\bar{\omega}) = X^*(j\bar{\omega}) - Y^*(j\bar{\omega}), \quad Y^*(j\bar{\omega}) = W_p^*(j\bar{\omega})E^*(j\bar{\omega}).$$

Из них получаем выражения дискретных частотных передаточных функций замкнутой системы относительно выходного сигнала  $y^*$  и относительно ошибки регулирования  $\varepsilon^*$ :

$$W_z^*(j\bar{\omega}) = \frac{Y^*(j\bar{\omega})}{X^*(j\bar{\omega})} = \frac{W_p^*(j\bar{\omega})}{1 + W_p^*(j\bar{\omega})}, \quad (3.168)$$

$$W_{ex}^*(j\bar{\omega}) = \frac{E^*(j\bar{\omega})}{X^*(j\bar{\omega})} = \frac{1}{1 + W_p^*(j\bar{\omega})}. \quad (3.169)$$

Формулы (3.168) и (3.169) аналогичны соответствующим

формулам для передаточных функций непрерывной системы.

### **3.12.5. Вычисление дискретной импульсной переходной характеристики по вещественной части дискретной частотной передаточной функции**

В непрерывных системах частотная передаточная функция  $W(j\omega)$  выражается как фурье-изображение импульсной переходной характеристики  $w(t)$ :  $W(j\omega) = \int_0^{\infty} w(t)e^{-j\omega t} dt$ . Аналогично дискретная частотная передаточная функция импульсной системы  $W^*(j\bar{\omega})$  представляет собой фурье-изображение (спектр) решетчатой импульсной переходной характеристики  $w_n$ , соответствующей импульсной переходной характеристике  $w(t)$ :

$$W^*(j\bar{\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n e^{-j\bar{\omega}n}. \quad (3.170)$$

Комплексную величину  $W^*(j\bar{\omega})$  можно представить в виде

$$W^*(j\bar{\omega}) = U^*(\bar{\omega}) + jV^*(\bar{\omega}). \quad (3.171)$$

Зная вещественную часть  $U^*(\bar{\omega})$  дискретной частотной передаточной функции, можно вычислить решетчатую импульсную переходную характеристику  $w_n$  по формуле

$$w_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} U^*(\bar{\omega}) \cos(\bar{\omega}n) d\bar{\omega}. \quad (3.172)$$

### **3.12.6. Об эквивалентности импульсной и непрерывной систем**

Пусть замкнутая импульсная система (рис. 3.71) содержит один идеальный импульсный элемент ( $\perp$ ), преобразующий непрерывный сигнал  $\varepsilon$  в импульсный сигнал  $\varepsilon^*$  в виде последовательности идеальных импульсов. Площади этих импульсов равны значениям непрерывного сигнала  $\varepsilon$  в моменты появления импульсов. Импульсы подаются на вход непрерывной части систе-

мы с передаточной функцией  $W$ . При достаточно малом периоде импульсов  $T_u$  вместо исходной импульсной системы можно рассматривать практически эквивалентную ей непрерывную систему, заменив идеальный импульсный элемент усилительным звеном с коэффициентом передачи равным  $1/T_u$ .

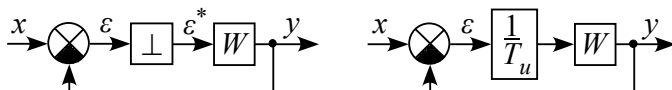


Рис. 3.71. Слева импульсная система, справа эквивалентная ей непрерывная система

### 3.12.7. Аналог критерия Найквиста и логарифмический критерий устойчивости

К одноконтурной импульсной системе с единичной отрицательной обратной связью (рис. 3.70) применимы те же формулировки критерия Найквиста и логарифмического критерия устойчивости, что и для непрерывных систем. Отличие лишь в диапазоне изменения частоты. В непрерывной системе частоту  $\omega$  изменяют от 0 до  $\infty$ . В импульсной системе частоту  $\varpi$  изменяют от 0 до  $\pi$ , причем в общем случае  $W_p^*(j\varpi)$  при  $\varpi = \pi$  равна не нулю, а некоторой действительной величине.

## 4. РЕАКТОР НУЛЕВОЙ МОЩНОСТИ

Под реактором нулевой мощности понимается реактор, мощность которого столь мала, что можно пренебречь влиянием разогрева реактора на происходящие в нем процессы. Об особенностях реактора ненулевой мощности речь пойдет ниже.

### 4.1. Линеаризация уравнений кинетики реактора

Вернемся к уравнениям кинетики (2.57) и (2.58), выраженным через реактивность. Запишем их без учета внешнего источ-

ника нейтронов, т.е. будем считать  $S_{\text{вн}} = 0$ :

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\rho - \beta}{\tau} n + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i, \quad (4.1)$$

$$\frac{dC_i}{dt} = \frac{\beta_i}{\tau} n - \lambda_i C_i. \quad (4.2)$$

Такое упрощение допустимо, поскольку к моменту вывода реактора на уровень мощности, который представляет интерес с точки зрения автоматического управления,  $\sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i \gg S_{\text{вн}}$ .

Подставив уравнение (4.2) в уравнение (4.1), приведем систему уравнений кинетики (4.1), (4.2) к следующему виду:

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\rho}{\tau} n - \sum_{i=1}^6 \frac{dC_i}{dt}, \quad (4.3)$$

$$\frac{dC_i}{dt} = \frac{\beta_i}{\tau} n - \lambda_i C_i. \quad (4.4)$$

Уравнение (4.3) является нелинейным из-за произведения переменных  $\rho n$ .

Будем рассматривать стационарное состояние реактора, т.е. состояние, которому соответствуют постоянные значения переменных (другими словами, базовые значения)  $\rho = \rho^0 = 0$ ,  $n = n^0$ ,  $C_i = C_i^0$  и нулевые значения производных  $dn/dt = 0$ ,  $dC_i/dt = 0$ . Для режима стабилизации мощности представим переменные в виде суммы постоянных (базовых) значений и отклонений от этих значений:

$$\rho = \rho^0 + \Delta\rho = \Delta\rho, \quad n = n^0 + \Delta n, \quad C_i = C_i^0 + \Delta C_i. \quad (4.5)$$

**Замечание.** Поскольку базовое значение реактивности равно нулю ( $\rho^0 = 0$ ), то реактивность  $\rho$  одновременно является и отклонением реактивности  $\Delta\rho$ . Однако далее, оперируя с от-

клонениями переменных, для единообразия будем использовать обозначение  $\Delta\rho$ .

Режим стабилизации мощности характеризуется малыми значениями  $\Delta\rho$ ,  $\Delta n$ ,  $\Delta C_i$ . В связи с этим нелинейное уравнение (4.4) можно линеаризовать. Подставив выражения (4.5) в первое уравнение кинетики (4.3), запишем

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\Delta\rho}{\tau}(n^0 + \Delta n) - \sum_{i=1}^6 \frac{d\Delta C_i}{dt} = \frac{\Delta\rho}{\tau} n^0 + \frac{\Delta\rho\Delta n}{\tau} - \sum_{i=1}^6 \frac{d\Delta C_i}{dt}. \quad (4.6)$$

Произведением  $\Delta\rho\Delta n$  можно пренебречь как малой величиной второго порядка, в результате чего нелинейное уравнение (4.7) переходит в линейное:

$$\frac{d\Delta n(t)}{dt} + \sum_{i=1}^6 \frac{d\Delta C_i(t)}{dt} = \frac{n^0}{\tau} \Delta\rho(t). \quad (4.7)$$

Подставим выражения (4.5) во второе уравнение кинетики (4.4):

$$\frac{d\Delta C_i}{dt} = \frac{\beta_i}{\tau} n^0 + \frac{\beta_i}{\tau} \Delta n - \lambda_i C_i^0 - \lambda_i \Delta C_i. \quad (4.8)$$

Учитывая, что для стационарного состояния реактора уравнение (4.4) сводится к виду

$$0 = \frac{\beta_i}{\tau} n^0 - \lambda_i C_i^0, \quad (4.9)$$

из уравнений (4.8) и (4.9) получим

$$\frac{d\Delta C_i(t)}{dt} = \frac{\beta_i}{\tau} \Delta n(t) - \lambda_i \Delta C_i(t). \quad (4.10)$$

Итак, из системы уравнений кинетики для полных переменных (4.3), (4.4), первое из которых нелинейное, мы получили линейные уравнения кинетики (4.7), (4.10) для отклонений переменных от их базовых значений.

## 4.2. Передаточная функция реактора

Преобразуем дифференциальные уравнения (4.7) и (4.10) по

Лапласу. Поскольку эти уравнения являются уравнениями с нулевыми начальными условиями  $\Delta n(0) = 0$ ,  $\Delta C_i(0) = 0$ , то в результате преобразования получим алгебраические уравнения наиболее простого вида:

$$s\Delta n(s) + \sum_{i=1}^6 s\Delta C_i(s) = \frac{n^0}{\tau} \Delta \rho(s), \quad (4.11)$$

$$s\Delta C_i(s) + \lambda_i \Delta C_i(s) = \frac{\beta_i}{\tau} \Delta n(s). \quad (4.12)$$

Уравнение (4.12) можно записать иначе:

$$(s + \lambda_i) \Delta C_i(s) = \frac{\beta_i}{\tau} \Delta n(s). \quad (4.12.a)$$

**Замечание относительно обозначений.** Обычно для обозначения оригиналов (функций времени  $t$ ) используют строчные буквы, а для обозначения изображений по Лапласу (функций комплексного переменного  $s$ ) используют прописные буквы, например,  $x$  и  $X$  соответственно. Однако это не всегда удобно. Так, в уравнениях кинетики (4.7), (4.10) функции времени обозначены, во-первых, не только одной буквой, но и сочетанием из двух букв, а во-вторых, в обозначениях использованы и строчные, и прописные буквы:  $\Delta n(t)$ ,  $\Delta C_i(t)$ ,  $\Delta \rho(t)$ . Поэтому в уравнениях (4.11), (4.12) изображения этих функций по Лапласу обозначены теми же буквами, но с указанием комплексного аргумента  $s$ :  $\Delta n(s)$ ,  $\Delta C_i(s)$ ,  $\Delta \rho(s)$ . Такой способ обозначений будет использоваться и далее.

Из уравнения (4.12.a) выразим  $\Delta C_i(s)$  и подставим его в уравнение (4.11). В результате получим следующее выражение передаточной функции реактора:

$$W_{R0}(s) = \frac{\Delta n(s)/n^0}{\Delta \rho(s)} = \frac{\Delta P(s)/P^0}{\Delta \rho(s)} = \frac{1}{s \left( \tau + \sum_{i=1}^6 \frac{\beta_i}{s + \lambda_i} \right)}. \quad (4.13)$$



Напомним, что передаточная функция есть отношение изображений по Лапласу выходного сигнала к входному при нулевых начальных условиях. Передаточная функция реактора (4.13) соответствует случаю, когда в качестве входного сигнала рассматривается реактивность  $\Delta\rho$ , а в качестве выходного – относительное отклонение плотности нейтронов  $\Delta n/n^0$  или равное ему относительное отклонение мощности реактора  $\Delta P/P^0$ , где  $\Delta P = P - P^0$ ,  $P$  – мощность реактора,  $P^0$  – ее базовое значение.

В формуле (4.13) выражение в скобках приведем к общему знаменателю. Тогда передаточная функция (4.13) примет вид

$$W_{R0}(s) = \frac{\Delta n(s)/n^0}{\Delta\rho(s)} = \frac{\Delta P(s)/P^0}{\Delta\rho(s)} = \frac{\prod_{i=1}^6 (s + \lambda_i)}{s(a_0s^6 + a_1s^5 + a_2s^4 + a_3s^3 + a_4s^2 + a_5s + a_6)}, \quad (4.14)$$

где  $a_0 = \tau$ ;  $a_1, \dots, a_5$  – некоторые постоянные, зависящие от  $\tau$ ,

$$\beta_i, \lambda_i; a_6 = \left( \prod_{i=1}^6 \lambda_i \right) \left( \tau + \sum_{i=1}^6 \frac{\beta_i}{\lambda_i} \right).$$

В формуле (4.14) скобку в знаменателе можно записать в ином виде. Для этого приравняем эту скобку нулю и вычислим шесть корней  $r_1, \dots, r_6$  получившегося уравнения, т.е. вычислим те значения  $s$ , при которых скобка в знаменателе обращается в нуль. Тогда многочлен в скобке знаменателя можно записать в виде произведения  $(s + r_1)\dots(s + r_6)$ . В результате передаточная функция (4.15) примет вид

$$W_{R0}(s) = \frac{\Delta n(s)/n^0}{\Delta\rho(s)} = \frac{\Delta P(s)/P^0}{\Delta\rho(s)} = \frac{\prod_{i=1}^6 (s + \lambda_i)}{s\tau \prod_{i=1}^6 (s + r_i)}. \quad (4.15)$$

Преобразуем передаточную функцию (4.15) так, чтобы члены в скобках, не содержащие  $s$ , были равны единице:

$$W_{R0}(s) = \frac{\Delta n(s)/n^0}{\Delta \rho(s)} = \frac{\Delta P(s)/P^0}{\Delta \rho(s)} = \frac{k}{s} \frac{\prod_{i=1}^6 (T_i s + 1)}{\prod_{i=1}^6 (T_i' s + 1)}. \quad (4.16)$$

В этом случае параметры  $T_i = 1/\lambda_i$  и  $T_i' = 1/r_i$  называются постоянными времени, а параметр

$$k = \frac{1}{\tau + \sum_{i=1}^6 \frac{\beta_i}{\lambda_i}} \quad (4.17)$$

называется коэффициентом передачи (или коэффициентом усиления). В теории автоматического управления обычно используются передаточные функции вида (4.16).

Как следует из передаточной функции (4.16), математическую модель реактора можно представить в виде последовательного соединения тринадцати типовых звеньев. Это одно интегрирующее звено с передаточной функцией  $W_u(s) = k/s$ , шесть апериодических с передаточными функциями  $W_{ai}(s) = 1/(T_i' s + 1)$  и шесть форсирующих с передаточными функциями  $W_{\phi i}(s) = T_i s + 1$ .

Постоянная времени каждого форсирующего звена равна времени жизни запаздывающих нейтронов соответствующей группы  $T_i = 1/\lambda_i$ . Постоянные времени апериодических звеньев  $T_i'$  и коэффициент передачи  $k$  зависят как от параметров запаздывающих нейтронов  $\beta_i$  и  $\lambda_i$ , так и от эффективного времени жизни мгновенных нейтронов  $\tau$ .

Как известно, если знаменатель передаточной функции приравнять нулю, то получим характеристическое уравнение. Из вы-

ражения (4.16) или (4.15) видно, что не все семь корней характеристического уравнения являются отрицательными. Один корень равен нулю (он обусловлен интегрирующим звеном). Таким образом, реактор нулевой мощности не является устойчивой системой. Так, наличие интегрирующего звена обусловит постоянное нарастание мощности при положительном скачке реактивности. Напомним, что линейный характер нарастания справедлив лишь при малых отклонениях переменных от их значений, соответствующих стабильному уровню мощности. Именно для таких отклонений применимо понятие передаточной функции. При больших отклонениях переменных нарастание мощности, как мы видели, происходит по экспоненте (рис 2.5).

### 4.3. Частотные характеристики реактора

Напомним, что выражение частотной передаточной функции  $W(j\omega)$  получается из выражения передаточной функции  $W(s)$  простой заменой переменной:  $j\omega$  вместо  $s$ . Здесь  $\omega$  – круговая частота в  $\text{с}^{-1}$  (радиан в секунду). Передаточной функции реактора нулевой мощности (4.16) будет соответствовать частотная передаточная функция

$$W_{R0}(j\omega) = \frac{\Delta n(j\omega)/n^0}{\Delta \rho(j\omega)} = \frac{\Delta P(j\omega)/P^0}{\Delta \rho(j\omega)} = \frac{k}{j\omega} \frac{\prod_{i=1}^6 (T_i j\omega + 1)}{\prod_{i=1}^6 (T'_i j\omega + 1)}. \quad (4.18)$$

Модуль частотной передаточной функции реактора есть его амплитудная частотная характеристика (АЧХ)

$$A_{R0}(\omega) = |W_{R0}(j\omega)|. \quad (4.19)$$

АЧХ представляет собой зависимость отношения амплитуд синусоидальных сигналов от частоты  $\omega$  (отношение амплитуды выхода к амплитуде входа). Для реактора это есть отношение ам-

плитуды относительной мощности  $\Delta P/P^0$  к амплитуде реактивности  $\Delta\rho$  как функция частоты синусоидальных сигналов.

Аргумент частотной передаточной функции реактора есть его фазовая частотная характеристика (ФЧХ)

$$\varphi_{R0}(\omega) = \text{arg} W_{R0}(j\omega). \quad (4.20)$$

ФЧХ есть зависимость от частоты фазового сдвига между синусоидами выходного и входного сигналов.

Для широкого диапазона частот целесообразно рассматривать логарифмические частотные характеристики реактора: логарифмическую амплитудно-частотную

$$L_{R0}(\omega) = 20 \lg A_{R0}(\omega) = 20 \lg |W_{R0}(j\omega)| \quad (4.21)$$

и логарифмическую фазочастотную

$$\varphi_{R0}(\omega) = \text{arg} W_{R0}(j\omega). \quad (4.22)$$

В качестве примера на рис. 4.1 приведены логарифмические частотные характеристики реактора на быстрых нейтронах с топливом из плутония-239. Эффективное время жизни мгновенных нейтронов принято равным  $\tau = 4 \cdot 10^{-8}$ . Значения параметров запаздывающих нейтронов приняты согласно табл. 2.2.

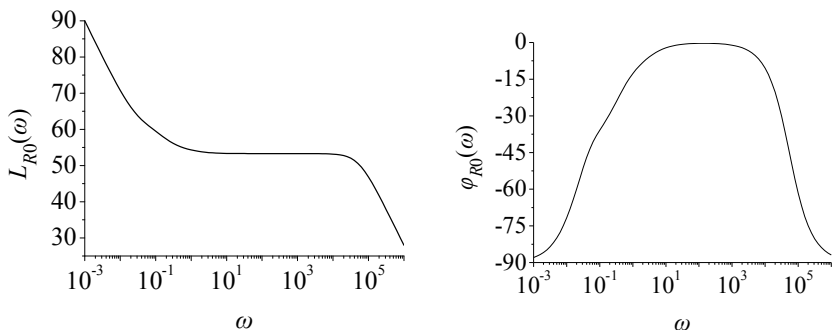


Рис. 4.1. Логарифмические частотные характеристики реактора на быстрых нейтронах с активной зоной из плутония-239 при эффективном время жизни мгновенных нейтронов  $\tau = 4 \cdot 10^{-8}$  с ( $L_{R0}(\omega)$  – амплитудная,  $\varphi_{R0}(\omega)$  – фазовая)

На рис. 4.2 приведены логарифмические частотные характеристики реактора на тепловых нейтронах с топливом из урана-235 для различных значений эффективного времени жизни мгновенных нейтронов. Значения параметров запаздывающих нейтронов соответствуют табл. 2.1.

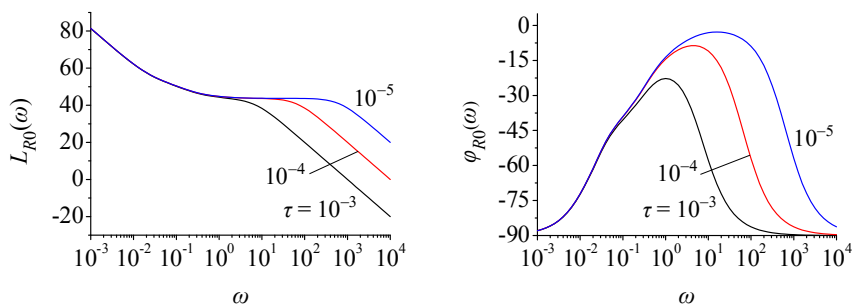


Рис. 4.2. Логарифмические частотные характеристики реактора на тепловых нейтронах с активной зоной из урана-235 при различных значениях эффективного времени жизни мгновенных нейтронов  $\tau : 10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}$  с

( $L_{R0}(\omega)$  – амплитудная,  $\varphi_{R0}(\omega)$  – фазовая)

Частотные характеристики реактора отражают связь между синусоидальными колебаниями реактивности и вызываемыми ими синусоидальными колебаниями мощности. Естественно, имеются в виду колебания мощности с амплитудами достаточно малыми по сравнению с базовым значением мощности (в качестве базового выбран некоторый фиксированный уровень мощности). Именно при этих условиях допустима линеаризация исходных нелинейных уравнений кинетики.

Проследим за ходом характеристик, показанных на рис. 4.1 и 4.2, по мере увеличения частоты колебаний. При достаточно низких частотах наклон логарифмической амплитудной частотной характеристики (ЛАЧХ) близок к  $-20$  дБ/дек. При этом логарифмическая фазовая частотная характеристика (ЛФЧХ) близка к  $-90^\circ$ .

В этом диапазоне частот реактор ведет себя как интегрирующее звено. С увеличением частоты наклон постепенно уменьшается и в некотором диапазоне частот ЛАЧХ переходит в горизонтальный участок. Диапазон частот горизонтального участка тем шире, чем меньше эффективное время жизни мгновенных нейтронов  $\tau$ . Если горизонтальный участок ЛАЧХ достаточно протяженный, то в некотором диапазоне частот ЛФЧХ близка к нулю (рис. 4.1, а также рис. 4.2 при  $\tau = 10^{-5}$  с). Реактор в этом диапазоне частот ведет себя как усилительное звено. С дальнейшим увеличением частоты наблюдается плавный переход от горизонтального участка к участку с наклоном  $-20$  дБ/дек. Из приведенных рассуждений следует, что в первом приближении реактор можно представить как последовательное соединение интегрирующего, форсирующего и апериодического звеньев. В отличие от исходной передаточной функции реактора (4.16) передаточная функция такой весьма грубой модели реактора имеет вид

$$W_{R0}(s) = \frac{k(T_{\text{э}1}s + 1)}{s(T_{\text{э}2}s + 1)} \quad (4.23)$$

Если при выводе передаточной функции реактора вместо шести групп запаздывающих нейтронов учитывать лишь одну эквивалентную группу с параметрами  $\beta$  и  $\lambda_{\text{э}}$ , то в результате придем к формуле (4.23). При этом коэффициент передачи  $k$  и постоянные времени  $T_{\text{э}1}$  и  $T_{\text{э}2}$  равны

$$k = \frac{1}{\tau + \frac{\beta}{\lambda_{\text{э}}}}, \quad T_{\text{э}1} = \frac{1}{\lambda_{\text{э}}}, \quad T_{\text{э}2} = \frac{\tau}{\tau\lambda_{\text{э}} + \beta}. \quad (4.24)$$

Как отмечалось ранее, если система представлена в виде последовательно соединенных звеньев, то крайне просто построить асимптотическую ЛАЧХ системы. Поэтому при оценочных расчетах нередко ограничиваются использованием именно асим-

птотических ЛАЧХ. В качестве примера построим асимптотическую ЛАЧХ реактора на тепловых нейтронах с активной зоной из урана-235. Ограничимся учетом лишь одной эквивалентной группы запаздывающих нейтронов с параметрами  $\beta = 0,0065$  и  $\lambda_3 = 0,077 \text{ с}^{-1}$ . В этом случае, как следует из формулы (4.23), реактор представляется в виде последовательного соединения трех звеньев: интегрирующего, форсирующего и апериодического.

Пусть, например, эффективное время жизни мгновенных нейтронов равно  $\tau = 10^{-3}$  с. Тогда из формулы (4.24) вычислим коэффициент передачи реактора  $k = 11,7$  и постоянные времени форсирующего звена  $T_{31} = 13$  с и апериодического звена  $T_{32} = 0,15$  с. Частоты сопряжения форсирующего и апериодического звеньев равны соответственно  $\omega_{31} = 1/T_{31} = \lambda_3 = 0,077 \text{ с}^{-1}$  и  $\omega_{32} = 1/T_{32} = 6,6 \text{ с}^{-1}$ .

Ранее упоминался удобный метод построения асимптотической ЛАЧХ системы без построения ЛАЧХ отдельных звеньев. Чтобы воспользоваться им, полагаем, что коэффициент передачи интегрирующего звена равен коэффициенту передачи реактора  $k = 11,7$ , а коэффициенты передачи форсирующего и апериодического звеньев равны единице. В этом случае на частотах меньших наименьшей частоты сопряжения  $\omega_{31}$  асимптотическая ЛАЧХ реактора будет совпадать с ЛАЧХ интегрирующего звена, пересекающей ось частот при  $\omega = k = 11,7 \text{ с}^{-1}$ , и иметь наклон  $-20$  дБ/дек. В диапазоне частот  $\omega_{31} \div \omega_{32}$  к наклону интегрирующего звена добавится наклон форсирующего звена. В результате в этом диапазоне асимптотическая ЛАЧХ реактора будет иметь нулевой наклон (горизонтальный участок). Наконец, начи-

ная с частоты  $\omega_{\text{э}2}$ , к нулевому наклону добавится наклон  $-20$  дБ/дек, обусловленный аperiodическим звеном (рис. 4.3).

На рис. 4.3 показаны также асимптотические ЛАЧХ реактора при  $\tau = 10^{-4}$  и  $\tau = 10^{-5}$  с. Для этих значений  $\tau$  частота сопряжения аperiodического звена  $\omega_{\text{э}2}$  соответственно равна 65 и 650  $\text{с}^{-1}$ . Значение  $k$  практически остается прежним.

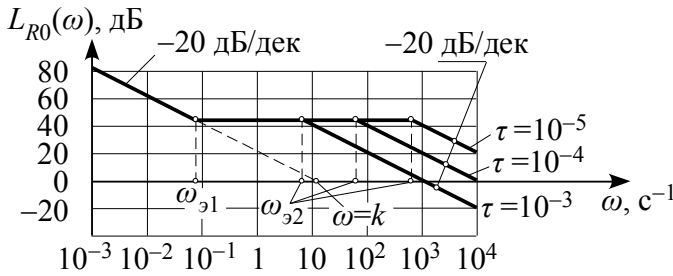


Рис. 4.3. Асимптотические логарифмические амплитудно-частотные характеристики реактора на тепловых нейтронах с активной зоной из урана-235 для различных значений эффективного времени жизни мгновенных нейтронов  $\tau$  (с) при учете одной эквивалентной группы запаздывающих нейтронов

## 5. РЕАКТОР НЕНУЛЕВОЙ МОЩНОСТИ

### 5.1. Обратная связь, обусловленная разогревом реактора

Уравнения кинетики относятся к реактору нулевой мощности и описывают зависимость мощности реактора от реактивности, когда эффект разогрева реактора себя не проявляет. Входным сигналом реактора нулевой мощности является реактивность  $\Delta\rho$ . В качестве выходного сигнала удобно рассматривать относительное отклонение мощности  $\Delta P/P^0 = (P - P^0)/P^0$  (рис. 5.1.a), где  $P$  – мощность реактора,  $P^0$  – ее базовое значение (постоянное значение мощности, соответствующее режиму стабилизации),  $\Delta P = P - P^0$  – отклонение мощности от базового значения.



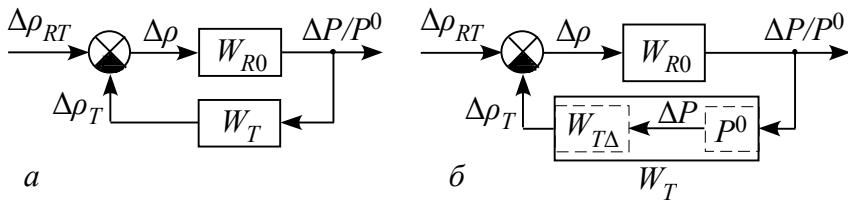


Рис. 5.1. Блок-схема реактора ненулевой мощности ( $W_{R0}$  и  $W_T$  – передаточная функция реактора нулевой мощности и мощностной обратной связи соответственно,  $W_{T\Delta}$  и  $P^0$  – передаточные функции, образующие передаточную функцию  $W_T$ )

С увеличением мощности повышается температура элементов реактора (твэлы, теплоноситель, замедлитель). Очевидно, что одно лишь изменение плотности этих элементов вследствие нагрева влечет за собой изменение реактивности реактора. При этом влияние нагрева того или иного элемента на реактивность зависит от конкретной конструкции реактора. Таким образом, для описания реактора, работающего на мощности, необходимо представить его в виде двух блоков: реактора нулевой мощности и охватывающей его обратной связи, отражающей эффект разогрева реактора. Обратная связь представляется в виде отдельного блока системы, на выходе которого формируется реактивность  $\Delta\rho_T$ , обусловленная относительным отклонением мощности (рис. 5.1.а). Нетрудно догадаться (и далее это будет обосновано), что  $\Delta\rho_T$  зависит от отклонения температур элементов реактора от их базовых значений, а эти отклонения, в свою очередь, зависят от отклонения мощности  $\Delta P$ . С математической точки зрения в качестве входного сигнала блока обратной связи (его передаточная функция обозначена  $W_T$ ) удобнее рассматривать  $\Delta P/P^0$  (рис. 5.1.а). С физической же точки зрения входным сигналом блока обратной связи (его передаточная функция обозначена  $W_{T\Delta}$ ) следовало бы рассматривать  $\Delta P$  (рис. 5.1.б). Связь между

этим передающими функциями очевидна:  $W_T = W_{T\Delta} P^0$ . Эта зависимость отражена на рис. 5.1.б введением дополнительного усилительного звена с передаточной функцией равной  $P^0$ , превращающего сигнал  $\Delta P/P^0$  в сигнал  $\Delta P$ . Далее при рассмотрении реактора ненулевой мощности мы будем пользоваться блок-схемой, изображенной на рис. 5.1.а.

Обратную связь, у которой в качестве выходного сигнала рассматривается реактивность, а в качестве входного – мощность, уместно назвать *мощностной обратной связью*.

Итак, для реактора ненулевой мощности в качестве выходного сигнала принято относительное отклонение мощности  $\Delta P/P^0$ , а в качестве входного сигнала – вносимая извне реактивность  $\Delta \rho_{RT}$  (рис. 5.1.а).

Для устойчивой работы реактор проектируется так, чтобы мощностная обратная связь в целом была *отрицательной*. В контуре схемы на рис. 5.1.а использован сумматор с инвертированием. Сигнал с выхода блока мощностной обратной связи подводится к зачерченному сектору сумматора, т.е. обратную связь мы рассматриваем как отрицательную. Сигнал на выходе такого сумматора формируется в виде разности  $\Delta \rho = \Delta \rho_{RT} - \Delta \rho_T$ .

Реактивность  $\Delta \rho_T$  часто представляют в виде суммы неких составляющих, каждая из которых характеризуется соответствующим коэффициентом передачи. При использовании сумматора с инвертированием сумма этих коэффициентов передачи должна быть положительной.

В схеме замкнутой системы с отрицательной обратной связью можно использовать и сумматор без инвертирования. В этом случае сигнал на выходе сумматора равен  $\Delta \rho = \Delta \rho_{RT} + \Delta \rho_T$  и обратная связь формально рассматривается как *положительная*, но

с отрицательным суммарным коэффициентом передачи мощностной обратной связи.

Если в контуре замкнутой системы используется сумматор с инвертированием, то к анализу устойчивости такой системы применимы привычные формулировки критерия Найквиста.

Составим уравнения, описывающие температуры наиболее существенных элементов активной зоны. Ограничимся описанием температур, усредненных по объему этих элементов.

Начнем с температуры топлива  $\theta$ .

Рассмотрим произвольный момент времени  $t$  и бесконечно малый интервал времени  $dt$ . За время  $dt$  в твэлах выделится тепловая энергия, равная  $P(t)dt$ , где  $P$  – мощность реактора. В то же время теплоноситель отведет от твэлов энергию  $dQ_{\eta\theta}$ . Согласно условию теплового баланса разность этих энергий  $dQ_{\theta}$  есть энергия, воспринятая за время  $dt$  твэлами:

$$dQ_{\theta}(t) = P(t)dt - dQ_{\eta\theta}(t). \quad (5.1)$$

Запишем это уравнение в ином виде:

$$\frac{dQ_{\theta}(t)}{dt} = P(t) - \frac{dQ_{\eta\theta}(t)}{dt}. \quad (5.2)$$

Выразим производные в уравнение (5.2) через соответствующие температуры на основании следующих рассуждений.

Установившемуся (базовому) состоянию реактора соответствует некоторое количество энергии, воспринятое твэлами. Этому количеству энергии соответствует базовое значение температуры твэлов  $\theta^0$ . При изменении энергии, содержащейся в твэлах, на некоторую величину  $Q_{\theta}$  температура твэлов изменится – вместо  $\theta^0$  она станет равной  $\theta$ . Энергия  $Q_{\theta}$  и температуры  $\theta$  и  $\theta^0$  связаны соотношением

$$Q_{\theta}(t) = C_{\theta}[\theta(t) - \theta^0], \quad (5.3)$$

где  $C_\theta$  – полная теплоемкость твэлов. Из уравнения (5.3) выразим производную, входящую в левую часть уравнения (5.2):

$$\frac{dQ_\theta(t)}{dt} = C_\theta \frac{d\theta(t)}{dt}. \quad (5.4)$$

Производная  $dQ_{\eta\theta}(t)/dt$  в правой части уравнения (5.2) есть мощность, отводимая от твэлов теплоносителем через поверхность их соприкосновения. Эта мощность равна

$$\frac{dQ_{\eta\theta}(t)}{dt} = k_{\eta\theta}[\theta(t) - \eta(t)], \quad (5.5)$$

где  $\eta(t)$  – температура теплоносителя,  $k_{\eta\theta}$  – коэффициент теплопередачи от твэлов к теплоносителю. Перепишем уравнение (5.2) с учетом соотношений (5.4) и (5.5):

$$T_\theta \frac{d\theta(t)}{dt} + \theta(t) = k_{\theta P} P(t) + \eta(t), \quad (5.6)$$

где  $T_\theta = C_\theta/k_{\eta\theta}$  – постоянная времени твэлов,  $k_{\theta P} = 1/k_{\eta\theta}$  – коэффициент передачи от мощности реактора к температуре твэлов. Уравнение (5.6) для базового (установившегося) состояния запишем в виде

$$T_\theta \frac{d\theta^0}{dt} + \theta^0 = k_{\theta P} P^0 + \eta^0, \quad (5.7)$$

где  $P^0$  – базовое значение мощности. Уравнение (5.7) записано в том же виде, что и уравнение (5.6), хотя ясно, что  $d\theta^0/dt = 0$ .

Вычитая уравнение (5.7) из уравнения (5.6), получим уравнение для отклонений переменных

$$T_\theta \frac{d\Delta\theta(t)}{dt} + \Delta\theta(t) = k_{\theta P} \Delta P(t) + \Delta\eta(t), \quad (5.8)$$

где  $\Delta\theta = \theta - \theta^0$ ,  $\Delta P = P - P^0$ ,  $\Delta\eta = \eta - \eta^0$  – отклонения переменных от их базовых значений.

Если в качестве входного сигнала мощностной обратной

связи рассматривать *относительное* отклонение мощности  $\Delta P(t)/P^0$ , то вместо уравнения (5.8) следует пользоваться уравнением (5.8.a):

$$T_{\theta} \frac{d\Delta\theta(t)}{dt} + \Delta\theta(t) = k_{\theta\delta P} \frac{\Delta P(t)}{P^0} + \Delta\eta(t), \quad (5.8.a)$$

где  $k_{\theta\delta P} = k_{\theta P} P^0$ .

Уравнения (5.8) и (5.8.a) соответствуют аperiodическому звену с передаточной функцией  $W_{\theta}(s) = 1/(T_{\theta}s + 1)$ . Сигналом на его выходе является отклонение температуры топлива  $\Delta\theta$ . В качестве входного сигнала следует принимать суммарный сигнал, записанный в правой части уравнения (5.8) или (5.8.a) (в зависимости от того, какое из этих уравнений используется).

Аналогично (исходя из условия теплового баланса) составим уравнение для средней температуры теплоносителя. За время  $dt$  через поверхность твэлов к теплоносителю передастся энергия

$$dQ_{\eta\theta}(t) = k_{\eta\theta}[\theta(t) - \eta(t)]dt. \quad (5.9)$$

Поскольку теплоноситель движется, то к этой энергии добавится порция энергии  $dQ_{\eta 1}(t)$ , вносимая за время  $dt$  порцией теплоносителя, поступающего на вход активной зоны. Обозначим объемный расход теплоносителя в секунду  $G_{\eta}$ , плотность теплоносителя  $\gamma_{\eta}$ , его удельную теплоемкость  $c_{\eta}$ , температуру теплоносителя на входе в активную зону  $\eta_1$ , а на выходе из нее  $\eta_2$ . Очевидно, что за время  $dt$  порция теплоносителя с массой  $G_{\eta}dt\gamma_{\eta}$  и температурой  $\eta_1$  будет внесена в активную зону. В то же время порция такой же массы, но с температурой  $\eta_2$  будет вынесена из активной зоны. Это означает, что из активной зоны будет отведена энергия, воспринятая этой порцией при нагревании ее от уровня  $\eta_1$  до уровня  $\eta_2$ . Эта порция энергии, отводимая от теп-

лоносителя, соприкасающегося с твэлами, равна

$$dQ_{\eta 21}(t) = c_{\eta} G_{\eta} dt \gamma_{\eta} [\eta_2(t) - \eta_1(t)]. \quad (5.10)$$

В реакторах на тепловых нейтронах часть тепловой энергии  $dQ_{v\eta}$  передается от теплоносителя к замедлителю:

$$dQ_{v\eta}(t) = k_{v\eta} [\eta(t) - v(t)] dt, \quad (5.11)$$

где  $v(t)$  – температура замедлителя,  $k_{v\eta}$  – коэффициент теплопередачи от теплоносителя к замедлителю.

Разность поступающей и отводимой энергии равна энергии  $dQ_{\eta}$ , воспринятой теплоносителем. В результате условие теплового баланса выразится уравнением

$$dQ_{\eta}(t) = dQ_{\eta\theta}(t) - dQ_{\eta 21} - dQ_{v\eta}(t). \quad (5.12)$$

Учитывая выражения (5.9) – (5.11), приведем уравнение (5.12) к следующему виду:

$$\frac{dQ_{\eta}(t)}{dt} = k_{\eta\theta} [\theta(t) - \eta(t)] - c_{\eta} G_{\eta} \gamma_{\eta} [\eta_2(t) - \eta_1(t)] - k_{v\eta} [\eta(t) - v(t)]. \quad (5.13)$$

Производная в левой части уравнения (5.13) равна

$$\frac{dQ_{\eta}(t)}{dt} = C_{\eta} \frac{d\eta(t)}{dt}, \quad (5.14)$$

где  $C_{\eta}$  – полная теплоемкость теплоносителя, окружающего твэлы. Формула (5.14) подобна формуле (5.4) и вытекает из рассуждений, аналогичных тем, что были приведены при написании формулы (5.3).

В первом приближении можно считать, что средняя температура теплоносителя  $\eta(t)$  есть среднеарифметическая величина от температур на входе в активную зону и на выходе из нее:

$$\eta(t) = \frac{\eta_1(t) + \eta_2(t)}{2}. \quad (5.15)$$

Из уравнения (5.15) выразим  $\eta_2(t) = 2\eta(t) - \eta_1(t)$  и подставим его

в уравнение (5.13). Подставим в уравнение (5.13) также выражение (5.14). В результате уравнение (5.13) примет вид:

$$T_{\eta} \frac{d\eta(t)}{dt} + \eta(t) = a_{\theta}\theta(t) + a_v v(t) + a_{\eta 1}\eta_1(t), \quad (5.16)$$

где постоянная времени  $T_{\eta}$  и коэффициенты передачи  $a_{\theta}$ ,  $a_v$ ,  $a_{\eta 1}$  равны

$$T_{\eta} = \frac{C_{\eta}}{\Sigma}, \quad a_{\theta} = \frac{k_{\eta\theta}}{\Sigma}, \quad a_v = \frac{k_{v\eta}}{\Sigma}, \quad a_{\eta 1} = \frac{2c_{\eta}G_{\eta}\gamma_{\eta}}{\Sigma},$$

$$\Sigma = k_{\eta\theta} + 2c_{\eta}G_{\eta}\gamma_{\eta} + k_{v\eta}.$$

Из уравнения (5.16) вытекает следующее уравнение для отклонений переменных:

$$T_{\eta} \frac{d\Delta\eta(t)}{dt} + \Delta\eta(t) = a_{\theta}\Delta\theta(t) + a_v\Delta v(t) + a_{\eta 1}\Delta\eta_1(t), \quad (5.17)$$

где  $\Delta\eta = \eta - \eta^0$ ,  $\Delta\theta = \theta - \theta^0$ ,  $\Delta v = v - v^0$ ,  $\Delta\eta_1 = \eta_1 - \eta_1^0$  – отклонения переменных от их базовых (установившихся) значений.

Из уравнения (5.17) следует, что отклонение температуры теплоносителя  $\Delta\eta$  можно рассматривать как сигнал на выходе апериодического звена с передаточной функцией  $W_{\eta}(s) = 1/(T_{\eta}s + 1)$ . При этом входной сигнал представляет собой сумму, записанную в правой части уравнения (5.17).

Полагаем, что вся энергия, переданная от теплоносителя к замедлителю, воспринимается замедлителем. Связь междуращениями температуры замедлителя и воспринятой им энергии выражается соотношением аналогичным формуле (5.4). Учитывая это, из формулы (5.11) получим следующее уравнение для отклонений переменных:

$$T_v \frac{d\Delta v(t)}{dt} + \Delta v(t) = \Delta\eta(t), \quad (5.18)$$

где  $T_v = C_v/k_{v\eta}$  – постоянная времени, равная отношению пол-

ной теплоемкости замедлителя  $C_v$ , к коэффициенту теплопередачи от теплоносителя к замедлителю  $k_{v\eta}$ . Формула (5.18) показывает, что  $\Delta v$  можно рассматривать как сигнал на выходе апериодического звена с передаточной функцией  $W_v(s) = 1/(T_v s + 1)$ , на вход которого подается сигнал  $\Delta \eta$ .

**Замечание.** Для быстрых реакторов, в которых замедлитель отсутствует, приведенные выше уравнения и параметры, относящиеся к замедлителю, следует относить к металлу активной зоны, который воспринимает тепло от теплоносителя.

Можно полагать, что отклонение температуры каждого из рассмотренных элементов активной зоны от базового значения этой температуры вызовет пропорциональное изменение реактивности, обусловленное этим отклонением температуры:

$$\Delta \rho_\theta = \alpha_\theta \Delta \theta, \quad \Delta \rho_\eta = \alpha_\eta \Delta \eta, \quad \Delta \rho_v = \alpha_v \Delta v. \quad (5.19)$$

Коэффициенты пропорциональности  $\alpha_\theta$ ,  $\alpha_\eta$ ,  $\alpha_v$  в соотношениях (5.19) называются температурными коэффициентами реактивности по соответствующей температуре.

Результирующее изменение реактивности  $\Delta \rho_T$ , обусловленное изменением температур элементов реактора, представим в виде суммы

$$\Delta \rho_T = \Delta \rho_\theta + \Delta \rho_\eta + \Delta \rho_v. \quad (5.20)$$

## 5.2. Мощностная обратная связь

Обратной связи, обусловленной разогревом активной зоны и описываемой уравнениями (5.8.a), (5.17) – (5.20), соответствует блок-схема на рис. 5.2.

На блок-схеме помечены передаточные функции:  $W_\theta = 1/(T_\theta s + 1)$  и  $W_\eta = 1/(T_\eta s + 1)$ , вытекающие из уравнений (5.8) и (5.17), и  $W_v = 1/(T_v s + 1)$ , соответствующая уравнению (5.18).



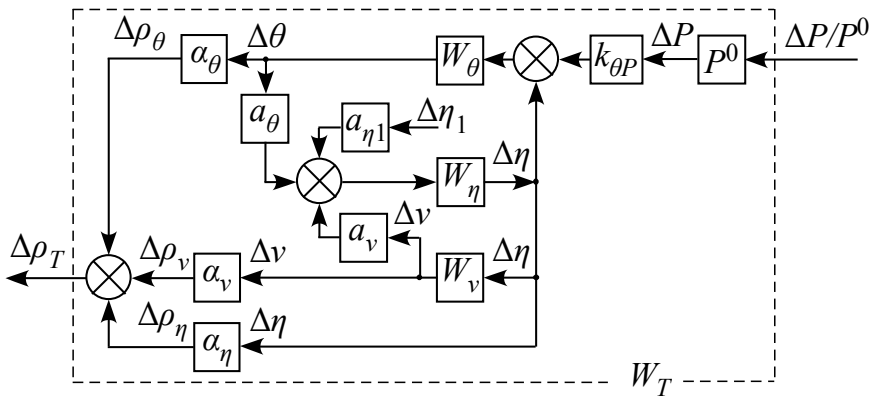


Рис. 5.2. Блок-схема мощностной обратной связи

Рис. 5.2 показывает, что даже упрощенный подход с использованием лишь усредненных по активной зоне температур приводит к непростой блок-схеме с переплетенными внутренними обратными связями.

Если считать, что температура теплоносителя на входе в активную зону поддерживается постоянной ( $\Delta\eta_1 = 0$ ), то приведенную на рис. 5.2 блок-схему можно преобразовать и представить в виде трех параллельных каналов, как показано на рис. 5.3.

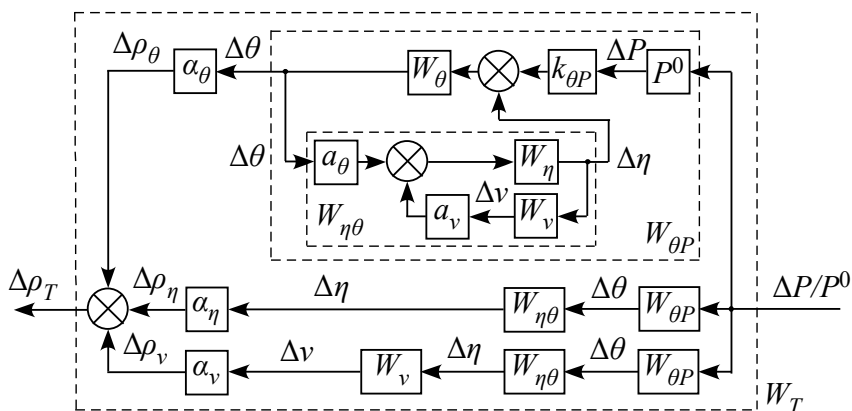


Рис. 5.3. Блок-схема мощностной обратной связи, полученная из блок-схемы на рис. 5.2 при условии  $\Delta\eta_1 = 0$

**Замечание.** Следует еще раз подчеркнуть, что не только полученные уравнения (5.8), (5.17) – (5.20) являются весьма гру-

бой оценкой влияния разогрева реактора на его реактивность. Кроме того, ряд параметров, входящих в эти уравнения, не являются константами, они зависят от температур, что вносит дополнительную неопределенность.

### 5.3. Предельно упрощенная модель мощностной обратной связи

Имея в виду приведенное выше замечание, уместно ограничиться рассмотрением предельно упрощенной модели мощностной обратной связи (МОС) в виде одного эквивалентного апериодического звена с передаточной функцией

$$W_T(s) = \frac{\Delta\rho_T(s)}{\Delta P(s)/P^0} = \frac{k_T}{T_T s + 1}, \quad (5.21)$$

где  $k_T$  и  $T_T$  – коэффициент передачи и постоянная времени упрощенной МОС соответственно. Использование такой модели МОС позволяет предельно наглядно отразить влияние обобщенного коэффициента передачи  $k_T$  и обобщенной постоянной времени  $T_T$  на частотные характеристики реактора и на переходные процессы в реакторе.

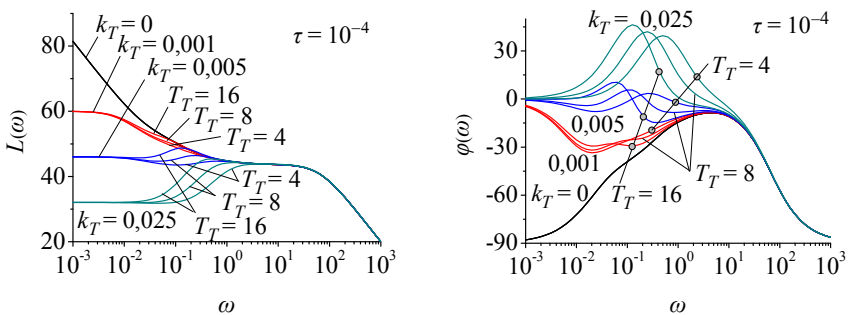


Рис. 5.4. Логарифмические амплитудные  $L(\omega)$  и фазовые  $\varphi(\omega)$  частотные характеристики реактора при различных значениях параметров  $k_T$  и  $T_T$  мощностной обратной связи, представленной в виде одного апериодического звена ( $L(\omega)$  в дБ,  $\varphi(\omega)$  в градусах,  $\omega$  в  $\text{с}^{-1}$ )

На рис. 5.4 приведены логарифмические амплитудные и фазовые частотные характеристики реактора на тепловых нейтронах с активной зоной из урана-235 при различных значениях параметров  $k_T$  и  $T_T$  упрощенной мощностной обратной связи. Эффективное время жизни мгновенных нейтронов принято равным  $\tau = 10^{-4}$  с.

На рис. 5.5 показаны переходные процессы мощности, вызванные скачком реактивности  $\Delta\rho_{RT} = 0,1$   $\beta = 0,00065$ , при двух значениях коэффициента передачи МОС и одинаковой постоянной времени МОС.

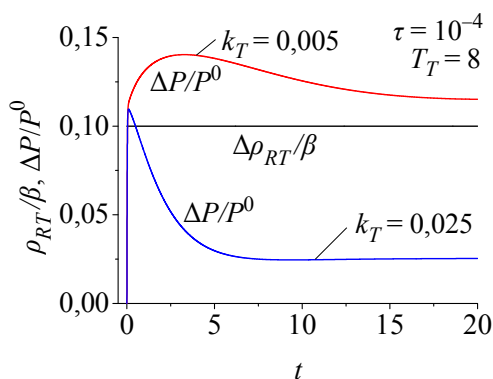


Рис. 5.5. Переходные процессы в реакторе при скачке реактивности  $\Delta\rho_{RT} = 0,1$   $\beta$  при различных значениях параметров МОС

Рис. 5.4 и 5.5 дают повод напомнить некоторые соответствия между различными характеристиками, рассмотренными в разделе, посвященном элементам теории управления.

Обратим внимание на вид логарифмических характеристик реактора при больших частотах. Из рис. 5.4 видно, что начиная с частоты примерно  $5 \cdot 10^{-1} \text{ с}^{-1}$  они совпадают вне зависимости от параметров МОС. Это означает, что на начальном этапе переходные процессы при разных параметрах МОС должны совпадать.

Рис. 5.5 подтверждает это соответствие.

Далее заметим, что при частоте, стремящейся к нулю, ЛАЧХ при наличии мощностной обратной связи выходят на некоторый постоянный уровень. Это означает, что при скачкообразном входном сигнале установившееся значение выходного сигнала равно передаточной функции при  $s = 0$  (или что то же самое, частотной передаточной функции при  $\omega = 0$ ), умноженной на величину входного сигнала. В нашем случае установившееся значение выходного сигнала определяется по формуле

$$\frac{\Delta P(t)}{P^0} \Big|_{t \rightarrow \infty} = s \frac{\Delta P(s)}{P^0} \Big|_{s \rightarrow 0} = s \frac{W_{R0}(s)}{1 + W_{R0}(s)W_T(s)} \frac{\Delta \rho_{RT}}{s} \Big|_{s \rightarrow 0} = \frac{\Delta \rho_{RT}}{k_T}$$

и равно 0,13 при  $k_T = 0,005$  и 0,026 при  $k_T = 0,025$ .

Теперь рассмотрим логарифмические характеристики во всем диапазоне частот. Мысленно заменим их приближенными предельно упрощенными характеристиками. Это позволит нам представить реактор в виде предельно малого набора звеньев. Обратим внимание на весьма выразительные логарифмические частотные характеристики реактора, соответствующие  $k_T = 0,025$  (рис. 5.4). Из их вида следует, что в первом приближении можно представить реактор в виде последовательного соединения форсирующего звена и двух аperiодических (здесь нам важно подчеркнуть наличие форсирующего звена). На возможность представить реактор набором таких же звеньев указывает и вид частотных характеристик, соответствующих  $k_T = 0,001$ . При  $k_T = 0,005$  присутствие форсирующего звена также просматривается, но не столь четко. Существенное отличие характеристик, соответствующих  $k_T = 0,025$  и  $k_T = 0,001$ , заключается в том, что при  $k_T = 0,025$  из всех звеньев наименьшую частоту сопряжения (т.е. наибольшую постоянную времени) имеет форсиру-

щее звено, а при  $k_T = 0,001$  – аperiodическое. В результате при большом коэффициенте передачи МОС ( $k_T = 0,025$ ) амплитудные характеристики имеют всплеск, т.е. ЛАЧХ достигают максимума не на низких, а на промежуточных частотах. Ранее при рассмотрении элементов теории управления указывалось, что из-за наличия нуля в передаточной функции (т.е. из-за наличия форсирующего звена) переходный процесс может иметь заметное перерегулирование, если постоянная времени форсирующего звена достаточно велика. К примеру, по ЛАЧХ, соответствующей  $k_T = 0,025$  и  $T_T = 8$  с (рис 5.4), оценим частоту сопряжения форсирующего звена. Она примерно равна  $10^{-1} \text{ с}^{-1}$ . Следовательно, постоянная времени форсирующего звена примерно равна 10 с, т.е. достаточно большая по сравнению с постоянными времени аperiodических звеньев. Соответствующий этим параметрам МОС переходный процесс мощности, показанный на рис. 5.5, действительно отличается большим перерегулированием. Чтобы подчеркнуть величину этого перерегулирования, на рис. 5.5 показан также переходный процесс при  $k_T = 0,005$ .

На рис 5.1 реактор ненулевой мощности представлен в виде замкнутой одноконтурной системы с отрицательной обратной связью. Для оценки устойчивости замкнутой системы удобно пользоваться критерием Найквиста. Для этого замкнутая система должна быть представлена в виде блока прямого канала, охваченного единичной отрицательной обратной связью. Критерий Найквиста позволяет судить об устойчивости замкнутой системы по частотным характеристикам разомкнутой системы. Поскольку обратная связь единичная, передаточная функция разомкнутой системы равна передаточной функции блока прямого канала. Для оценки устойчивости не имеет значения, какой сигнал в замкнутой системе выбрать в качестве выходного. В нашем случае в ка-

честве выходного сигнала удобно выбрать не относительное отклонение мощности, а реактивность на выходе блока мощностной обратной связи. Тогда передаточная функция разомкнутой системы примет наиболее простой вид:

$$W_{раз}(s) = W_{R0}(s)W_T(s).$$

На рис. 5.6 показаны логарифмические частотные характеристики разомкнутой системы. Фазовые характеристики располагаются выше линии  $-180^\circ$ . Следовательно, замкнутая система устойчива. Иначе говоря, реактор ненулевой мощности в режиме саморегулирования (т.е. без автоматического регулятора) устойчив.

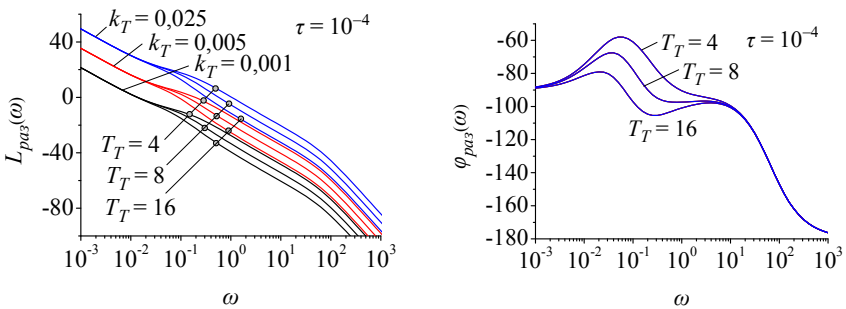


Рис. 5.6. Логарифмические амплитудные  $L_{раз}(\omega)$  и фазовые  $\varphi_{раз}(\omega)$  частотные характеристики разомкнутой системы при различных значениях параметров  $k_T$  и  $T_T$  мощностной обратной связи, представленной в виде одного аperiodического звена

$$(L_{раз}(\omega) \text{ в дБ, } \varphi_{раз}(\omega) \text{ в градусах, } \omega \text{ в } s^{-1})$$

#### 5.4. Обратная связь, обусловленная отравлением продуктами деления

Реакторам на тепловых нейтронах присуща одна особенность, не проявляющаяся в реакторах на быстрых и промежуточных нейтронах. Это отравление реактора продуктами деления урана-235. Наибольший вклад в процесс отравления вносят ядра

ксенона-135 ( $^{135}\text{Xe}$ ). Часть этих ядер образуется непосредственно в результате деления урана-235. Основная же часть ксенона-135 образуется по следующей цепочке. В результате деления урана-235 образуется теллур-135, который переходит с очень малым периодом полураспада (0,5 мин) в йод-135, а тот, в свою очередь, с большим периодом полураспада (6,7 час) переходит в ксенон-135. Одновременно происходит радиоактивный распад ксенона-135, но с существенно более длительным периодом полураспада (по цепочке ксенон – цезий – барий). В результате в реакторе, работающем на стабильном уровне мощности, устанавливается некоторая равновесная концентрация ксенона. Эта концентрация тем больше, чем больше уровень мощности, на котором длительное время работает реактор.

Суть отравления реактора на тепловых нейтронах заключается в том, что ксенон-135 является поглотителем нейтронов. Увеличение концентрации ксенона приводит к уменьшению коэффициента размножения, т.е. к уменьшению реактивности. Для работы реактора на стабильном уровне мощности реактивность должна поддерживаться на нулевом уровне. Следовательно, эффект уменьшения реактивности, обусловленный наличием ксенона, необходимо компенсировать эффектом увеличения реактивности посредством органов управления. Отсюда следует, что для того чтобы реактор мог работать не на нулевой, а на номинальной мощности масса топлива в нем должна превышать критическую массу.

Отметим еще одно необычное проявление эффекта отравления ксеноном.

Рассмотрим, что происходит при остановке реактора на тепловых нейтронах. Плотность нейтронов падает практически до нуля и убыль ксенона за счет поглощения им нейтронов прекра-

щается. В то же время в течение нескольких часов продолжает идти процесс по увеличению концентрации ядер ксенона-135 вследствие распада йода-135. Уменьшение же концентрации ксенона-135 за счет радиоактивного распада происходит существенно медленнее из-за длительного периода полураспада. Вследствие наложения процесса накопления и процесса распада ядер ксенона-135 концентрация ксенона после остановки реактора сначала увеличивается, достигая максимума примерно через 11 часов, а затем падает (рис. 5.7).

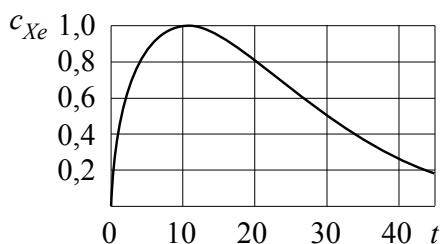


Рис. 5.7. Изменение концентрации ксенона  $c_{Xe}$  в относительных единицах после остановки реактора ( $t$  – время после остановки в часах)

Пик концентрации ксенона тем больше, чем больше была мощность, на которой работал реактор. Крайне важно то, что этот пик может превышать равновесный уровень концентрации ксенона во много раз. Таким образом, при остановке реактора его реактивность может уменьшаться до очень низкого уровня. Это может привести к тому, что в течение продолжительного времени после остановки реактор нельзя будет запустить вновь из-за невозможности достичь критической массы. Поясним это с помощью графика на рис. 5.7.

Предположим, что запас реактивности в реакторе таков, что им можно скомпенсировать отрицательный эффект отравления ксеноном, соответствующий той концентрации ксенона, которая достигается спустя 0,5 часа после остановки реактора. Из рис. 5.7



видно, что если не запустить реактор в течение этого получаса, то с данным запасом реактивности запустить реактор вновь можно будет лишь по прошествии примерно 40 часов после остановки.

Рис. 5.7 позволяет сделать еще один существенный вывод. Итак, при остановке реактора, иначе говоря, при отрицательном скачке мощности с некоторого уровня практически до нуля, концентрация ксенона сначала растет, а затем падает (рис. 5.7). Кривой изменения концентрации ксенона соответствует подобная кривая изменения реактивности, но с противоположным знаком: концентрация увеличивается – реактивность уменьшается и наоборот. Таким образом, отрицательному скачку мощности соответствует отрицательное изменение реактивности, при этом по модулю реактивность сначала увеличивается, а затем уменьшается. Это означает, что эффект отравления в первом приближении можно смоделировать введением блока обратной связи, состоящего из двух апериодических звеньев, соединенных параллельно, причем коэффициенты передачи этих звеньев должны иметь разные знаки. У звена с положительным коэффициентом передачи постоянная времени лежит в районе 5 часов, а у звена с отрицательным коэффициентом – в районе 30 часов. Эта достаточно грубая оценка постоянных времени позволяет, тем не менее, сделать принципиально важный вывод. Важно, что эти постоянные времени на несколько порядков больше как постоянных времени реактора нулевой мощности, так и постоянных времени мощностной обратной связи. В связи с этим можно не учитывать обратную связь, обусловленную отравлением ксенона, при анализе основного режима работы реактора – режима стабилизации мощности. Очень медленное изменение реактивности, обусловленное отравлением, будет без труда компенсироваться органами управления либо в автоматическом режиме (автоматическим регулятором и компенсирующими органами), либо оператором вручную.

## 6. РЕАКТОР С АВТОМАТИЧЕСКИМ РЕГУЛЯТОРОМ

На рис. 6.1 показана блок-схема автоматической системы “регулятор – реактор”, обеспечивающей основной режим работы: стабилизацию мощности реактора, т.е. поддержание мощности на заданном уровне. Заданный уровень мощности принят в качестве базового, относительно которого и была получена ранее передаточная функция реактора нулевой мощности  $W_{R0}(s)$ . На рис. 6.1 также указаны передаточные функции мощностной обратной связи  $W_T(s)$ , реактора с учетом мощностной обратной связи  $W_{RT}(s)$  и автоматического регулятора  $W_A(s)$ .

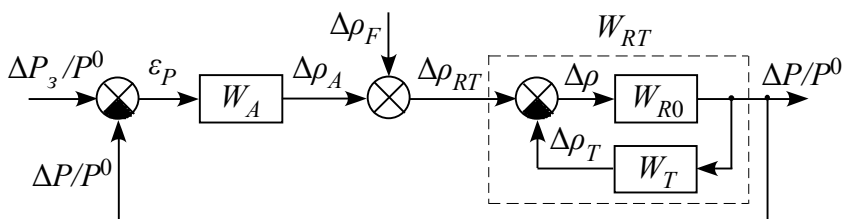


Рис. 6.1. Блок-схема стабилизации мощности реактора.

В качестве выходного сигнала системы принято относительное отклонение мощности от ее базового значения  $\Delta P/P^0 = (P - P^0)/P^0$ , где  $P$  и  $P^0$  – текущее и базовое значение мощности соответственно. В качестве входного сигнала системы принято задающее (желаемое) значение относительного отклонения мощности от ее базового значения  $\Delta P_3/P^0$ . Очевидно, для режима стабилизации  $\Delta P_3/P^0 = 0$ . На вход автоматического регулятора подается разность  $\varepsilon_P = \Delta P_3/P^0 - \Delta P/P^0$  (ошибка регулирования).

На рис. 6.1  $\Delta\rho$  – отклонение реактивности реактора нулевой

мощности от ее базового значения, а  $\Delta\rho$  с другими индексами – его составляющие. Для режима стабилизации базовые значения как суммарной реактивности, так и ее составляющих приняты нулевыми, поэтому значения отклонений и самих реактивностей совпадают. Учитывая это, для краткости вместо словосочетания “отклонение реактивности” будем говорить “реактивность”: реактивность мощностной обратной связи  $\Delta\rho_T$ , автоматического регулятора  $\Delta\rho_A$ , возмущающая реактивность  $\Delta\rho_F$  (вносимая извне), реактивность реактора ненулевой мощности  $\Delta\rho_{RT}$ .

Рис. 6.1 соответствует также и режиму автоматического перевода с уровня мощности  $P^0$  на новый уровень  $P_1$ , если разность этих уровней можно считать достаточно малой величиной по сравнению с  $P^0$ . В этом случае задающий сигнал  $\Delta P_3/P^0$  будет отличным от нуля, но по модулю существенно меньшим единицы (только при таком условии можно пользоваться передаточной функцией  $W_{R0}(s)$ ). После перехода на новый уровень мощности  $P_1$  при дальнейшем анализе режима стабилизации под базовым значением  $P^0$  следует понимать новое установившееся значение мощности  $P_1$ .

Указанные на рис. 6.1 входные сигналы (задающий  $\Delta P_3/P^0$  и возмущающий  $\Delta\rho_F$ ) приложены к разным точкам системы регулирования. Если отвлечься от физических представлений, то систему регулирования можно представить в ином виде (рис. 6.2). Относительно выходного и входных сигналов системы на рис. 6.1 и 6.2 эквивалентны.

На рис. 6.2 возмущающий сигнал после прохождения через дополнительный блок с передаточной функцией  $1/W_A$  подается на ту же точку, что и задающий сигнал, т.е. на вход замкнутой

системы с *единичной* отрицательной обратной связью. Так если  $W_A = k_A/s$ , а  $\Delta\rho_F(t) = R 1(t)$ , т.е. возмущающий сигнал изменяется скачком на величину  $R$ , то это эквивалентно подаче на вход замкнутой системы с единичной обратной связью единичного импульса увеличенного в  $R/k_A$  раз:  $\Delta\tilde{\rho}_F = \delta(t) R/k_A$ .

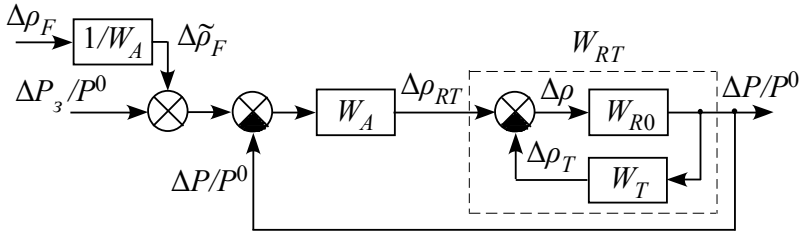


Рис. 6.2. Блок-схема эквивалентная схеме на рис. 6.1

Будем рассматривать два варианта автоматического регулятора: в виде интегрирующего звена (наиболее простой вид) и в виде последовательного соединения интегрирующего и апериодического звена. В первом варианте передаточная функция регулятора равна  $W_A(s) = k_A/s$ , а во втором  $W_A(s) = k_A/[s(T_A s + 1)]$ , где  $k_A$  и  $T_A$  – соответственно коэффициент передачи и постоянная времени регулятора. Введение апериодического звена во втором варианте позволяет отразить запаздывание сигнала в регуляторе. Таким образом, первый вариант есть частный случай второго, больше приближенного к реальности.

Передаточную функцию мощностной обратной связи возьмем равной  $W_T(s) = k_T/(T_T s + 1)$  (апериодическое звено).

Наличие интегрирующего звена в регуляторе делает систему регулирования астатической. В такой системе при изменении реактивности скачком на величину  $R$ , т.е. при  $\Delta\rho_F(t) = R 1(t)$ , установившаяся ошибка регулирования будет равна нулю. Действительно, согласно теореме о конечном значении

$$\begin{aligned} \varepsilon_P(t \rightarrow \infty) &= [s \varepsilon_P(s)]_{s \rightarrow 0} = \\ &= \left[ s W_{\varepsilon_{\rho_F}}(s) \frac{R}{s} \right]_{s \rightarrow 0} = \left[ \frac{-W_{RT}(s)}{1 + W_{RT}(s)W_A(s)} R \right]_{s \rightarrow 0}. \end{aligned}$$

При  $s \rightarrow 0$   $W_{RT}(s) \rightarrow 1/k_T$ , а  $W_A(s) \rightarrow \infty$ . В результате получим  $\varepsilon_P(t \rightarrow \infty) = 0$ .

Тот же результат получим и при мощностной обратной связи, представленной в виде последовательного соединения аperiodических звеньев (а также, возможно, и колебательных) и форсирующих звеньев. При  $s \rightarrow 0$  передаточная функция такой обратной связи равна  $W_T(s) = k_T \frac{(T_{T0}s + 1)(\dots)}{(T_{T1}s + 1)(\dots)(\dots)}$  стремится к  $k_T$  (как и в случае  $W_T$  в виде аperiodического звена). Таким образом, установившаяся ошибка регулирования получается нулевой и для более сложного вида мощностной обратной связи.

Если автоматический регулятор не будет содержать интегрирующего звена, то получим статическую систему регулирования, в которой  $\varepsilon_P(t \rightarrow \infty) \neq 0$ . Так если  $W_A(s) = k_A/(T_A s + 1)$  или  $W_A(s) = k_A/(T_A^2 s^2 + 2\xi T_A s + 1)$ , то при  $s \rightarrow 0$   $W_A(s) \rightarrow k_A$  и

$$\begin{aligned} \varepsilon_P(t \rightarrow \infty) &= [s \varepsilon_P(s)]_{s \rightarrow 0} = [s W_{\varepsilon_{\rho_F}}(s) R/s]_{s \rightarrow 0} = \\ &= \left[ \frac{-W_{RT}(s)}{1 + W_{RT}(s)W_A(s)} R \right]_{s \rightarrow 0} = \frac{-1/k_T}{1 + (1/k_T)k_A} R = \frac{-R}{k_T + k_A} \neq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, автоматический регулятор, содержащий интегрирующее звено, представляется более целесообразным.

Для примера оценим влияние параметров двух вариантов автоматического регулятора и мощностной обратной связи на динамику теплового уранового реактора с эффективным временем жизни мгновенных нейтронов  $\tau = 10^{-4}$  с. Мощностную обратную связь представим предельно просто – в виде аperiodического звена с передаточной функцией  $W_T(s) = k_T/(T_T s + 1)$ . По-

стоянную времени примем равной  $T_T = 8$  с, а коэффициенту передачи  $k_T$  будем придавать различные значения.

Напомним, что об устойчивости замкнутой системы с единичной отрицательной обратной связью удобно судить по логарифмическим частотным характеристикам разомкнутой системы. Для рассматриваемой замкнутой системы (рис. 6.1, 6.2) передаточная функция разомкнутой системы равна

$$W_{раз}(s) = W_A(s)W_{RT}(s).$$

Сначала рассмотрим систему с автоматическим регулятором в виде интегрирующего звена с передаточной функцией  $W_A(s) = k_A/s$ .

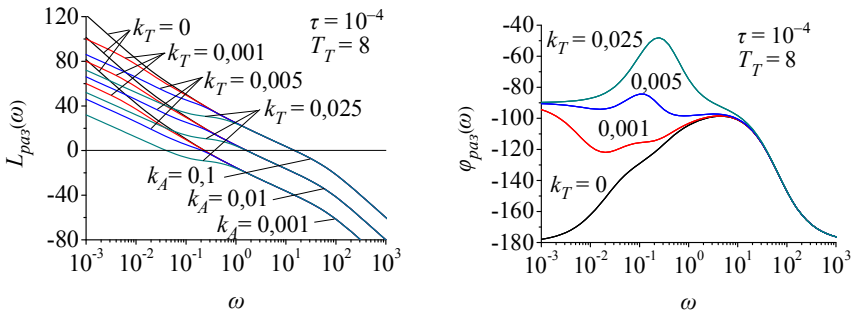


Рис. 6.3. Логарифмические амплитудная  $L_{раз}(\omega)$  и фазовая  $\varphi_{раз}(\omega)$  частотные характеристики разомкнутой системы, соответствующие замкнутой системе “регулятор – реактор” с регулятором в виде интегрирующего звена ( $L_{раз}$  в дБ,  $\varphi_{раз}$  в градусах,  $\omega$  в  $\text{с}^{-1}$ ,  $\tau$  и  $T_T$  в с,  $k_A$  в  $\text{с}^{-1}$ )

Логарифмические частотные характеристики разомкнутой системы показаны на рис. 6.3. Они соответствуют различным значениям коэффициентов передачи мощностной обратной связи и регулятора. При всех значениях параметров во всем диапазоне частот  $\omega$  логарифмическая фазовая частотная характеристика

разомкнутой системы располагается выше уровня  $-180^\circ$ , т.е.  $\varphi_{раз}(\omega) > -\pi$ . Следовательно, замкнутая система устойчива.

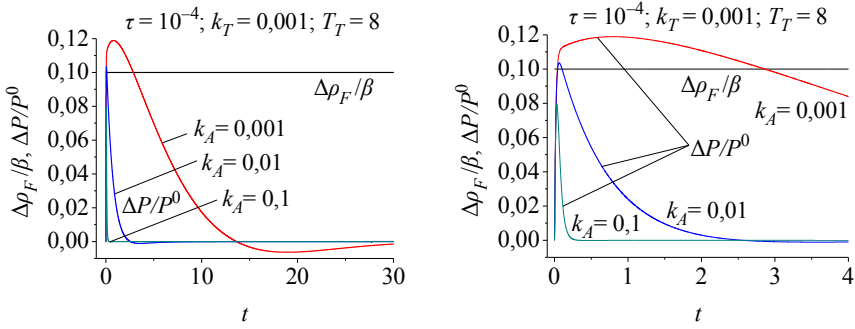


Рис. 6.4. Влияние коэффициента передачи регулятора в виде интегрирующего звена на переходные процессы мощности при скачке реактивности ( $t$  – время в с)

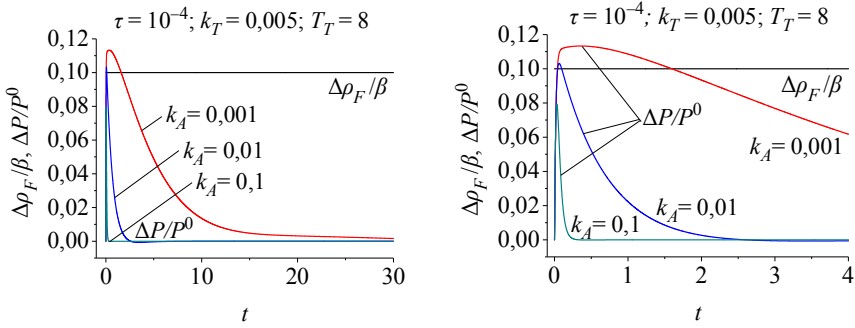


Рис. 6.5. То же, что и рис. 6.4, но при большем коэффициенте передачи мощностной обратной связи  $k_T$

На рис. 6.4 и 6.5 показаны переходные процессы относительного отклонения мощности  $\Delta P/P^0$  при скачкообразном увеличении реактивности ( $\Delta\rho_F = 0,1\beta$ ). До скачка реактивности реактор работал на стабильном уровне ( $\Delta P/P^0 = 0$ ). Рис. 6.4 соответствует коэффициенту передачи мощностной обратной связи  $k_T = 0,001$ , а рис. 6.5 – большему коэффициенту передачи  $k_T = 0,005$ . Справа показаны те же процессы, что и слева, но в

ином масштабе времени.

В разделе, в котором рассматривались элементы теории управления, отмечалась связь характера переходного процесса в *замкнутой* системе с видом логарифмической амплитудной частотной характеристикой (ЛАЧХ) *разомкнутой* системы в районе частоты среза (частоты, при которой ЛАЧХ пересекает ось частот). Проследим эту связь по рис. 6.3–6.5.

Обратим внимание на вид ЛАЧХ (рис. 6.3) в районе частоты среза при коэффициенте передачи регулятора  $k_A = 0,1$  и  $k_A = 0,01$ , а также при  $k_A = 0,001 \text{ с}^{-1}$ .

Посмотрим сначала на ЛАЧХ при  $k_A = 0,1$ . Во-первых, в районе частоты среза (причем в широком диапазоне) ЛАЧХ, соответствующие  $k_T = 0,001$  и  $k_T = 0,005$ , практически совпадают. Во-вторых, ЛАЧХ в этом районе имеют наклон примерно равный  $-20$  дБ/дек. При таком характере ЛАЧХ разомкнутой системы следует ожидать, что выходные сигналы в замкнутой системе для обоих значений  $k_T$ , во-первых, практически не будут отличаться, а во-вторых, при скачкообразном или импульсном входном сигнале они будут иметь экспоненциальный характер.

То же относится и к случаю, когда  $k_A = 0,01 \text{ с}^{-1}$ .

Отметим также, что частота среза при  $k_A = 0,1 \text{ с}^{-1}$  больше, чем при  $k_A = 0,01 \text{ с}^{-1}$ . Это означает, что при  $k_A = 0,1$  переходные процессы будут протекать быстрее, чем при  $k_A = 0,01$ .

Переходные процессы на рис. 6.4 и 6.5 подтверждают эти связи между ЛАЧХ разомкнутой системы и переходными процессами замкнутой системы.

Теперь посмотрим на ЛАЧХ при  $k_A = 0,001 \text{ с}^{-1}$ . Левее частоты среза наклон ЛАЧХ для  $k_T = 0,005$  близок к  $-20$  дБ/дек, а



для  $k_T = 0,001$  он заметно круче. В связи с этим следует ожидать, что при  $k_T = 0,001$  переходный процесс будет иметь колебательный характер. На рис. 6.4 переходный процесс, соответствующий  $k_A = 0,001 \text{ с}^{-1}$  и  $k_T = 0,001$ , действительно, имеет слабо колебательный характер с незначительным отрицательным выбросом.

Теперь рассмотрим автоматический регулятор в виде последовательного соединения аperiodического и интегрирующего звена с передаточной функцией  $W_A(s) = k_A / [s(T_A s + 1)]$ .

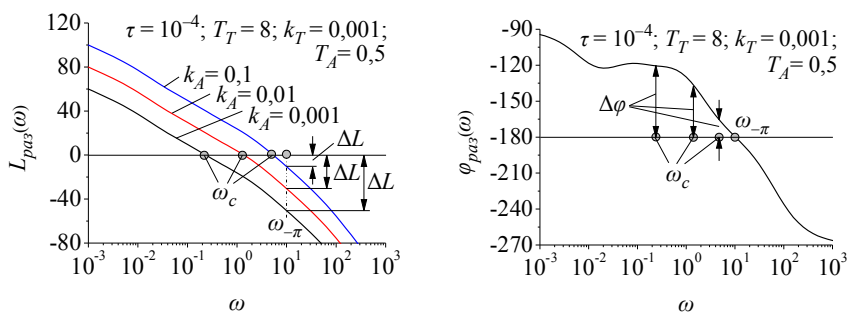


Рис. 6.6. Логарифмические амплитудная  $L_{pas}(\omega)$  и фазовая  $\varphi_{pas}(\omega)$  частотные характеристики разомкнутой системы, соответствующие замкнутой системе “регулятор – реактор” с регулятором в виде интегрирующего звена совместно с аperiodическим ( $L_{pas}$  в дБ,  $\varphi_{pas}$  в градусах,  $\omega$  в  $\text{с}^{-1}$ ,  $\tau$ ,  $T_T$  и  $T_A$  в с,  $k_A$  в  $\text{с}^{-1}$ )

На рис. 6.6 для одного из наборов параметров мощностной обратной связи ( $T_T = 8 \text{ с}$ ,  $k_T = 0,001$ ) показаны логарифмические частотные характеристики разомкнутой системы. Постоянная времени аperiodического звена регулятора принята равной  $T_A = 0,5 \text{ с}$ . Рис. 6.6 показывает, что при указанных значениях коэффициента передачи регулятора  $k_A$  замкнутая система устойчива, но с ростом  $k_A$  запас и по амплитуде  $\Delta L$ , и по фазе  $\Delta\varphi$  уменьшаются. При  $k_A = 0,1 \text{ с}^{-1}$  замкнутая система приближается

к границе устойчивости, запасы по амплитуде и фазе составляют примерно 10 дБ и  $15^\circ$  соответственно.

На рис. 6.7 показаны переходные процессы мощности при скачке реактивности  $\Delta\rho_F = 0,1\beta$ . Рис. 6.7 иллюстрирует влияние на переходные процессы не только коэффициента передачи регулятора, но и постоянной времени апериодического звена входящего в регулятор. Переходные процессы слева соответствуют постоянной времени регулятора:  $T_A = 0,2$  с, а справа –  $T_A = 0,5$  с. Параметры мощностной обратной связи одинаковые ( $T_T = 8$  с,  $k_T = 0,001$ ).

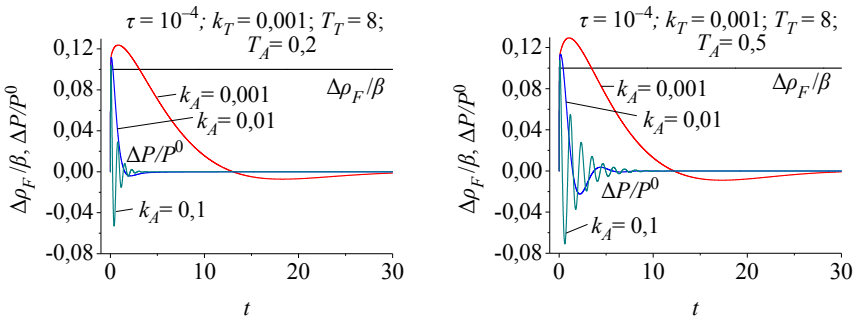


Рис. 6.7. Влияние коэффициента передачи и постоянной времени регулятора на переходные процессы мощности при скачке реактивности ( $t$  – время в с)

И здесь проследим связь между переходными процессами в замкнутой системе и логарифмическими амплитудными частотными характеристиками (ЛАЧХ) разомкнутой системы (рис. 6.7 справа и рис. 6.6). Из рис. 6.6 видно, что с ростом  $k_A$  от 0,001 до  $0,1 \text{ с}^{-1}$  наклон ЛАЧХ в районе частоты среза увеличивается (по модулю) примерно от  $-20$  до  $-40$  дБ/дек. Это значит, что при увеличении  $k_A$  переходные процессы будут становиться все более колебательными, иначе говоря, степень их затухания с ростом  $k_A$  будет уменьшаться. Кроме того, с увеличением  $k_A$  увеличи-

вается и частота среза. Это значит, что с увеличением коэффициента передачи регулятора будет увеличиваться частота колебаний. Рис. 6.7 подтверждает указанные соответствия.

Тот же характер переходных процессов (хотя и в меньшей степени) наблюдается и при  $T_A = 0,2$  с (рис. 6.7, слева).

## 7. ИМПУЛЬСНЫЙ БЫСТРЫЙ РЕАКТОР ПЕРИОДИЧЕСКОГО ДЕЙСТВИЯ ИБР-2

Импульсный реактор на быстрых нейтронах периодического действия ИБР-2 является уникальным по принципу действия, по конструкции, по параметрам. Реактор генерирует узкие импульсы мощности с периодом  $T = 0,2$  с. Амплитуды импульсов мощности  $P_m$  почти на три порядка больше средней мощности за период  $\bar{P}$  ( $\bar{P} = 2$  МВт,  $P_m = 1500$  МВт). Топливом служит двуокись плутония, теплоносителем – жидкий натрий.

Импульсный реактор подвержен существенным возмущениям реактивности и очень чувствителен к этим возмущениям. Флуктуации амплитуд импульсов мощности достигают  $\pm 40\%$  в режиме стабилизации (для сравнения: флуктуации мощности стационарного реактора с урановым топливом в 20 раз меньше). Аварийная защита срабатывает при отклонении средней мощности на  $\pm 20\%$ , а также при отклонении амплитуды импульса мощности на  $+100$  и  $-50\%$  от заданных значений. При срабатывании аварийной защиты реактивность за  $0,2$  с уменьшается так, что следующий импульс мощности не возникает.

По сравнению со стационарным реактором режим работы импульсного реактора можно назвать экстремальным. В связи с этим динамика конкретного импульсного реактора представляет несомненный интерес.

## 7.1. Конструкция и принцип действия

Активная зона имеет форму вертикальной шестигранной призмы. Все грани призмы кроме одной окружены отражателями, которые могут перемещаться в вертикальном направлении, в той или иной степени приоткрывая активную зону и, тем самым, изменяя плотность нейтронов в активной зоне вследствие изменения утечки нейтронов из нее. Эти отражатели играют роль органов управления и защиты: компенсирующих органов, автоматического регулятора, промежуточного регулятора и аварийной защиты, обеспечивающей прекращение цепной реакции. Компенсирующие органы компенсируют выгорание топлива и отрицательную реактивность обратной связи, обусловленную разогревом реактора. Автоматический регулятор поддерживает мощность на заданном уровне. Промежуточный регулятор включается оператором для компенсации медленных уходов реактивности с тем, чтобы автоматический регулятор не выходил из своей средней зоны, где его реактивность зависит от перемещения практически линейно.

Мимо свободной грани проходит подвижный отражатель, который состоит из двух стальных лопастей (рис. 7.1). Лопастей вращаются в противоположные стороны с разными скоростями в кожухе, заполненном гелием. Скорость основного подвижного отражателя 600 об/мин, дополнительного – 300 об/мин.

Когда лопасти проходят мимо активной зоны одновременно, создается импульс реактивности. В штатном режиме положение органов управления таково, что реактор в течение  $\sim 400$  мкс находится в надкритическом состоянии на мгновенных нейтронах. В течение этого времени происходит стремительный рост мощности. Когда лопасти отходят от активной зоны реактивность резко уменьшается, реактор становится глубоко подкритическим, мощность реактора стремительно падает (рис. 7.2).

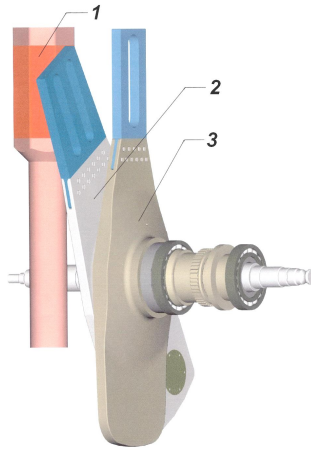


Рис. 7.1. Подвижный отражатель реактора ИБР-2 (1 – активная зона реактора, 2 и 3 – основной и дополнительный подвижный отражатель соответственно)

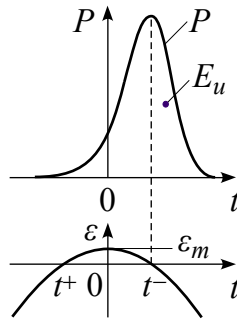


Рис. 7.2. Импульс мощности ( $P$ ) и верхняя часть импульса реактивности на мгновенных нейтронах ( $\varepsilon$ ).  $E_u$  – энергия импульса мощности,  $t$  – время,  $t^+ \div t^-$  – интервал надкритичности,  $\varepsilon_m$  – максимальное значение реактивности на мгновенных нейтронах

Эффективность подвижного отражателя  $\Delta k_{ПО}$  (т.е. обусловленное подвижным отражателем изменение реактивности от максимума до минимума) очень большая (до модернизации реактора  $\Delta k_{ПО} = 0,025$ , сейчас  $\Delta k_{ПО} = 0,03$ , т.е. 3%). Поэтому между импульсами мощности состояние реактора глубоко подкритическое. При прохождении мимо активной зоны только основного подвижного отражателя создаются побочные импульсы реактивности малой амплитуды, не оказывающие существенного влия-

ния на работу реактора (реактор остается глубоко подкритическим). В результате реактор генерирует очень узкие импульсы мощности. Ширина импульса мощности на половине высоты равна  $\sim 250$  мкс, период же импульсов равен 0,2 с. Поэтому при моделировании импульсы мощности удобно полагать идеальными (бесконечно узкими). Амплитуды импульсов мощности превышают среднюю мощность реактора почти на три порядка, мощность между импульсами (мощность фона) на порядок меньше средней мощности (рис. 7.3). В импульсах мощности выделяется 92% генерируемой реактором энергии, между импульсами лишь 8%.

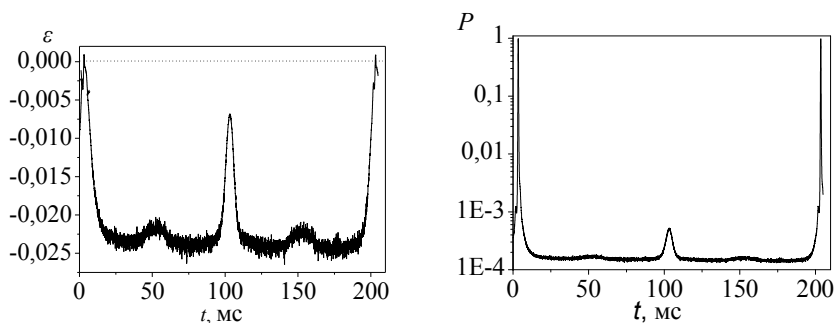


Рис. 7.3. Изменение во времени  $t$  реактивности на мгновенных нейтронах  $\square$  и мощности  $P$  между соседними импульсами мощности при средней мощности 1,35 МВт ( $\square$  – в абсолютных единицах,  $P$  – в относительных,  $t$  – в мс)

В процессе эксплуатации реактора (реактор работает с 1984 г.) подвижный отражатель усовершенствовался. Так, до 2003 г. оба отражателя вращались в одну сторону. Скорость основного подвижного отражателя составляла 1500 об/мин, вследствие чего между основными импульсами реактивности создавалось 4 побочных импульса, а не один как сейчас.

## 7.2. Исходные уравнения кинетики. Допущения при описании мощности

Повторим выраженные через реактивность уравнения кин-

тики (2.57) и (2.58):

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\rho - \beta}{\tau} n + \sum_{i=1}^{N_i} \lambda_i C_i + S_{вн}, \quad (2.57)$$

$$\frac{dC_i}{dt} = \frac{\beta_i}{\tau} n - \lambda_i C_i, \quad (2.58)$$

где  $n$  – плотность нейтронов в реакторе;  $\rho$  – реактивность;  $N_i$  – количество групп запаздывающих нейтронов;  $\beta_i$ ,  $\beta$  – соответственно доля запаздывающих нейтронов группы  $i$  и суммарная;  $C_i$ ,  $\lambda_i$  – соответственно концентрация и постоянная распада источников запаздывающих нейтронов группы  $i$ ;  $S_{вн}$  – интенсивность постоянного источника нейтронов (внешнего источника);  $\tau$  – эффективное время жизни мгновенных нейтронов;  $t$  – время.

В уравнениях (2.57) и (2.58) сделаем замену переменных: от плотности нейтронов перейдем к мощности и от интенсивности источников нейтронов к нормированной интенсивности, выраженной в единицах мощности. В результате уравнения кинетики примут следующий вид:

$$\frac{\tau}{\beta} \frac{dP}{dt} = \frac{\varepsilon}{\beta} P + S + S_c, \quad (7.1)$$

$$S = \sum_i S_i, \quad (7.2)$$

$$\frac{1}{\lambda_i} \frac{dS_i}{dt} + S_i = \mu_i P, \quad (7.3)$$

где  $P = k_n n$  – мощность реактора ( $k_n$  – коэффициент пропорциональности между мощностью и плотностью нейтронов);  $\varepsilon = \rho - \beta$  – реактивность на мгновенных нейтронах;  $S_c = k_n \tau S_{вн} / \beta$ ,  $S_i = k_n \tau \lambda_i C_i / \beta$ ,  $S = \sum_i S_i$  – нормированная интенсивность соответственно постоянного источника нейтронов, источников запаздывающих нейтронов группы  $i$  и суммарная.

**Замечание.** Дифференциальное уравнение (7.1) нелинейное из-за произведения реактивности и мощности. Дифференциальное уравнение (7.3) линейное. Оно соответствует апериодическому звену с коэффициентом передачи  $\mu_i$  и постоянной времени  $1/\lambda_i$ . Входным сигналом этого апериодического звена является мощность  $P$ , а выходным – нормированная интенсивность источников запаздывающих нейтронов  $i$ -й группы  $S_i$ . Суммарную интенсивность  $S$  можно рассматривать согласно уравнению (7.2) как результирующий сигнал на выходе блока запаздывающих нейтронов, состоящего из  $N_i$  параллельно соединенных апериодических звеньев (например, шести или восьми).

В качестве базового режима работы реактора принят режим с установившимися (в среднем) амплитудами импульсов мощности (*равновесное состояние*). Параметры, соответствующие этому режиму будем помечать верхним индексом 0.

**Энергия фона.** Мощность фона получим из уравнения (7.1), полагая  $dP/dt \approx 0$ :

$$P_\phi = \frac{\beta}{-\varepsilon_\phi} (S + S_c). \quad (7.4)$$

Здесь  $\varepsilon_\phi$  – реактивность фона равная

$$\varepsilon_\phi = \varepsilon_m - \Delta k_{ПО}, \quad (7.5)$$

где  $\varepsilon_m$  – максимум реактивности в импульсе;  $\Delta k_{ПО}$  – эффективность подвижного отражателя. Энергию фона получим, умножая мощность фона на период импульсов мощности  $T_u$ :

$$E_\phi = P_\phi T_u = \frac{\beta T_u}{\Delta k_{ПО} - \varepsilon_m} (S + S_c). \quad (7.6)$$

Поскольку  $\Delta k_{MR}$  много больше, чем  $\varepsilon_m^0$  (более чем на порядок), а  $\varepsilon_m^0$  существенно больше, чем возможные отклонения  $\varepsilon_m$



от базового значения  $\varepsilon_m^0$ , то формулу (7.6) можно упростить:

$$E_{\phi} = P_{\phi} T_u = \frac{\beta T_u}{\Delta k_{ПО} - \varepsilon_m^0} (S + S_c). \quad (7.6.a)$$

Далее будет использоваться именно эта упрощенная формула.

Между импульсами выделяется лишь 8% от всей энергии реактора. Поэтому допустимо следующее упрощение: считаем, что энергия фона выделяется не непрерывно, а в виде бесконечно узких импульсов, совмещенных с импульсами мощности.

**Энергия импульса мощности** выражается формулой

$$E = M(S + S_c), \quad (7.7)$$

где  $M$  – импульсный коэффициент передачи (импульсное умножение),  $S + S_c$  – суммарная нормированная интенсивность источников нейтронов перед импульсом реактивности.  $M$  имеет размерность времени (с), так как согласно уравнениям (7.1)–(7.3)  $S_i$ ,  $S$  и  $S_c$  выражаются в тех же единицах, что и мощность  $P$ .

**Импульсный коэффициент передачи  $M$**  (рис. 7.4), вычисленный по уравнениям (7.1)–(7.3) и (7.7), является нелинейной функцией от максимума реактивности в импульсе  $\varepsilon_m$  (рис. 7.2).

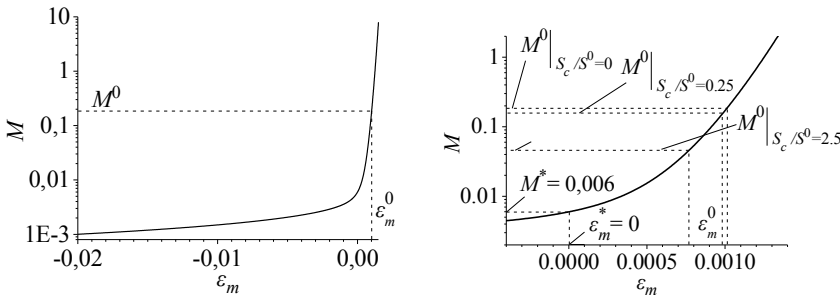


Рис. 7.4 Импульсный коэффициент передачи  $M$  как функция  $\varepsilon_m$  в широком диапазоне (слева) и в узком диапазоне (справа)

Рис. 7.4 соответствует параметрам запаздывающих нейтронов, приведенным в табл.2.3, эффективному времени жизни мгновен-

ных нейтронов  $\tau = 6,5 \cdot 10^{-8}$  с и эффективности подвижного отражателя  $\Delta k_{ПО} = 0.03$  (при  $\Delta k_{ПО} = 0.025$  получается практически та же функция  $M = f(\varepsilon_m)$ , что и при  $\Delta k_{ПО} = 0.03$ ).

На рис. 7.4 помечены базовые значения  $M^0$  и  $\varepsilon_m^0$ . Базовое значение  $M^0$  вычислено из тождества

$$M^0 = \frac{E_u^0}{S^0 + S_c} = \frac{E_u^0 + E_\phi^0}{S^0} \frac{S^0}{S^0 + S_c} - \frac{E_\phi^0}{S^0 + S_c} \quad (7.8)$$

и уравнений (7.2), (7.3), (7.6.а):

$$M^0 = \frac{E_u^0}{S^0 + S_c} = AB - C, \quad (7.9)$$

где

$$A = \frac{E_u^0 + E_\phi^0}{S^0} = \frac{1}{\sum_i \mu_i \lambda_i \frac{1}{e^{\lambda_i T} - 1}}, \quad B = \frac{S^0}{S^0 + S_c} = \frac{1}{1 + \frac{S_c}{S^0}},$$

$$C = \frac{E_\phi^0}{S^0 + S_c} = \frac{\beta T_u}{\Delta k_{ПО} - \varepsilon_m^0}. \quad (7.10)$$

Мгновенной критичности ( $\varepsilon_m = \varepsilon_m^* = 0$ ) соответствует  $M = M^* = 0.006$ . Значения  $M = M^0$  и  $\varepsilon_m = \varepsilon_m^0$ , соответствующие импульсной критичности, зависят от доли постоянного источника нейтронов относительно источника запаздывающих нейтронов  $S_c/S^0$ , т.е. зависят от средней мощности реактора. Так, при  $S_c/S^0 = 2.5$  (что соответствует средней мощности реактора  $\bar{P} \approx 0.01$  Вт)  $M^0 = 0.0445$  и  $\varepsilon_m^0 = 0.00076$ . При  $S_c/S^0 = 0.25$  (т.е. при средней мощности  $\sim 0,1$  Вт)  $M^0 = 0.151$  и  $\varepsilon_m^0 = 0.00098$ . При мощностях превышающих 1Вт  $S_c/S^0 \approx 0$ . Для таких мощ-

ностей  $M^0 = 0.193$  и  $\varepsilon_m^0 = 0.00102$ , как и для штатного режима.

**Полная энергия**  $E$  за период импульсов  $T_u$  равна сумме

$$E = E_u + E_\phi. \quad (7.11)$$

Ее базовое значение  $E^0$  и базовое значение средней мощности реактора  $\bar{P}^0$  связаны очевидным соотношением

$$E^0 = \bar{P}^0 T_u. \quad (7.12)$$

**Регистрируемым параметром** реактора является относительная амплитуда импульса мощности. Из-за высокой точности поддержания скорости вращения подвижного отражателя она практически равна относительной энергии импульса мощности  $E_u/E_u^0$ . При исследовании динамики реактора в качестве **регулируемого параметра** используется *относительное отклонение* энергии импульса мощности от его базового значения

$$\Delta e_u = \frac{\Delta E_u}{E_u^0} = \frac{E_u - E_u^0}{E_u^0} = \frac{E_u}{E_u^0} - 1.$$

**Мощность реактора как функция времени** представлена, как отмечено выше, в виде последовательности идеальных импульсов, в которых выделяется вся генерируемая реактором энергия, а между импульсами никакой энергии не выделяется. При таком представлении полная мощность реактора  $P^*(t)$  и ее составляющие (мощность импульсов  $P_u^*(t)$  и мощность фона  $P_\phi^*(t)$ ) как функции времени математически описываются так:

$$P^*(t) = P_u^*(t) + P_\phi^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \delta(t - nT_u),$$

$$P_u^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} E_{un} \delta(t - nT_u), \quad P_\phi^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} E_{\phi n} \delta(t - nT_u), \quad (7.13)$$

где  $E_n = E_{un} + E_{fn}$  – энергия, выделяемая в  $n$ -м импульсе мощности и в интервале между  $(n-1)$ -м и  $n$ -м импульсами (полная энергия  $n$ -го периода);  $E_{un}$  – энергия  $n$ -го импульса,  $E_{fn}$  – энергия фона, выделяемая в интервале между  $(n-1)$ -м и  $n$ -м импульсами;  $T_u$  – период импульсов;  $\delta(t - nT_u)$  – дельта-функция равная 0 при  $t \neq nT_u$  и  $\infty$  при  $t = nT_u$ , причем  $\int_0^{\infty} \delta(t - nT_u) dt = 1$ .

Иначе говоря,  $E_{un}$  – площадь  $n$ -го импульса мощности, а  $E_n$  и  $E_{fn}$  – соответственно площадь  $n$ -го импульса полной мощности и  $n$ -го импульса фона (напомним, в целях упрощения уравнений кинетики мы приняли, что мощность фона имеет не непрерывный характер, а импульсный). Уравнениям (7.13) для полных переменных соответствуют аналогичные уравнения для отклонений переменных от их базовых значений:

$$\Delta P^*(t) = \Delta P_u^*(t) + \Delta P_\phi^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta E_n \delta(t - nT_u),$$

$$\Delta P_u^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta E_{un} \delta(t - nT_u), \quad \Delta P_\phi^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta E_{fn} \delta(t - nT_u), \quad (7.13.a)$$

где  $\Delta E_n = E_n - E^0$ ,  $\Delta P^*(t) = P^*(t) - P^{0*}(t)$ ,  $\Delta E_{un} = E_{un} - E_u^0$  и т.д.

Действительно, записав любое уравнение (7.13) в общем виде и в виде, соответствующем базовому режиму, и вычтя одно из другого, получим соответствующее уравнение (7.13.a).

**Замечание.** Верхний индекс \* в формулах (7.13), означающий, что функции времени, представлены в виде идеальных импульсов, далее будет использоваться также для обозначения их фурье-изображений, передаточных функций и т.д.

### 7.3. Уравнения кинетики импульсного реактора

Итак, мы рассматриваем мощность реактора как последова-

тельность идеальных импульсов. Это позволяет от уравнений кинетики (7.1)–(7.3), из которых первое и третье являются дифференциальными, перейти к алгебраическим уравнениям (7.14)–(7.19), которые связывают значения безразмерных переменных в дискретные моменты времени – в моменты, соответствующие текущему импульсу мощности (с индексом  $n$ ) и предшествующему импульсу мощности (с индексом  $n-1$ ).

**Замечание.** Будем считать  $S_c = 0$ , поскольку для мощностей, представляющих интерес с точки зрения управления реактором, интенсивность постоянного источника ничтожна по сравнению с интенсивностью запаздывающих нейтронов.

$$\frac{E_n}{E^0} = \frac{E_{un}}{E^0} + \frac{E_{\phi n}}{E^0}, \quad (7.14)$$

$$\frac{E_{un}}{E^0} = \frac{E_{un}}{E_u^0} \frac{E_u^0}{E^0}, \quad (7.15)$$

$$\frac{E_{un}}{E_u^0} = \frac{S_n}{S^0} \frac{M_n}{M^0} = \frac{S_n}{S^0} \exp\left(\ln \frac{M_n}{M^0}\right), \quad (7.16)$$

$$\frac{E_{\phi n}}{E^0} = k_{\phi} \frac{S_n}{S^0}, \quad (7.17)$$

$$\frac{S_n}{S^0} = \sum_i \frac{S_{in}}{S^0}, \quad (7.18)$$

$$\frac{S_{in}}{S^0} = \left( \frac{S_{i,n-1}}{S^0} + \mu_i \lambda_i \frac{E^0}{S^0} \frac{E_{n-1}}{E^0} \right) e^{-\lambda_i T_{u_i}}. \quad (7.19)$$

Отметим, что для базового режима (работа со стабильными импульсами мощности)  $E_{\phi n} = E_{\phi}^0$ ,  $S_n = S^0$  и уравнение (7.17) примет вид  $E_{\phi}^0/E^0 = k_{\phi}$ . Таким образом,  $k_{\phi}$  есть доля энергии фона от полной энергии в базовом режиме. Постоянные величины в уравнениях (7.15), (7.17) и (7.19) вычисляются по формулам:

$$\frac{S^0}{E^0} = \sum_i \mu_i \lambda_i \frac{e^{-\lambda_i T_u}}{1 - e^{-\lambda_i T_u}} = \sum_i \mu_i \lambda_i \frac{1}{e^{\lambda_i T_u} - 1}, \quad (7.20)$$

$$k_{\phi} = \frac{E_{\phi}^0}{E^0} = \frac{\beta T_u}{\Delta k_{\text{ПО}} - \varepsilon_m^0} \frac{S^0}{E^0} = \frac{\beta T_u}{\Delta k_{\text{ПО}} - \varepsilon_m^0} \sum_i \mu_i \lambda_i \frac{1}{e^{\lambda_i T_u} - 1}, \quad (7.21)$$

$$\frac{E_u^0}{E^0} = 1 - k_{\phi}. \quad (7.22)$$

Формула (7.20) вытекает из формул (7.19) и (7.18), рассматриваемых для базового режима. Формулы (7.21) и (7.22) получаются из формул (7.6.a) и (7.14) аналогичным образом.

Итак, импульсный реактор нулевой мощности описывается алгебраическими уравнениями (7.14)–(7.22). Уравнения (7.14)–(7.18) связывают между собой значения переменных, соответствующие текущему импульсу мощности, а уравнение (7.19) – текущему и предшествующему импульсам, т.е. значения в дискретные моменты времени. Уравнение (7.19) называется *разностным* и является аналогом дифференциального уравнения (7.3), которое связывает значения переменных в любые моменты времени.

#### 7.4. Импульсная доля запаздывающих нейтронов. Блок-схема импульсного реактора

Из рис. 7.4, на котором параметр  $M$  изображен в логарифмическом масштабе, следует, что в окрестности базового значения  $M^0$  зависимость  $\ln M$  от  $\varepsilon_m$  близка к линейной в достаточно широком диапазоне изменения  $M$ . Разложим функцию  $\ln(M/M^0)$  в ряд Тейлора в окрестности  $M = M^0$ , отбросив высшие производные (имея в виду любой импульс, опустим в формуле (7.16) индекс  $n$ ). В результате такого разложения получим

$$\ln \frac{M}{M^0} = d \ln \left( \frac{M}{M^0} \right) / d\varepsilon_m \Big|_{\varepsilon_m^0} \Delta \varepsilon_m. \quad (7.23)$$

Обратная величина первого сомножителя в уравнении (7.23)

$$\beta_u = \frac{1}{d \ln \left( \frac{M}{M^0} \right) / d \varepsilon_m \Big|_{\varepsilon_m^0}} = \frac{M^0}{dM/d\varepsilon_m \Big|_{\varepsilon_m^0}} \quad (7.24)$$

называется *импульсной долей запаздывающих нейтронов\** (для реактора ИБР-2  $\beta_u = 1,6 \cdot 10^{-4}$ ). Введя новое обозначение

$$r = \frac{\varepsilon}{\beta_u}, \quad (7.25)$$

упростим входящую в уравнения кинетики формулу (7.16):

$$\frac{E_{un}}{E_u^0} = \frac{S_n}{S^0} e^{[(\varepsilon_{mn}/\beta_u) - (\varepsilon_m^0/\beta_u)]} = \frac{S_n}{S^0} e^{(r_{mn} - r_m^0)} = \frac{S_n}{S^0} e^{\Delta r_{mn}}, \quad (7.26)$$

где  $\varepsilon$  – реактивность на мгновенных нейтронах в абсолютных единицах, а  $r$  – в долях  $\beta_u$ ;  $\Delta r = r - r^0$  – отклонение реактивности на мгновенных нейтронах от базового значения в долях  $\beta_u$ . Из формулы (7.26) видно, что в базовом режиме  $\Delta r_{mn} = 0$ .

Из формулы (7.26) следует, что относительная энергия импульса мощности  $E_u/E_u^0$  является функцией относительного источника запаздывающих нейтронов  $S/S^0$  и отклонения реактивности  $\Delta r_m = (\varepsilon_m/\beta_u) - (\varepsilon_m^0/\beta_u)$  выраженной в долях  $\beta_u$ . Таким образом, если в стационарных реакторах реактивность удобно выражать в долях  $\beta$ , то в импульсном реакторе – в долях  $\beta_u$ .

В рабочем диапазоне изменений  $M$  относительно  $M^0$  (т.е. в диапазоне, за пределами которого срабатывает аварийная защита) ошибка аппроксимации при замене нелинейной зависимости  $\ln M$  от  $\varepsilon_m$  линейной зависимостью достаточно мала (в районе 5%). В связи с этим в уравнениях кинетики (7.14)–(7.19) целесо-

---

\* Бондаренко И.И., Ставиский Ю.Я. Импульсный режим работы быстрого реактора // Атомная энергия. 1959. Т. 7, вып. 5. С. 417–420.

образно заменить уравнение (7.16) уравнением (7.26). На рис. 7.5 показана блок-схема с учетом такой упрощающей замены.

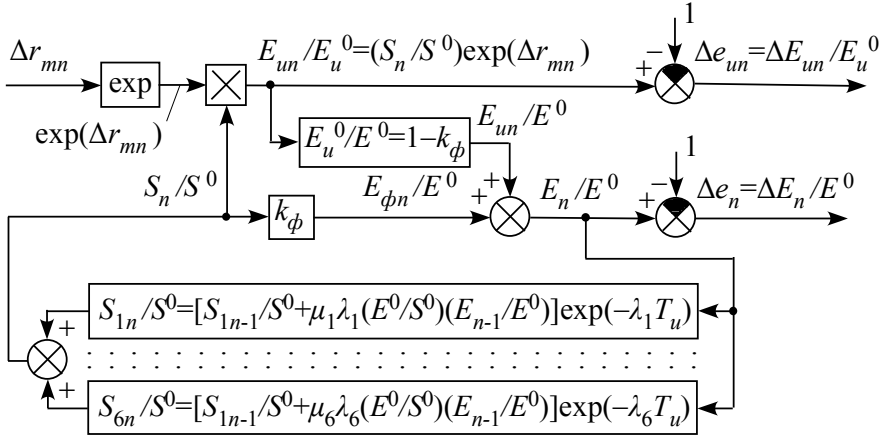


Рис. 7.5. Блок-схема импульсного реактора нулевой мощности

Вместо относительных переменных удобнее использовать относительные *отклонения* переменных от их базовых значений:

$$\Delta e_{un} = \frac{\Delta E_{un}}{E_u^0} = \frac{E_{un} - E_u^0}{E_u^0} = \frac{E_{un}}{E_u^0} - 1,$$

$$\Delta e_{\phi n} = \frac{\Delta E_{\phi n}}{E_{\phi}^0} = \frac{E_{\phi n} - E_{\phi}^0}{E_{\phi}^0} = \frac{E_{\phi n}}{E_{\phi}^0} - 1, \quad (7.27)$$

$$\Delta e_n = \frac{\Delta E_n}{E^0} = \frac{E_n - E^0}{E^0} = \frac{E_n}{E^0} - 1, \quad \Delta s_{in} = \frac{\Delta S_{in}}{S^0} = \frac{S_{in} - S_i^0}{S^0},$$

$$\Delta s_n = \frac{\Delta S_n}{S^0} = \frac{S_n - S^0}{S^0} = \frac{S_n}{S^0} - 1 = \sum_i \frac{\Delta S_{in}}{S^0} = \sum_i \Delta s_{in}.$$

Считая  $S_c = 0$ , из формулы (7.6.a) получим  $\Delta e_{\phi n} = \Delta s_n$ .

Очевидно, что в режиме стабилизации необходимо поддерживать либо  $E_{un}/E_u^0 = 1$ , либо  $\Delta e_{un} = \Delta E_{un}/E_u^0 = 0$ , что удобнее.

Для реактора нулевой мощности в качестве входного сигнала принято отклонение реактивности  $\Delta r_{mn}$  в долях  $\beta_u$ , а в качестве выходного – относительное отклонение энергии импульса



мощности  $\Delta e_{un} = \Delta E_{un} / E_u^0$  (рис. 7.5). Там же указан еще один выходной сигнал – относительное отклонение полной энергии за период  $\Delta e_n = \Delta E_n / E^0$ . Этот сигнал будет использован в качестве входного сигнала мощностной обратной связи при рассмотрении реактора ненулевой мощности.

### 7.5. Блок-схема импульсного реактора ненулевой мощности

Реактор ненулевой мощности (рис. 7.6) представлен в виде реактора нулевой мощности, охваченного мощностной обратной связью (МОС). Отклонения от базовых значений реактивностей реактора нулевой и ненулевой мощности ( $\Delta r_{mn}$  и  $\Delta r_{RTn}$ ) и мощностной обратной связи ( $\Delta r_{Tn}$ ) выражены в долях  $\beta_u$ .

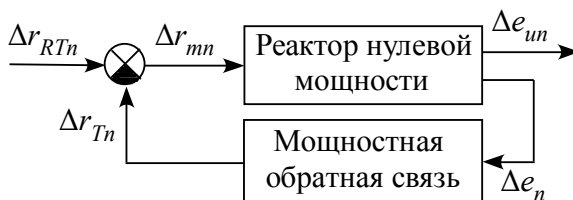


Рис. 7.6. Блок-схема импульсного реактора ненулевой мощности

Чтобы реактор был устойчив, мощностная обратная связь реактора ИБР-2 в целом должна быть *отрицательной* (на рис. 7.6 сектор сумматора зачерчен). Как будет показано далее, ее удобно представить в виде совокупности параллельно соединенных элементов. Коэффициент передачи элемента, осуществляющего отрицательную обратную связь, имеет положительный знак, а коэффициент передачи элемента, осуществляющего положительную обратную связь, – отрицательный знак. Таким образом, реактивность реактора нулевой мощности есть разность:

$$\Delta r_{mn} = \Delta r_{RTn} - \Delta r_{Tn}, \quad (7.28)$$

причем базовые значения  $\Delta r_{mn}^0$ ,  $\Delta r_{RTn}^0$ ,  $\Delta r_{Tn}^0$  равны нулю.

## 7.6. Мощностная обратная связь в линейном приближении

Оценка МОС проводилась в режим саморегулирования (реактор ИБР-2 работал без автоматического регулятора). Автоматический регулятор (АР), выведенный из контура регулирования, использовался в качестве задатчика реактивности. Задающая реактивность изменялась с одного уровня на другой за интервал времени между соседними импульсами мощности (для импульсного реактора это эквивалентно скачку реактивности). Регистрировалась последовательность энергий импульсов мощности и вычислялись значения относительных отклонений энергий импульсов мощности  $\Delta e_{un}$ . Использовалось как однократное изменение уровня реактивности, так и периодическое, в частности, с таким периодом колебаний, что в конце полупериода реактор выходил на практически установившийся уровень мощности.

Вычислялись значения относительных отклонений полной энергии импульсов мощности  $\Delta e_n$  (дискретный входной сигнал блока МОС). Используя уравнения кинетики импульсного реактора с заменой уравнения (7.16) уравнением (7.26), вычислялись отклонения реактивности  $\Delta r_{mn}$  (дискретный входной сигнал реактора нулевой мощности). Из соотношения (7.28) по известной задающей реактивности  $\Delta r_{RTn}$  и вычисленной реактивности  $\Delta r_{mn}$  вычислялся выходной сигнал МОС:

$$\Delta r_{Tn} = \Delta r_{RTn} - \Delta r_{mn}. \quad (7.29)$$

**Частотная передаточная функция обратной связи.** Анализ МОС был продолжен частотным методом. Были вычислены спектры  $\Delta e^*(j\bar{\omega})$  и  $\Delta r_T^*(j\bar{\omega})$  дискретных сигналов  $\Delta e_n$  и  $\Delta r_{Tn}$ , а по ним дискретная частотная передаточная функция МОС:

$$W_T^*(j\bar{\omega}) = \frac{\Delta r_T^*(j\bar{\omega})}{\Delta e^*(j\bar{\omega})} = \text{Re} W_T^*(j\bar{\omega}) + j \text{Im} W_T^*(j\bar{\omega}), \quad (7.30)$$

где  $\text{Re}W_T^*(j\bar{\omega})$  и  $\text{Im}W_T^*(j\bar{\omega})$  – соответственно ее действительная и мнимая части (иначе называемые вещественной и мнимой дискретными частотными характеристиками),  $\bar{\omega}$  – круговая частота в относительных единицах равная

$$\bar{\omega} = \omega T_u \quad (7.31)$$

( $T_u$  – период импульсов в с,  $\omega = 2\pi/T_u$  – круговая частота в с<sup>−1</sup>).

Дискретные частотные характеристики являются периодическими функциями частоты. Их период равен  $2\pi/T_u$ , если пользоваться частотой  $\omega$ , или  $2\pi$ , если пользоваться относительной частотой  $\bar{\omega}$  (диапазон  $\bar{\omega}$  от 0 до  $\pi$ ).

Входным сигналом блока МОС, изображенного на рис. 7.6, принято относительное отклонение полной энергии за период импульса мощности  $\Delta e_n = \Delta E_n/E^0$ . Отклонение реактивности МОС зависит от отклонения температуры топлива от ее базового значения. Отклонение же температуры зависит напрямую от отклонения полной энергии за период импульсов мощности  $\Delta E_n$  (рис. 7.7), а не от относительного отклонения  $\Delta e_n = \Delta E_n/E^0$ .

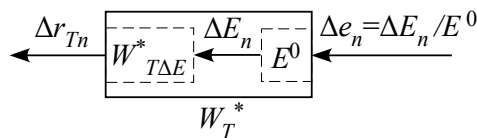


Рис. 7.7. Блок мощностной обратной связи

МОС с дискретной передаточной функцией  $W_T^*$  представлена в виде двух составляющих: усилительного звена, преобразующего входной сигнал  $\Delta e_n = \Delta E_n/E^0$  в сигнал  $\Delta E_n$  (его передаточная функция равна  $E^0$ ) и составляющая МОС с дискретной передаточной функцией  $W_{T\Delta E}^*$ . Передаточной функцией  $W_{T\Delta E}^*$

целесообразнее пользоваться, когда необходимо сравнивать дискретные передаточные функции МОС, соответствующие разным средним мощностям реактора (следовательно, разным значениям  $E^0$ ). Сейчас именно она представляет для нас интерес.

Дискретная частотная передаточная функция МОС по *относительному* отклонению энергии есть произведение (см. рис. 7.7):

$$W_T^*(j\omega) = E^0 W_{T\Delta E}^*(j\omega). \quad (7.32)$$

Следовательно, дискретная частотная передаточная функция МОС по *абсолютному* отклонению энергии в  $E^0$  раз меньше:

$$W_{T\Delta E}^*(j\omega) = \frac{\Delta r_T^*(j\omega)}{\Delta E^*(j\omega)} = \frac{1}{E^0} W_T^*(j\omega). \quad (7.33)$$

Аналогично связаны и вещественные характеристики, соответствующие этим частотным передаточным функциям:

$$\operatorname{Re} W_{T\Delta E}^*(j\omega) = \frac{1}{E^0} \operatorname{Re} W_T^*(j\omega). \quad (7.34)$$

**Импульсная переходная характеристика МОС.** В разделе, посвященном теории управления, приводилась формула для вычисления дискретной импульсной переходной характеристики системы по вещественной дискретной частотной характеристике. Воспользуемся этой формулой и вычислим *дискретную импульсную переходную характеристику МОС*:

$$w_{T\Delta E n} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{Re} W_{T\Delta E}^*(j\omega) \cos(\omega n) d\omega. \quad (7.35)$$

Характеристика  $w_{T\Delta E n}$  — это отклонения реактивности МОС в дискретные моменты времени  $t = 0; 1T_u; 2T_u; 3T_u; \dots$ , вызванные бесконечно узким одиночным импульсом мощности единичной площади, поданным на вход МОС в момент времени  $t = 0$ . Значения реактивности именно в эти дискретные моменты времени влияют на динамику реактора. Поэтому  $w_{T\Delta E n}$  называ-

ется *дискретной* импульсной переходной характеристикой. Разумеется, реактивность МОС, обусловленная одиночным импульсом мощности, представляет собой непрерывную функцию времени. Она называется импульсной переходной характеристикой и является *огibaющей* дискретной импульсной переходной характеристики.

Описание МОС линейными уравнениями и, следовательно, правомерность использования передаточной функции МОС являются справедливыми в первом приближении. Поэтому характеристику  $w_{T\Delta En}$  следует рассматривать как отклонение реактивности  $\Delta r_{Tn}$ , вызванное импульсом мощности достаточно малой площади (при которой не нарушается линейность соотношений), но нормированную на импульс мощности площадью 1 МДж.

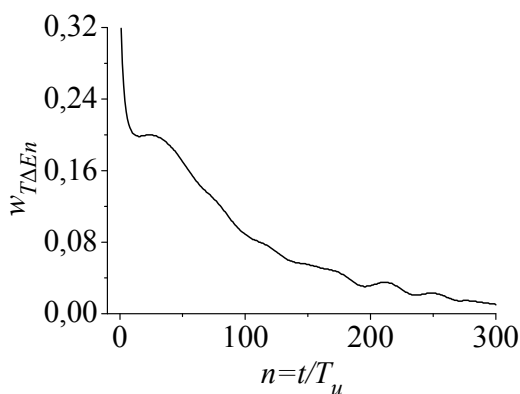


Рис. 7.8. Импульсная переходная характеристика МОС, т.е. отклонение реактивности МОС в  $\beta_u/\text{МДж}$ , вызванное одиночным импульсом мощности в момент времени  $t = 0$  ( $n = t/T_u$  – безразмерное время,  $T_u$  – период импульсов мощности)

В качестве примера на рис. 7.8 показана импульсная переходная характеристика МОС, вычисленная по формуле (7.35) для одного из проведенных экспериментов при средней мощности

реактора 1,47 МВт (февраль 2002 г.).

**Замечание.** Реактивность МОС, обусловленная текущим импульсом мощности, не успевает проявить себя в текущем импульсе мощности и влияет на формирование лишь последующих импульсов мощности. В связи с этим импульсная переходная характеристика, обусловленная импульсом мощности в момент  $t/T_u = 0$ , изображена на рис. 7.8 начиная с момента  $t/T_u = 1$  (в момент  $t/T_u = 0$  она равна нулю).

**Структура модели МОС.** Для всех вычисленных импульсных переходных характеристик МОС, соответствующих рабочему диапазону средней мощности реактора ИБР-2 (от 1.4 до 2 МВт) характерно сначала резкое падение, затем некоторый подъем, после чего опять падение, но несравненно более медленное (рис. 7.8). Естественно, без учета этой особенности импульсной переходной характеристики ее предельно упрощено можно описать одной экспонентой. Очевидно, что при учете этой особенности импульсную переходную характеристику МОС следует описать, по меньшей мере, суммой трех экспонент: двух с положительным знаком и одной с отрицательным. Поскольку экспонента является импульсной переходной характеристикой апериодического звена, то модель МОС можно представить в виде трех апериодических звеньев соединенных параллельно.

**Замечание.** Вычисление импульсной переходной характеристики за существенно более длительный интервал времени показало, что для описания МОС помимо трех экспонент надо добавить, по меньшей мере, еще две экспоненты. Однако постоянные времени этих экспонент настолько велики (сотни секунд), что влияние этих двух дополнительных инерционных составляющих МОС без труда будет компенсировать автоматический регулятор, включенный в контур регулирования. Поэтому дос-

точно ограничиться учетом трех составляющих МОС.

Итак, на вход каждого  $j$ -го апериодического звена ( $j=1, 2, 3$ ) подаются бесконечно узкие импульсы мощности с периодом  $T_u$ . При этом реактивность МОС, обусловленная текущим импульсом мощности, не успевает проявить себя в этом текущем импульсе мощности, она влияет на формирование лишь последующих импульсов мощности. Учитывая это, запишем разностное уравнение, связывающее сигнал на выходе  $\Delta r_{Tjn}$  в момент, соответствующий  $n$ -му импульсу мощности, со значением выходного сигнала  $\Delta r_{Tj n-1}$  и площадью импульса полной мощности  $\Delta E_{n-1}$ , которые соответствуют  $(n-1)$ -му импульсу мощности:

$$\Delta r_{Tjn} = \left( \Delta r_{Tj n-1} + \frac{k_{Tj}}{T_{Tj}} \Delta E_{n-1} \right) e^{-T_u/T_{Tj}}, \quad (7.36)$$

где  $k_{Tj}$  и  $T_{Tj}$  – коэффициент передачи и постоянная времени  $j$ -й составляющей МОС;  $j=1, 2, 3$  – номер апериодического звена.

Для МОС в целом разностное уравнение примет вид:

$$\Delta r_{Tn} = \sum_{j=1}^3 \Delta r_{Tjn} = \sum_{j=1}^3 \left[ \left( \Delta r_{Tj n-1} + \frac{k_{Tj}}{T_{Tj}} \Delta E_{n-1} \right) e^{-T_u/T_{Tj}} \right]. \quad (7.37)$$

Дискретные частотные передаточные функции МОС  $W_{T\Delta E}^*$  и ее параллельных составляющих  $W_{T\Delta E_j}^*$  связаны суммой

$$W_{T\Delta E}^*(j\omega) = \frac{\Delta r_T^*(j\omega)}{\Delta E^*(j\omega)} = \sum_{j=1}^3 W_{T\Delta E_j}^*(j\omega) = \sum_{j=1}^3 \frac{\Delta r_{Tj}^*(j\omega)}{\Delta E^*(j\omega)}, \quad (7.38)$$

где  $\Delta r_T^*(j\omega)$  и  $\Delta r_{Tj}^*(j\omega)$  – фурье-изображения (спектры) дискретных сигналов  $\Delta r_{Tn}$  и  $\Delta r_{Tjn}$  соответственно.

Звено с наибольшей постоянной времени создает отрицательную обратную связь, с промежуточной – положительную, с наименьшей – отрицательную, в сумме же – отрицательную.

В разделе, посвященном теории управления, указано, что апериодическому звену с коэффициентом передачи  $k$  и постоянной времени  $T$  соответствует дискретная импульсная переходная характеристика  $w_n = (k/T)e^{-n}$  (где  $n \geq 0$ ) и дискретная частотная передаточная функция (приведем две формы записи)

$$W^*(j\omega) = \frac{k}{T} \frac{e^{T_u/T}}{e^{T_u/T} - e^{-j\omega}} = \frac{k}{T} \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega} - e^{-T_u/T}}.$$

Дискретная импульсная переходная характеристика  $w_n$  каждого апериодического звена МОС используется в расчетах не вся, а за вычетом ее значения  $k/T$ , соответствующего  $n = 0$ . Учитывая это, для  $j$ -го звена и для МОС в целом получим:

$$W_{T\Delta E_j}^*(j\omega) = \frac{\Delta r_{Tj}^*(j\omega)}{\Delta E^*(j\omega)} = \frac{k_{Tj}}{T_{Tj}} \frac{e^{-j\omega}}{e^{T_u/T_{Tj}} - e^{-j\omega}}. \quad (7.39)$$

$$W_{T\Delta E}^*(j\omega) = \frac{\Delta r_T^*(j\omega)}{\Delta E^*(j\omega)} = \sum_{j=1}^3 \left( \frac{k_{Tj}}{T_{Tj}} \frac{e^{-j\omega}}{e^{T_u/T_{Tj}} - e^{-j\omega}} \right). \quad (7.40)$$

Структурная схема МОС (т.е. соединение звеньев с указанием их передаточных функций) показана на рис. 7.9.

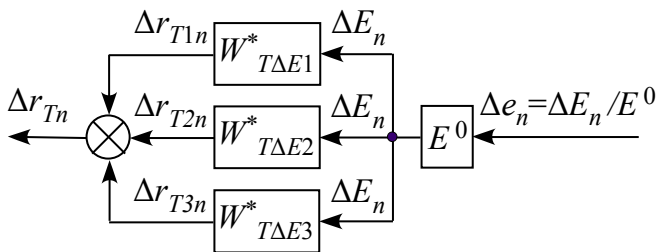


Рис. 7.9. Структурная схема МОС в линейном приближении

### 7.7. Нелинейная модель мощной обратной связи

При не слишком малых возмущениях реактивности линейной модели МОС уже недостаточно. Это наглядно проявляется в том, что симметричные прямоугольные колебания реактивности вызывают явно несимметричные колебания энергии импульсов



мощности, что можно объяснить лишь нелинейностью МОС. В связи с этим структура модели МОС оставлена без изменений, но коэффициенты передачи МОС приняты величинами не постоянными, а зависимыми от различных параметров. У звена с наибольшей постоянной времени коэффициент передачи принят зависимым от реактивности, обусловленной именно этим звеном. Такая зависимость основана на предположении, что эта составляющая реактивности МОС обусловлена расширением топлива (что согласуется с расчетной оценкой) и что реактивность этой составляющей пропорциональна отклонению температуры топлива. У двух других звеньев коэффициенты передачи приняты зависимыми от суммарной реактивности МОС в предположении, что она обусловлена совокупностью различных факторов. Такая зависимость коэффициентов передачи означает дополнительное введение в модель МОС местных обратных связей (рис. 7.10).

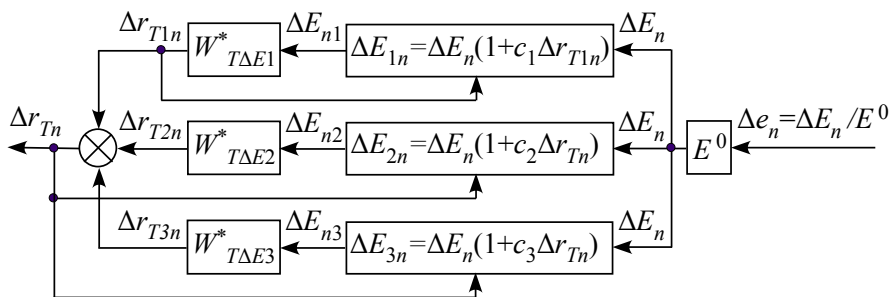


Рис. 7.10. Блок-схема нелинейной мощной обратной связи реактора ИБР-2 ( $\Delta E_{1n}$ ,  $\Delta E_{2n}$ ,  $\Delta E_{3n}$  – промежуточные переменные, обусловленные нелинейностями коэффициентов передачи)

При такой модели МОС получено наилучшее приближение смоделированных переходных процессов к зарегистрированным.

Отклонение реактивности МОС, соответствующее  $n$ -му импульсу мощности, равно сумме отклонений ее составляющих:

$$\Delta r_{Tn} = \sum_{j=1}^3 \Delta r_{Tjn} = \sum_{j=1}^3 \left[ \left( \Delta r_{Tj n-1} + \Delta E_{n-1} \frac{K_{Tj n-1}}{T_{Tj}} \right) e^{-T_u/T_{Tj}} \right], \quad (7.41)$$

где  $\Delta E_{n-1}$  – отклонение полной энергии, а  $K_{Tj n-1}$  – нелинейный коэффициент передачи, соответствующие предыдущему импульсу мощности;  $T_{Tj}$  – постоянная времени  $j$ -й составляющей МОС;  $T_u$  – период импульсов мощности. Коэффициенты  $K_{Tj n-1}$  равны

$$K_{T1 n-1} = k_{T1}(1 + c_1 \Delta r_{T1 n-1}), \quad (7.42)$$

$$K_{T2 n-1} = k_{T2}(1 + c_2 \Delta r_{T2 n-1}), \quad K_{T3 n-1} = k_{T3}(1 + c_3 \Delta r_{T3 n-1}), \quad (7.43)$$

где  $k_T$  – составляющая коэффициента передачи, не зависящая от реактивности;  $c$  – коэффициент нелинейности, учитывающий зависимость  $K_T$  от реактивности.

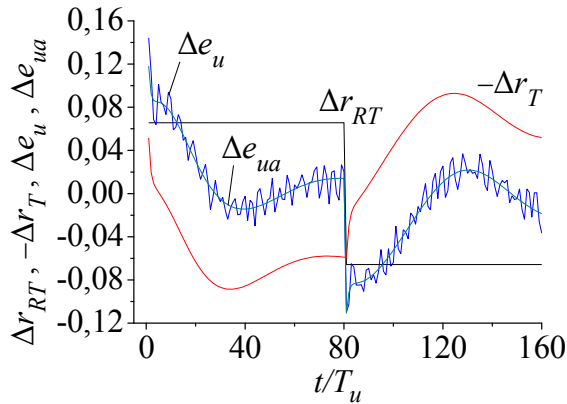


Рис. 7.11. Переходные процессы при прямоугольных колебаниях задающей реактивности  $\Delta r_{RT}$  с амплитудой  $0,0657 \beta_u$  ( $\Delta e_u$  – зарегистрированное, а  $\Delta e_{uu}$  – вычисленное относительное отклонение энергии импульсов мощности;  $-\Delta r_T$  – отклонение реактивности МОС с обратным знаком,  $t/T_u$  – относительное время)

Иллюстрацией хорошего приближения вычисленного переходного процесса к зарегистрированному служит рис. 7.11. Незначительные флуктуации  $\Delta e_u$  объясняются тем, что это не истинные значения  $\Delta e_u$ , а усредненные (путем наложения друг на друга 78 зарегистрированных периодов колебаний). Процессы соответствуют реактору в режиме саморегулирования при сред-

ней мощности  $P^0 = 1,71$  МВт и длительности периода импульсов мощности  $T_u = 0,208$  с (декабрь 1996 г.). Параметры МОС следующие:  $T_{T1} = 10,74$ ,  $T_{T2} = 3,10$ ,  $T_{T3} = 0,31$  с;  $k_{T1} = 5,80$ ,  $k_{T2} = -1,84$ ,  $k_{T3} = 0,41$  1/МВт;  $c_1 = -0,5$ ,  $c_2 = 1,2$ ,  $c_3 = 1,1$ .

### 7.8. Линеаризованные уравнения импульсного реактора

Для исследования устойчивости нелинейной системы пользуются соответствующими ей линеаризованными уравнениями.

**Мощностная обратная связь.** Нелинейной МОС соответствует уравнение (7.41) с переменными коэффициентами передачи  $K_{Tj}$ . Линеаризованной МОС соответствует подобное уравнение, но с постоянными коэффициентами передачи  $k_{Tj}$ :

$$\Delta r_{Tn} = \sum_{j=1}^3 \Delta r_{Tjn} = \sum_{j=1}^3 \left[ \left( \Delta r_{Tjn-1} + \Delta E_{n-1} \frac{k_{Tj}}{T_{Tj}} \right) e^{-T_u/T_{Tj}} \right], \quad (7.44)$$

Уравнение (7.41) превращается в уравнение (7.44) при  $c_j = 0$ . Аналогично при  $c_j = 0$  блок-схема нелинейной МОС (рис. 7.10) переходит в блок-схему линейной МОС (рис. 7.9).

**Реактор нулевой мощности.** В нелинейном уравнении кинетики (7.26)  $E_{un}/E_u^0 = (S_n/S^0) \exp(\Delta r_{mn})$  разложим экспоненту в ряд Тейлора и отбросим высшие производные:

$$\frac{E_{un}}{E_u^0} = \frac{S_n}{S^0} (1 + \Delta r_{mn}). \quad (*)$$

Запишем формулу (\*) в следующем виде:

$$\frac{E_{un}}{E_u^0} - 1 = \left( \frac{S_n}{S^0} - 1 + 1 \right) (1 + \Delta r_{mn}) - 1. \quad (**)$$

Воспользовавшись обозначениями (7.27) для относительных отклонений переменных  $(E_{un}/E_u^0) - 1 = \Delta e_{un}$  и  $(S_n/S^0) - 1 = \Delta s_n$  и

пренебрегая произведением  $(\Delta S_n/S^0)\Delta r_{mn}$  как величиной второго порядка малости из формулы (\*\*\*) получим

$$\Delta e_{un} = \Delta s_n + \Delta r_{mn}.$$

**Замечание.** Из этого уравнения следует, что в режиме стабилизации, когда  $\Delta s_n$  существенно меньше  $\Delta r_{mn}$ , относительное отклонение энергии  $n$ -го импульса мощности и соответствующее этому импульсу отклонение реактивности, выраженные в долях  $\beta_u$ , примерно равны. Так, при  $\Delta \varepsilon_{mn} = 1,6 \cdot 10^{-5} = 0,1\beta_u$  (при  $\Delta r_{mn} = \Delta \varepsilon_{mn}/\beta_u = 0,1$ )  $\Delta e_{un} \approx 0,1$ .

В других уравнениях кинетики относительные переменные заменим относительными отклонениями. Уравнение (7.14)  $E_n/E^0 = E_{un}/E^0 + E_{\phi n}/E^0$  для базового режима: примет вид  $E^0/E^0 = E_u^0/E^0 + E_{\phi}^0/E^0$ . Вычитая последнее уравнение из предыдущего и учитывая соотношения (7.21) и (7.22), получим

$$\Delta e_n = (1 - k_{\phi})\Delta e_{un} + k_{\phi}\Delta e_{\phi n} = (1 - k_{\phi})\Delta e_{un} + k_{\phi}\Delta s_n.$$

Поступая аналогичным образом с уравнениями (7.17)–(7.19), получим уравнения кинетики для малых отклонений:

$$\Delta e_{un} = \Delta s_n + \Delta r_{mn}, \quad (7.45)$$

$$\Delta e_n = (1 - k_{\phi})\Delta e_{un} + k_{\phi}\Delta s_n, \quad (7.46)$$

$$\Delta s_n = \sum_i \Delta s_{in} = \sum_i \left[ \left( \Delta s_{i\ n-1} + \mu_i \lambda_i \frac{E^0}{S^0} \Delta e_{n-1} \right) e^{-\lambda_i T_u} \right], \quad (7.47)$$

где коэффициенты  $k_{\phi}$  и  $E^0/S^0$  определяются формулами

$$k_{\phi} = \frac{\beta T_u}{\Delta k_{ПО} - \varepsilon_m^0} \sum_i \frac{\mu_i \lambda_i}{e^{\lambda_i T_u} - 1}, \quad (7.48)$$

$$\frac{E^0}{S^0} = \frac{1}{\sum_i \frac{\mu_i \lambda_i}{e^{\lambda_i T_u} - 1}}. \quad (7.49)$$

Формула (7.48) повторяет формулу (7.21), а формула (7.49) вытекает из выражения (7.20).

Уравнение (7.47) связывает относительное отклонение интенсивности запаздывающих нейтронов  $\Delta s_n = \Delta S_n / S^0$ , соответствующее  $n$ -му (текущему) импульсу мощности, с аналогичным относительным отклонением  $\Delta s_{n-1}$  и относительным отклонением полной энергии  $\Delta e_{n-1}$ , соответствующими  $(n-1)$ -му (предыдущему) импульсу мощности.

Ранее при рассмотрении МОС было показано, что разностному уравнению (7.37) соответствует дискретная частотная передаточная функция (7.40). Аналогично для запаздывающих нейтронов разностному уравнению (7.47), подобному уравнению (7.37), соответствует следующая дискретная частотная передаточная функция, подобная выражению (7.40):

$$W_S^*(j\bar{\omega}) = \frac{\Delta s^*(j\bar{\omega})}{\Delta e^*(j\bar{\omega})} = \frac{1}{\sum_i \mu_i \lambda_i \frac{1}{e^{\lambda_i T_u} - 1}} \sum_i \mu_i \lambda_i \frac{e^{-j\bar{\omega}}}{e^{\lambda_i T_u} - e^{-j\bar{\omega}}}. \quad (7.50)$$

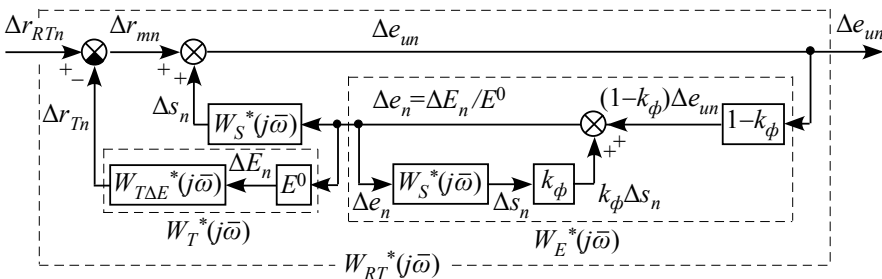


Рис.7.12. Структурная схема импульсного реактора ненулевой мощности в линейном приближении

Линеаризованным уравнениям МОС (7.44) и кинетики

(7.45) – (7.47) импульсного реактора ненулевой мощности соответствует структурная схема, показанная на рис. 7.12.

Дискретные частотные передаточные функции  $W_{T\Delta E}^*(j\bar{\omega})$  и  $W_S^*(j\bar{\omega})$  вычисляются по формулам (7.40) и (7.50). Дискретная частотная передаточная функция  $W_E^*(j\bar{\omega})$  блока, преобразующего сигнал  $\Delta e_{un} = \Delta E_{un} / E_u^0$  в сигнал  $\Delta e_n = \Delta E_n / E^0$ , вычисляется, как следует из рис. 7.12, по формуле

$$W_E^*(j\bar{\omega}) = \frac{\Delta e^*(j\bar{\omega})}{\Delta e_u^*(j\bar{\omega})} = \frac{1 - k_\phi}{1 - k_\phi W_S^*(j\bar{\omega})}. \quad (7.51)$$

**Замечание.** В структурной схеме (рис. 7.12) на все элементы с указанными дискретными частотными передаточными функциями подаются входные сигналы в виде последовательностей идеальных импульсов. При этом во всех этих последовательностях импульсы появляются в одни и те же моменты времени. В таких дискретных системах выражение дискретной передаточной функции какого-либо соединения элементов через дискретные передаточные функции этих элементов осуществляется по тем же правилам, что и при аналогичных соединениях в непрерывных (не импульсных) системах.

Реактор ненулевой мощности должен удовлетворять важнейшему требованию – устойчивости в режиме саморегулирования. Для оценки устойчивости реактора удобно воспользоваться критерием Найквиста. Для этого реактор следует представить в виде одноконтурной замкнутой системы с отрицательной обратной связью, и судить об устойчивости замкнутой системы по частотным характеристикам разомкнутой системы.

Прямой канал замкнутой системы примем единичным (канал от  $\Delta r_{RTn}$  к  $\Delta e_{un}$ ). Тогда канал обратной связи будет представлять собой блок, включающий все указанные на рис. 7.12

элементы, и дискретная частотная передаточная функция разомкнутой системы будет равна

$$W_{RTPаз}^*(j\bar{\omega}) = W_E^*(j\bar{\omega})[E^0 W_{T\Delta E}^*(j\bar{\omega}) - W_S^*(j\bar{\omega})]. \quad (7.52)$$

Дискретная частотная передаточная функция реактора ненулевой мощности в целом (как замкнутой системы) равна

$$W_{RT}^*(j\bar{\omega}) = \frac{\Delta e_u^*(j\bar{\omega})}{\Delta r_{RT}^*(j\bar{\omega})} = \frac{1}{1 + W_E^*(j\bar{\omega})[E^0 W_{T\Delta E}^*(j\bar{\omega}) - W_S^*(j\bar{\omega})]}. \quad (7.53)$$

### 7.9. Устойчивость импульсного реактора ненулевой мощности

Итак, для оценки устойчивости реактора ненулевой мощности следует построить на комплексной плоскости амплитудно-фазовую частотную характеристику (АФЧХ) разомкнутой системы, т.е. график дискретной частотной передаточной функции

$$W_{RTPаз}^*(j\bar{\omega}) = \text{Re} W_{RTPаз}^*(j\bar{\omega}) + j \text{Im} W_{RTPаз}^*(j\bar{\omega}). \quad (7.54)$$

Вместо АФЧХ можно использовать амплитудную и фазовую логарифмические частотные характеристики разомкнутой системы.

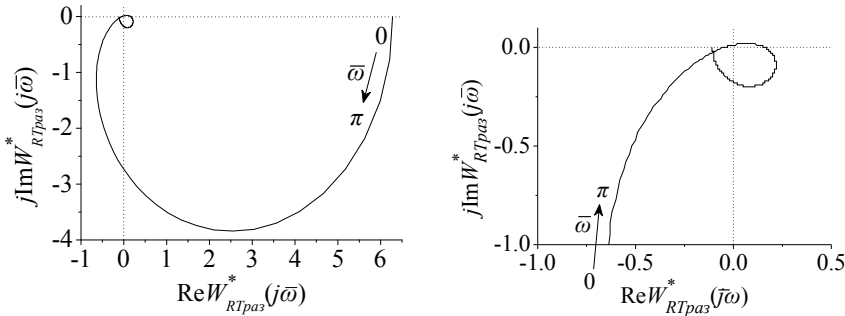


Рис. 7.13. Амплитудно-фазовая частотная характеристика разомкнутой системы при представлении реактора без автоматического регулятора в виде одноконтурной замкнутой системы

В качестве примера на рис. 7.13 показана АФЧХ разомкнутой системы, соответствующая модели реактора ИБР-2. Значения коэффициентов передачи и постоянных времени МОС приняты

те же, что указаны в подразделе 7.7.

АФЧХ разомкнутой системы не охватывает точку на комплексной плоскости с координатами  $1, j0$ . Следовательно, реактор ИБР-2 в режиме саморегулирования устойчив. Его запасы устойчивости при указанных параметрах МОС вполне достаточные: по амплитуде  $\sim 9$ , по фазе  $\sim 50$  градусов (рис. 7.13 справа).

### 7.10. Блок-схема импульсного реактора с автоматическим регулятором

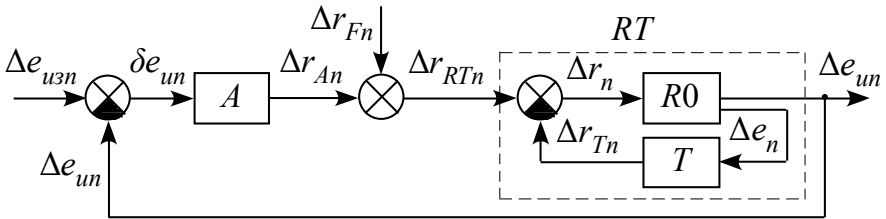


Рис. 7.14. Блок-схема импульсного реактора с автоматическим регулятором для режима стабилизации ( $A$  – автоматический регулятор;  $RT$  – реактор ненулевой мощности;  $R0$  – реактор нулевой мощности;  $T$  – блок мощностной обратной связи, обусловленной разогревом реактора)

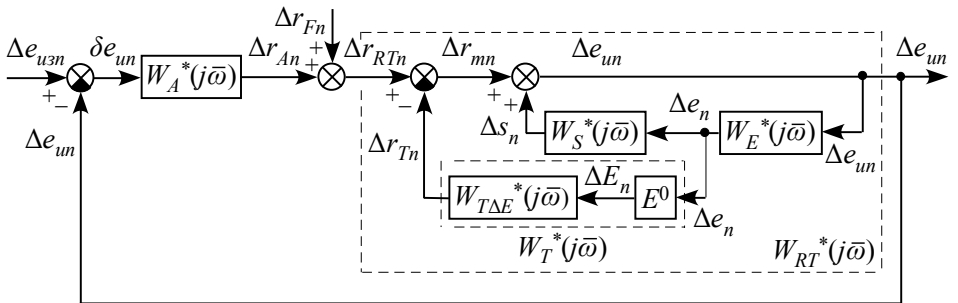


Рис. 7.15. Структурная схема линейной модели импульсного реактора с автоматическим регулятором

На рис. 7.14 изображена блок-схема замкнутой системы управления “регулятор – реактор” для режима стабилизации. Выходным сигналом системы управления является относительное отклонение энергии каждого ( $n$ -го) импульса мощности от его



базового значения  $\Delta e_{un} = (E_{un} - E_u^0)/E^0 = \Delta E_{un}/E_u^0$ , а его задающее (желаемое) значение  $\Delta e_{uzn} = (E_{uzn} - E_u^0)/E_u^0 = 0$  является входным сигналом. На схеме указан также возмущающий сигнал  $\Delta r_{Fn}$  (реактивность вносимая извне).

На рис 7.15 показана структурная схема замкнутой системы управления “регулятор – реактор” в линейном приближении для режима стабилизации.

Нелинейная модель реактора получена на основании наилучшего приближения смоделированных переходных процессов к зарегистрированным. Для моделирования переходных процессов, в том числе в нештатных режимах, целесообразно использовать именно ее. Линейная модель предназначена, в первую очередь, для оценки устойчивости реактора.

Используя рис. 7.15, нетрудно записать различные дискретные передаточные функции реактора с регулятором, в частности, передаточные функции замкнутой системы регулирования относительно задающего входного сигнала  $W_{ee}^*$  и относительно возмущения реактивности  $W_{eF}^*$ :

$$W_{ee}^*(j\omega) = \frac{\Delta e_u^*(j\omega)}{\Delta e_{uz}^*(j\omega)} = \frac{W_A^*(j\omega)W_{RT}^*(j\omega)}{1 + W_A^*(j\omega)W_{RT}^*(j\omega)}, \quad (7.55)$$

$$W_{eF}^*(j\omega) = \frac{\Delta e_u^*(j\omega)}{\Delta r_F^*(j\omega)} = \frac{W_{RT}^*(j\omega)}{1 + W_A^*(j\omega)W_{RT}^*(j\omega)}. \quad (7.56)$$

При использовании критерия Найквиста об устойчивости одноконтурной замкнутой системы судят по частотным характеристикам разомкнутой системы, которая получается из замкнутой, если разорвать контур (в каком месте разорвать, не принципиально). Представим реактор с регулятором (рис. 7.15) в виде одноконтурной замкнутой системы, приняв в качестве входного

сигнала  $\Delta e_{из}$ . Тогда в прямом канале будут последовательно соединенные регулятор и реактор ненулевой мощности, а отрицательная обратная связь будет единичной. В этом случае дискретная частотная передаточная функция разомкнутой системы равна

$$W_{раз}^*(j\bar{\omega}) = W_A^*(j\bar{\omega})W_{РТ}^*(j\bar{\omega}). \quad (7.57)$$

### 7.11. Структура автоматического регулятора оптимального в статистическом смысле

Из-за периодического выхода в надкритическое состояние импульсный реактор очень чувствителен к возмущениям реактивности, обусловленным вибрацией лопастей подвижного отражателя, дрожанием топливных кассет, в которые сгруппированы тепловыделяющие элементы и т.п. Как следствие, флуктуации энергии импульсов мощности достаточно велики (до 40%). Это иллюстрирует рис. 7.16 (слева), где показана зарегистрированная последовательность относительных отклонений энергий импульсов мощности. Реактор работал в режиме саморегулирования при средней мощности 1,435 МВт (январь 2002 г.). Характер реактивности, вызвавшей колебания импульсов мощности, проясняет вычисленная спектральная плотность\* (частотный спектр), показанная на рис. 7.16 справа. Наличие в ней достаточно острых пиков при некоторых значениях частоты (особенно при 1,1 Гц) означает, что в шуме реактивности помимо случайной составляющей присутствуют регулярные составляющие (близкие по своему характеру к синусоидальным возмущениям с этими частотами).

---

\* Элементарные сведения о случайных величинах, процессах, системах регулирования при случайных воздействиях приведены в работе [7].

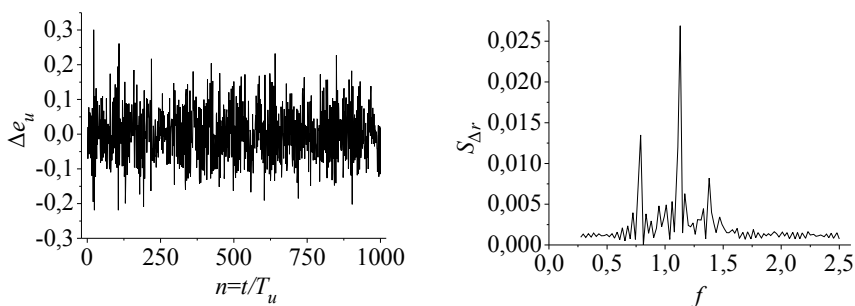


Рис. 7.16. Слева зарегистрированные колебания относительных отклонений энергии импульсов мощности, справа спектральная плотность реактивности, вызвавшей эти колебания ( $n$  – номер импульса мощности,  $f$  – частота в Гц)

Для режима стабилизации будем рассматривать автоматический регулятор в виде интегрирующего звена с передаточной функцией  $W_A(s) = k_A T_u / s$  и с входным сигналом в виде последовательности идеальных импульсов (площади этих импульсов равны  $-\Delta e_{un}$ ). Воспринимая значения  $-\Delta e_{un}$ , соответствующие текущему и предшествующим импульсам мощности, такой простейший регулятор обеспечивает минимум ожидаемого среднеквадратического отклонения относительной энергии будущего импульса мощности (при условии  $k_A T_u \ll 1$ )<sup>\*</sup>.

Энергии импульсов мощности зависят только от значений реактивности в дискретные моменты времени  $n = t/T_u$ . Поэтому на выходе АР нас интересуют только дискретные значения реактивности  $\Delta r_{An}$ . Для регулятора в виде интегрирующего звена дискретная частотная передаточная функция, связывающая спектры дискретных входного и выходного сигналов, равна

\* Задача оптимальности поставлена и решена в работе: Попов А.К. О статистически оптимальном регулировании энергии импульсов быстрого реактора. Атомная энергия, 1971, т.31, вып.3, с.269. Развернутое изложение в работе [14].

$$W_A^*(j\bar{\omega}) = \frac{\Delta r_A^*(j\bar{\omega})}{-\Delta e_u^*(j\bar{\omega})} = k_A T_u \frac{e^{-j\bar{\omega}}}{1 - e^{-j\bar{\omega}}} \quad (7.58)$$

### 7.12. Устойчивость импульсного реактора с регулятором

На рис. 7.17 и 7.18 изображены дискретные АФЧХ и логарифмические частотные характеристики разомкнутой системы при двух значениях коэффициента передачи регулятора  $k_A$  (0,4 и 1,6 с<sup>-1</sup>) при средней мощности реактора 1,71 МВт (значения параметров МОС те же, что указаны в подразделе 7.7).

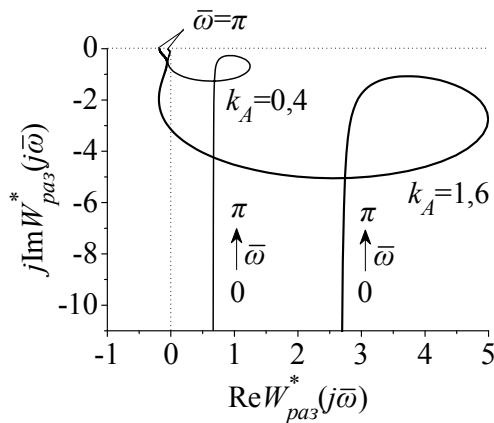


Рис. 7.17. Дискретные амплитудно-фазовые частотные характеристики разомкнутой системы (соответствующие замкнутой системе “регулятор – реактор”) при разных значениях коэффициента передачи регулятора  $k_A$

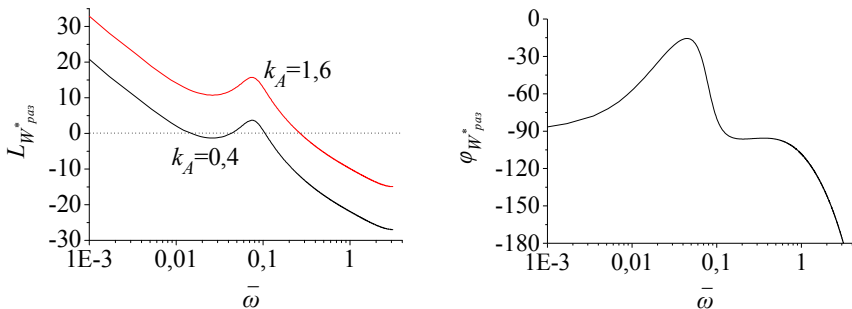


Рис. 7.18. Дискретные логарифмические частотные характеристики разомкнутой системы, соответствующие амплитудно-фазовым характеристикам, изображенным на рис 7.17

Из частотных характеристик разомкнутой системы следует, что замкнутая система “регулятор - реактор” устойчива. При коэффициенте передачи регулятора  $k_A = 0,4 \text{ с}^{-1}$  запасы устойчивости весьма большие: по амплитуде 22,4, по фазе 96 градусов. При увеличении коэффициента передачи регулятора в 4 раза ( $k_A = 1,6 \text{ с}^{-1}$ ) запас по амплитуде уменьшается в 4 раза (5,6 вместо 22,4). Запас по фазе изменяется незначительно (84 градуса вместо 96).

На рис. 7.19 для тех же двух значений  $k_A$  показаны переходные процессы относительного отклонения энергии импульсов мощности  $\Delta e_u$  при скачке реактивности  $\Delta r_F = -0,1\beta_u$ .

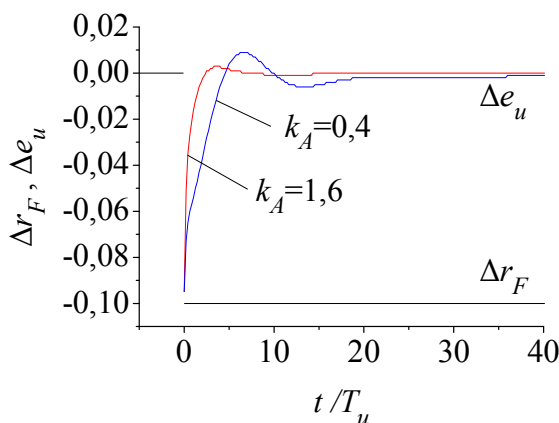


Рис. 7.19. Переходные процессы, вызванные скачком реактивности, при двух значениях коэффициента передачи регулятора  $k_A$

Еще раз о связи ЛАЧХ разомкнутой системы с переходным процессом в замкнутой системе. При  $k_A = 1,6 \text{ с}^{-1}$  ЛАЧХ пересекает линию  $L_{W_{раз}}^*(\omega) = 0$ , во-первых, с меньшим наклоном и, во-вторых, при большей частоте, чем при  $k_A = 0,4 \text{ с}^{-1}$  (рис 7.18). Естественно, переходный процесс при  $k_A = 1,6 \text{ с}^{-1}$  отличается меньшей колебательностью и затухает быстрее (рис. 7.19).

Однако отсюда нельзя делать вывод, о предпочтении быстрого регулятора, т.е. регулятора, у которого коэффициент передачи больше. Во-первых, с увеличением коэффициента передачи регулятора уменьшаются запасы устойчивости, что весьма нежелательно с точки зрения безопасности работы. Во-вторых, помимо регулярных возмущений реактивности (рассмотренный скачок относится к этому типу) импульсному реактору присущи значительные случайные возмущения реактивности. В результате этих случайных возмущений энергия импульсов мощности непрерывно колеблется в широком диапазоне (до  $\pm 40\%$ ) относительно среднего значения. Увеличение коэффициента передачи регулятора способствует увеличению колебаний энергии импульсов мощности. Однако при умеренных (не слишком больших) коэффициентах это увеличение незначительно. В связи с этим выбор коэффициента передачи регулятора основывается на компромиссе: с одной стороны, добиться приемлемых переходных процессов, вызванных регулярными возмущениями, а с другой, не раскачать колебания, вызванные случайными возмущениями.

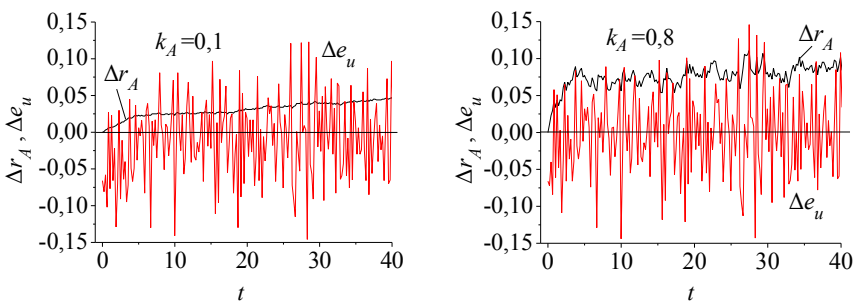


Рис. 7.20. Переходные процессы при возмущении реактивности в виде скачка и случайной составляющей при разных значениях коэффициента передачи регулятора  $k_A$  ( $\Delta r_A$  – реактивность регулятора в долях  $\beta_u$ ,  $\Delta e_u$  – относительное отклонение энергии импульсов мощности,  $t$  – время в с, средняя мощность 1,475 МВт)

На рис. 7.20 показаны вычисленные переходные процессы, соответствующие возмущающей реактивности в виде суммы случайной и регулярной составляющих. Принято, что случайная составляющая распределена по нормальному закону с дисперсией  $\sigma_{\Delta r}^2 = 0,05^2$ , т.е. со среднеквадратическим отклонением случайной составляющей от ее среднего (нулевого) значения равным  $\Delta r_{\text{ср.кв.}} = 0,05$ .<sup>\*</sup> В качестве регулярной составляющей рассмотрен скачок равный  $-0,01$  (возмущения реактивности выражены в долях  $\beta_u$ ). Процессы вычислены при двух значениях коэффициента передачи регулятора при средней мощности реактора 1,475 МВт. Соответствующие этой мощности параметры МОС определены путем математической обработки тестовых переходных процессов, зарегистрированных в январе 2002 г.

Увеличение коэффициента передачи регулятора от 0,1 до  $0,8 \text{ с}^{-1}$  приводит к очень незначительному увеличению среднеквадратического отклонения регулируемой величины. Однако рис. 7.20 показывает, что при коэффициенте передачи 0,8 регулятор совершает резкие колебания, что, разумеется, нежелательно. Анализ процессов при иных значениях  $k_A$  показал, что при регуляторе в виде интегрирующего звена значение  $k_A$  в пределах от 0,1 до 0,4 можно рассматривать как вполне приемлемое.

### **7.13. О разгоне реактора по заданному периоду**

В процессе эксплуатации реактора ИБР-2 режим автоматического поддержания заданного периода разгона не использовался. Тем не менее, на этапе проектирования автором было показано (1973 г.), что при наличии существенных случайных возмущений реактивности регулятор в виде интегрирующего звена с фильтром также в виде интегрирующего звена обеспечивает оп-

---

<sup>\*</sup> Элементарные сведения о случайных величинах приведены в работе [7].

тимальный (в статистическом смысле) режим работы.\*

В качестве регулируемой величины удобнее использовать не период реактора  $T_R$ , а обратный период  $\alpha_R = 1/T_R$ . Обратный период, соответствующий  $n$ -му импульсу мощности, равен

$$\alpha_{Rn} = \frac{1}{T_u} \ln \frac{E_n}{E_{n-1}}, \quad (7.59)$$

где  $T_u$  – период импульсов,  $E_n$  и  $E_{n-1}$  – энергии  $n$ -го и  $(n-1)$ -го импульсов мощности соответственно. Блок-схема для режима разгона по заданному обратному периоду показана на рис. 7.21.

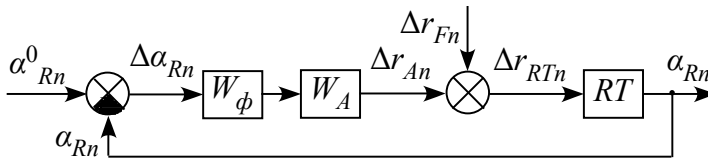


Рис. 7.21. Блок-схема реактора ( $RT$ ) с регулятором для режима разгона с заданным обратным периодом

Здесь (в отличие от блок-схемы для режима стабилизации) дополнительно введен фильтр управляющего сигнала. На фильтр (интегрирующее звено с передаточной функцией  $W_\phi = 1/s$ ) подается дискретный сигнал в виде последовательности импульсов (теоретически идеальных) с площадями равными  $\Delta\alpha_{Rn} = \alpha_{Rn}^0 - \alpha_{Rn}$ , где  $\alpha_{Rn}^0$  – заданное значение обратного периода реактора, соответствующие  $n$ -му импульсу мощности,  $\alpha_{Rn}$  – его “реальное” значение, вычисленное по формуле (7.59),  $\Delta\alpha_{Rn}$  – управляющий сигнал (“ошибка регулирования”).

Образующийся на выходе фильтра непрерывный сигнал ступенчатой формы подается на регулятор (интегрирующее звено с передаточной функцией  $W_A(s) = k_A T_u / s$ ), на выходе которого

\* Подробное изложение в работе [14].



формируется реактивность  $\Delta r_{An}$ , воздействующая на реактор. Возмущающая реактивность, воздействующая на реактор помимо управляющей реактивности, на рис. 7.21 обозначена  $\Delta r_{Fn}$ .

Регулятор с таким фильтром обеспечивает минимум ожидаемого значения “функции потерь”, соответствующей будущему импульсу мощности (именно ожидаемого значения в силу случайного характера реактивности и, следовательно, управляющего сигнала). В качестве функции потерь принято экспоненциальное выражение  $[\exp(\alpha_{Rn} - \alpha_{Rn}^0) - 1]^2$ , которое означает, что превышение обратного периода реактора над заданным значением представляется менее желательным, чем равное ему уменьшение. При малых отклонениях  $\alpha_{Rn}$  от  $\alpha_{Rn}^0$  экспоненциальная функция потерь стремится к квадратичному виду  $(\alpha_{Rn} - \alpha_{Rn}^0)^2$ .

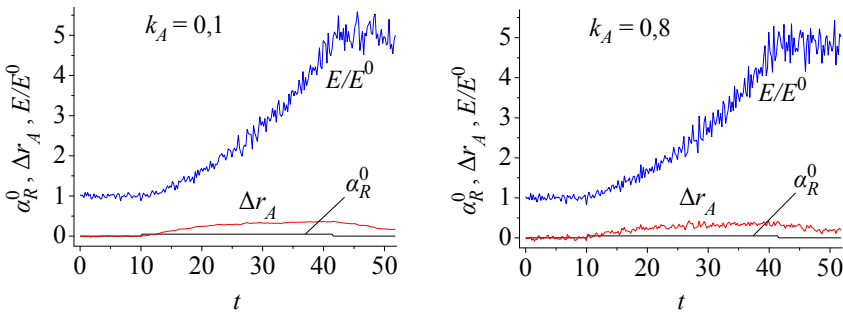


Рис. 7.22. Разгон реактора по заданному обратному периоду  $\alpha_R^0$  при различных значениях коэффициента передачи регулятора  $k_A$  ( $E/E^0$  – энергия импульсов мощности в относительных единицах,  $\Delta r_A$  – реактивность регулятора в долях  $\beta_u$ ,  $t$  – время в с)

На рис. 7.22 показаны вычисленные переходные процессы для режима разгона по заданному периоду при случайном возмущении реактивности для двух значений коэффициента переда-

чи регулятора  $k_A = 0,1$  и  $k_A = 0,8 \text{ с}^{-1}$ . Принято, что возмущения реактивности  $\Delta r_{Fn}$  подчиняются нормальному закону распределения с дисперсией  $\sigma_{\Delta r}^2 = 0,05^2$  (как и при моделировании переходных процессов в режиме стабилизации). Для большей наглядности принято, что заданный обратный период  $\alpha_{Rn}^0$  отличается от нуля на непродолжительное время и равен  $\alpha_{Rn}^0 = 0,05 \text{ с}^{-1}$ , что соответствует очень малому периоду разгона реактора ( $T_R = 20 \text{ с}$ ).

Показанные на рис. 7.22 переходные процессы реактивности регулятора, соответствующие двум значениям  $k_A$ , совмещены для большей наглядности на рис. 7.23. Из рис. 7.23 видно, что для режима разгона более медленный регулятор с  $k_A = 0,1 \text{ с}^{-1}$  несомненно предпочтительнее более быстрого с  $k_A = 0,8 \text{ с}^{-1}$  (при  $k_A = 0,8 \text{ с}^{-1}$  наблюдаются резкие перемещения вверх-вниз регулирующего стержня, что нежелательно).

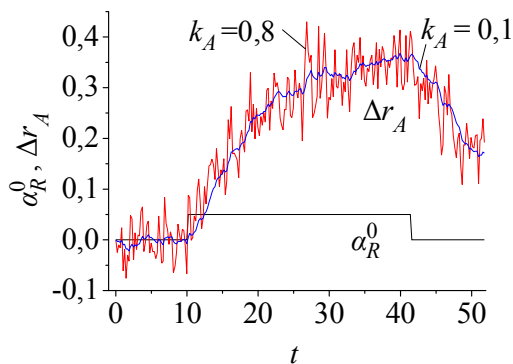


Рис. 7.23. Разгон реактора по заданному обратному периоду  $\alpha_R^0$  при различных значениях коэффициента передачи регулятора  $k_A$  ( $\Delta r_A$  – реактивность регулятора в долях  $\beta_u$ ,  $t$  – время в с)

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белл Д., Глесстон С. Теория ядерных реакторов. Пер. с англ. Под ред. В.Н.Артамкина. – М.: Атомиздат, 1974. – 496 с.
2. Бондарченко Е.А., Пепельшев Ю.Н., Попов А.К. Экспериментальное и модельное исследование особенностей динамики импульсного реактора периодического действия ИБР-2 // ЭЧАЯ. – 2004. – Т.35, вып. 4. – с. 928 – 983.
3. Дементьев Б.А. Ядерные энергетические реакторы. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 280 с.
4. Дементьев Б.А. Кинетика и регулирование ядерных реакторов. – М.: Энергоатомиздат, 1986. – 272 с.
5. Емельянов И.Я., Ефанов А.И., Константинов Л.В. Научно-технические основы управления ядерными реакторами. Под общ. ред. акад. Н.А.Доллежала. – М.: Энергоиздат, 1981. – 360 с.
6. Попов А.К. Элементы теории автоматического управления. Часть 1. – М.: МИРЭА, 2008. – 208 с.
7. Попов А.К. Элементы теории автоматического управления. Часть 2. – М.: МИРЭА, 2008. – 184 с.
8. Управление ядерными энергетическими установками. Вып. 1. – М.: Атомиздат, 1966. – 136 с.
9. Управление ядерными энергетическими установками. Вып. 2. – М.: Атомиздат, 1967. – 92 с.
10. Управление ядерными энергетическими установками. Вып. 3. – М.: Атомиздат, 1968. – 136 с.
11. Управление ядерными энергетическими установками. Вып. 4. – М.: Атомиздат, 1970. – 144 с.
12. Шабалин Е.П. Импульсные реакторы на быстрых нейтронах. – М.: Атомиздат, 1976. – 248 с.
13. Шульц М. Регулирование энергетических ядерных реакторов. Пер. с англ. Под ред. Д.И.Воскобойникова. – М.: Изд-во иностр. лит., 1957. – 460 с.
14. Popov A.K., Marachev A.A. On Statistically Optimal Algorithms of Regulation of a Pulsed Reactor // In: Nuclear Waste Research: Siting, Technology and Treatment (Editor: Arnold P. Lattefer). – New York.: 2008 Nova Science Publishers, Inc. – pp. 107–141.

## СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие .....	3
1. Общие сведения .....	4
2. Физические основы управления реактором .....	11
2.1. Реакция деления .....	11
2.2. Энергия деления .....	12
2.3. Мощность реактора .....	12
2.4. Время жизни нейтронов .....	12
2.5. Коэффициент размножения .....	13
2.6. Избыточный коэффициент размножения .....	15
2.7. Период реактора .....	15
2.8. Установившийся уровень подкритического реактора ...	16
2.9. Период реактора в подкритическом режиме .....	18
2.10. Запаздывающие нейтроны .....	19
2.11. Мгновенная критичность .....	23
2.12. Уравнения кинетики реактора .....	23
2.13. Об определении критической массы реактора .....	26
2.14. Одна эквивалентная группа запаздывающих нейтронов	29
2.15. Реактивность. Уравнение обратных часов .....	31
2.16. Положительная реактивность .....	34
2.17. Сравнение периода реактора при учете запаздывающих нейтронов и без учета .....	37
2.18. Отрицательная реактивность .....	37
2.19. Уравнения кинетики, выраженные через реактивность	39
3. Элементы теории автоматического управления .....	40
3.1. Системы автоматического управления .....	40
3.2. Дифференциальные уравнения систем управления .....	42
3.2.1 Общие соображения (42). 3.2.2. Принцип наложения (43). 3.2.3. Линеаризация нелинейности. Безразмерные пе- ременные (43). 3.2.4. Дифференциальное уравнение $n$ -го	

порядка (45). 3.2.5. О порядке производных в левой и правой части дифференциального уравнения (46).	
3.3. Временные характеристики .....	46
3.3.1. Единичный скачок (47). 3.3.2. Начальные и предначальные условия (47). 3.3.3. Переходная характеристика (47). 3.3.4. Единичный импульс. Дельта-функция (48). 3.3.5. Связь единичного импульса с единичным скачком (48). 3.3.6. Импульсная переходная характеристика (49). 3.3.7. Связь импульсной переходной характеристики с переходной характеристикой (50). 3.3.8. Выходной сигнал при произвольном входном сигнале (50). 3.3.9. Реакция системы на узкий прямоугольный импульс (51).	
3.4. Операционный метод исследования линейных систем. Передаточная функция .....	52
3.4.1. Основные математические методы исследования (52). 3.4.2. Суть операционного метода (53). 3.4.3. Преобразование Лапласа (53). 3.4.4. Некоторые свойства и соответствия преобразования Лапласа (54). 3.4.5. Определение оригинала по известному изображению (56). 3.4.6. Передаточная функция (58).	
3.5. Структурные схемы и их преобразование .....	59
3.5.1. Структурная схема системы (59). 3.5.2. Последовательное соединение звеньев (60). 3.5.3. Параллельное соединение звеньев (61). 3.5.4. Соединение звеньев с обратной связью (61). 3.5.5. Перенос сумматоров и узлов разветвления (63). 3.5.6. Пример преобразования структурной схемы (64).	
3.6. Элементарные звенья систем автоматического управления .....	65
3.7. Частотный метод .....	70

3.7.1. Преобразование Фурье. Частотная передаточная функция (70).	
3.7.2. Частотные характеристики (72).	
3.7.3. Частотные характеристики элементарных звеньев (75).	
3.7.4. Частотные характеристики звена чистого запаздывания (78).	
3.8. Логарифмические частотные характеристики.....	79
3.8.1. Логарифмические характеристики элементарных звеньев (80).	
3.8.2. Логарифмические частотные характеристики системы, представленной в виде последовательного соединения звеньев (85).	
3.9. Устойчивость систем .....	88
3.9.1. Понятие устойчивости (88).	
3.9.2. Критерии устойчивости (92).	
3.10. Качество процесса регулирования .....	105
3.10.1. Установившаяся ошибка регулирования при скачкообразном воздействии. Статические и астатические системы (105).	
3.10.2. Установившаяся ошибка в астатической системе при линейно возрастающем сигнале (108).	
3.10.3. Показатели качества переходного процесса при ступенчатом воздействии (108).	
3.10.4. Связь между частотной и переходной характеристиками системы (109).	
3.10.5. Связь между логарифмической амплитудной частотной характеристикой разомкнутой системы и переходной характеристикой замкнутой системы (110).	
3.11. Изменение структуры для улучшения качества системы	113
3.11.1. Влияние форсирующего звена на устойчивость (113).	
3.11.2. Влияние нулей передаточной функции на характер переходного процесса (114).	
3.11.3. Влияние отрицательной обратной связи по производной выходного сигнала (116).	
3.12. Элементы теории импульсной системы управления ..	117

3.12.1. Решетчатые функции. Разностные уравнения (117).  
 3.12.2. Спектры решетчатых функций. Частотная передаточная функция (118). 3.12.3. Спектры некоторых решетчатых функций (120). 3.12.4. Дискретные частотные передаточные функции замкнутой системы (122). 3.12.5. Вычисление дискретной импульсной переходной характеристики по вещественной части дискретной частотной передаточной функции (123). 3.12.6. Об эквивалентности импульсной и непрерывной систем (123). 3.12.7. Аналог критерия Найквиста и логарифмический критерий устойчивости (124).

4. Реактор нулевой мощности .....	124
4.1. Линеаризация уравнений кинетики реактора .....	124
4.2. Передаточная функция реактора .....	126
4.3. Частотные характеристики реактора .....	130
5. Реактор ненулевой мощности .....	135
5.1. Обратная связь, обусловленная разогревом реактора ...	135
5.2. Мощностная обратная связь .....	143
5.3. Предельно упрощенная модель мощностной обратной связи .....	145
5.4. Обратная связь, обусловленная продуктами деления ...	149
6. Реактор с автоматическим регулятором .....	153
7. Импульсный быстрый реактор периодического действия ИБР-2 .....	162
7.1. Конструкция и принцип действия .....	163
7.2. Исходные уравнения кинетики. Допущения при описании мощности .....	165
7.3. Уравнения кинетики импульсного реактора .....	171
7.4. Импульсная доля запаздывающих нейтронов. Блок-схема импульсного реактора .....	173

7.5. Блок-схема импульсного реактора ненулевой мощности	176
7.6. Мощностная обратная связь в линейном приближении	177
7.7. Нелинейная модель мощностной обратной связи .....	183
7.8. Линеаризованные уравнения импульсного реактора ...	186
7.9. Устойчивость импульсного реактора ненулевой мощности .....	190
7.10. Блок-схема импульсного реактора с автоматическим регулятором .....	191
7.11. Структура автоматического регулятора оптимального в статистическом смысле .....	193
7.12. Устойчивость импульсного реактора с регулятором ..	195
7.13. О разгоне реактора по заданному периоду .....	198
Список литературы .....	202



Учебное пособие

Александр Ксенофонович Попов

Основы управления ядерным реактором

Редактор:

Работа поступила в ОНТИ *число, месяц, год*

Тираж 150 экз.